线代题型方法总结

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

tip：本笔记用于总结往年试题中的题型与方法，包括线代A1.2，的近年试题，在最后会选取B中试题进行解答。
(至2025年)

线代A1期中部分

2026.4.18

1.2025

$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^8 \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{3\times4}$ 的 Smith 标准形为 $\begin{pmatrix} x & & & \\ & x^3(x-1) & & \\ & & x^6(x-1)^2(x+1) & 0 \end{pmatrix}$

$D_1 = x$ $D_2 = x^4(x-1)$ $D_3 = x^{10}(x-1)^2(x^2-1)$. 则为 $d_1(x) = x$. $d_2(x) = \frac{D_2}{D_1} = x^3(x-1)$ $d_3(x) = \frac{D_3}{D_2} = x^6(x-1)$

4. 对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $b \in \mathbb{C}^{n\times1}$，线性方程组 $A^HAx = A^Hb$ 有解. —— $\Leftrightarrow$ 增广rank = 系数rank.

$\operatorname{rank}(A^HA, A^Hb) \leq \operatorname{rank} A^H = \operatorname{rank} A$ 即均相等.
$\geq \operatorname{rank}(A^HA) \geq \operatorname{rank} A$

2. 设 $n = 2025$. 求所有 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得其伴随方阵 $A^* = A$. —— 对伴随方阵 A^*，有 $\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} 1 & \operatorname{rank} A = n-1 \\ n & \operatorname{rank} A = n \\ 0 & \text{others} \end{cases}$

$A^* = |A| \cdot A^{-1}$

2. (1) $A = O$，满足题设. (2 分)
(2) $1 \leqslant \operatorname{rank}(A) \leqslant n-2$，则 $A^* = O$，矛盾. (2 分)
(3) $\operatorname{rank}(A) = n-1$，则 $\operatorname{rank}(A^*) = 1$，矛盾. (2 分)
(4) $\operatorname{rank}(A) = n$. 由 $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$，得 $\det(A) = 1$，$A^* = A^{-1}$，$A^2 = I$. (4 分)
因此，$A = P\begin{pmatrix} I_{n-2k} & O \\ O & -I_{2k} \end{pmatrix}P^{-1}$，其中 P 是可逆实方阵，$k \in \mathbb{N}$，$k \leqslant 1012$. (5 分)

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 求证：$\operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(A^2) = n$ 当且仅当 $A^2 = A^3$. —— 矩阵打洞基础.

$\begin{pmatrix} I & A^2-I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I-A & \\ & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I+A \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ A-I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2-A^3 & \\ & I \end{pmatrix}$ 则 $\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank} A^2 = n + \operatorname{rank}(A^2 - A^3)$

2.2024

Sylvester秩不等式：$\operatorname{rank} AB + n \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$
$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank}(AC+BD)$ $(\operatorname{rank} A \geq \operatorname{rank} AC)$

设A为n阶复方阵. 证明:$A^3 + I = 0$当且仅当$\operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A^2 - A + I) = n$.

法一 Sylvester秩不等式：$\operatorname{rank}(A^3+I) \geq \operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A^2-A-I) - n$
又有 $\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A^2-A-I) \geq \operatorname{rank}((A-2I)(A+I) + A^2-A+I) = n$

法二 $\begin{pmatrix} I & A+I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ A-2I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+I & \\ & A^2-A+I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^2-A+I \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & A^3+I \\ -I & \end{pmatrix}$

设$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足$AB^T = O$. 求证：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. —— $\operatorname{rank} AA^T = \operatorname{rank} A$

六、 对于任意实矩阵 M，有 $\operatorname{rank}(MM^T) = \operatorname{rank}(M)$. (6 分)
故 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AA^T & O \\ O & BB^T \end{pmatrix}$
$= \operatorname{rank}(AA^T) + \operatorname{rank}(BB^T) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. (4 分)

3.2023

2. (30 分) 给定方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^{2\times2}$. 记 $V_A = \{X \in F^{2\times2} \mid AX - XA = O\}$.
(i) 证明: V_A 是线性空间 $F^{2\times2}$ 的非零子空间. —— 加法、数乘封闭
(ii) 若 $\dim_F V_A = 4$, 试求 A 需满足的条件. —— 与所有二阶X交换
(iii) 证明: 不存在 $X \in F^{2\times2}$ 使得 $AX - XA = I_2$. —— $tr(AB) = tr(BA)$

5. (10 分) 设 V 是由次数 $< n$ 的实系数多项式组成的线性空间. 设 a_i $(i = 1, \cdots, n)$ 是两两不同的实数, $f_i(x) = \prod_{j\neq i}(x - a_j)$. 证明: $\{f_i(x) \mid 1 \leq i \leq n\}$ 是 V 的一组基.

① $f_i(x) \in V$ 显然. ② 线性无关，个数 $= \dim V$
$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$ 代入 a_i，为 $\lambda_i \prod_{j\neq i}(a_j - a_i) \neq 0$. $\lambda_i = 0$. 证毕

4.2021

3. 对于任意 3 阶实方阵 A, B，$\det(A^2 - B^2) = \det(A + B)\det(A - B)$.

正常对∀A.B为同阶方阵. $\det AB = \det A \cdot \det B$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$. 成立条件是AB可交换，故不成立

4. 对于任意 3 阶实方阵 A, B，矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $XA = B$ 有解.

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \ \ B)$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 一个列空间，一个行空间，不一致

2. (12 分) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = I$. 证明：存在可逆实方阵 P 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}, \quad r = \operatorname{rank}(A + I).$$

—— 矩阵分块

3. (12 分) 设 $m \times n$ 实矩阵 A, B 满足线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解. 证明：存在可逆实方阵 P 使得 $B = PA$. —— 满秩分解.

2. 设 $A+I=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 P,Q 是可逆实方阵． (4 分)

由 $(A-I)(A+I)=O$，得 $(B_1-2I)\begin{pmatrix} B_1 & B_2\end{pmatrix}=O$，得 $B_1=2I$． (4 分)

故 $A=P\begin{pmatrix} I & B_2 \\ O & -I\end{pmatrix}P^{-1}=P\underbrace{\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}B_2 \\ O & I\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} I & O \\ O & -I\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} I & \frac{1}{2}B_2 \\ O & I\end{pmatrix}}_{M^{-1}}P^{-1}$． (4 分)

3. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 同解，得 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}$． (4 分)

设 $\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2\end{pmatrix}Q$ 为满秩分解，则 $A=P_1Q$，$B=P_2Q$ 都为满秩分解． (4 分)

设 P_1,P_2 分别是可逆方阵 M_1,M_2 的前 r 列，则 $B=M_2M_1^{-1}A$． (4 分)

5.2019

8. 证明：对任意方阵 A，存在单位下三角方阵 L 和置换方阵 P，使得 LPA 是上三角．——一般此类题都用归纳

9. 证明：任意对称实数方阵 A 有 $r=\operatorname{rank}(A)$ 阶可逆主子矩阵．

8. 对 A 的阶数 n 归纳．当 $n=1$ 时，结论显然成立．当 $n\geqslant 2$ 时，存在单位下三角方阵 $L_1=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ * & I_{n-1}\end{pmatrix}$ 和置换方阵 P_1，使得 $L_1P_1A=\begin{pmatrix} * & * \\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}$． (5 分)

根据归纳假设，存在单位下三角方阵 L_2 和置换方阵 P_2 使得 L_2P_2B 是上三角．

记 $\widetilde{L}_2=\operatorname{diag}(1,L_2)$，$\widetilde{P}_2=\operatorname{diag}(1,P_2)$，$U=\widetilde{L}_2\widetilde{P}_2L_1P_1A$ 是上三角． (3 分)

注意到 $\widetilde{L}_1=\widetilde{P}_2L_1\widetilde{P}_2^{-1}$ 也是单位下三角．因此，$U=LPA$，其中 $L=\widetilde{L}_2\widetilde{L}_1$ 是单位下三角方阵，$P=\widetilde{P}_2P_1$ 是置换方阵． (5 分)

常用步骤

9. $A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} B & C \\ O & O\end{pmatrix}P^T$，其中 P,Q 是可逆方阵． (4 分)

$A^T=A\Rightarrow C=O\Rightarrow \det(B)\neq 0$． (3 分)

设 $P_1=P\begin{pmatrix} I_r \\ O\end{pmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(P_1)=r$，存在子矩阵 $P_2=P_1\left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & \cdots & r\end{smallmatrix}\right]$ 可逆． (3 分)

故 $A=P_1BP_1^T$，主子矩阵 $A\left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r\end{smallmatrix}\right]=P_2BP_2^T$ 可逆． (3 分)

线代A1期末部分

2026.4.18

1.2021

2. 已知复方阵A的特征多项式为x^4+x^3+1．写出A^3的特征多项式．

$\varphi_A(\lambda)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_4)$ $\varphi_{A^3}(\lambda)=(x-\lambda_1^3)\cdots(x-\lambda_4^3)$

设 $y_i:=\lambda_i^3$. $\lambda_i^4=-y_i-1\Rightarrow\lambda_i=-\frac{y_i+1}{y_i}\Rightarrow y_i=-\frac{(y_i+1)^3}{y_i^3}$ 则 $y_i^4+(y_i+1)^3=0\Rightarrow\varphi_{A^3}(x)=x^4+(x+1)^3$

2. 设复方阵 A 满足 $d_A(x)=\varphi_A(x)=(x-x^3)^6$．求 $B=A^4$ 的特征多项式、最小多项式和初等因子组．

$d_A(x)=x^6(1-x)^6(1+x)^6\Rightarrow A$ 的Jordan标准型 $J_A=\operatorname{diag}(J_6(0),J_6(1),J_6(-1))$

$B=A^4$. $J_1=J_6^4(0)$: $6-\operatorname{rank}J_1=4$. $N(2)=\operatorname{rank}J_1^3+\operatorname{rank}J_1-2\operatorname{rank}J_1^2=2$

$N(1)=\operatorname{rank}J_1^2+\operatorname{rank}J_1^0-2\operatorname{rank}J_1^1=2$

故 $J_1^4(0)\sim\operatorname{diag}(J_2(0),J_2(0),0,0)$

$J_2=J_6^4(1)$: $6-\operatorname{rank}(J_2-I)=1$ $J_2\sim J_6(1)$

$J_3=J_6^4(-1)$: $6-\operatorname{rank}(J_3-I)=1$. $J_3\sim J_6(1)$.

则 $J_B=\operatorname{diag}(J_6(1),J_6(1),J_2(0),J_2(0),0,0)\Rightarrow\varphi_B(x)=x^6(x-1)^{12}$

$d_B(x)=x^2(x-1)^6$. 初等因子组：$\{x,x,x^2,x^2,(x-1)^6,(x-1)^6\}$

用Jordan求 d. φ.

9. 设 $1<k<n$，求 $J_n(0)^k$ 的 Jordan 标准形。

$M=J_n^k(0)$. $\operatorname{rank}M^j=n-jk$.

$n=mk+r$

表：

j	1	2	$\cdots$	m	$m+1$	$\cdots$
rank	$n-k$	$n-2k$	$\cdots$	$n-mk$	0	$\cdots$
d		k	$\cdots$	k	$n-mk$	$\cdots$
δ		0	$\cdots$	$(m+1)k-n$	$n-mk$	0 $\cdots$

$N(m)=\operatorname{rank}J_n(0)^{km+k}+\operatorname{rank}J_n(0)^{km-k}-2\operatorname{rank}J_n(0)^{km}=k-r$

☆表格法☆

若 $n=mk$. 则有 k 个 m 阶Jordan块

若 $n=mk+r$ 则有 $k-r$ 个 m 阶块，r 个 $m+1$ 阶块

5. 若n阶复方阵A,B都可以相似成对角阵，则AB是否一定可以相似成对角阵？

A与B交换才可以

10b. 设$\mathcal{A}$是线性空间V上的线性变换，U_1,U_2,U_3分别是$\alpha,\beta,\alpha+\beta\in V$生成的$\mathcal{A}$循环子空间．证明：若$\alpha,\beta$相对于$\mathcal{A}$的最小多项式$d_\alpha,d_\beta$互素，则$U_3=U_1\oplus U_2$．——直接用Bezout定理

10b. 根据 Bezout 定理，存在多项式u,v使得$ud_\alpha+vd_\beta=\gcd(d_\alpha,d_\beta)=1$． (4 分)

设$\gamma\in U_1\cap U_2$，则$d_\alpha(\mathcal{A})\gamma=d_\beta(\mathcal{A})\gamma=0$，得$\gamma=0$． (4 分)

由$\alpha=v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})\alpha=v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})(\alpha+\beta)\in U_3$，得$U_1\subset U_3$．同理$U_2\subset U_3$． (4 分)

显然，$U_3\subset U_1+U_2$．综上，$U_3=U_1\oplus U_2$． (4 分)

2.2024

一、求多项式矩阵$\begin{pmatrix} 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ 1+x^2 & 1+x^3 & 1+x^4 \\ 1+x^3 & 1+x^4 & 1+x^5\end{pmatrix}$的 Smith 标准形．——找最低次多项式放最左上再消去所在的列

二 (20 分) 设实方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$．——基础问题

1. 求 A 的特征多项式与最小多项式.
2. 求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ, 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$.
3. 求 e^A，这里 $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

解:

1. 特征多项式

$$\varphi_A=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -4 \\ 2 & \lambda+2 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-27\lambda-54=(\lambda+3)^2(\lambda-6)$$

由于 A 为实对称矩阵, A 可对角化为 $\Lambda=diag\{-3,-3,6\}$.
故最小多项式 $d_A=(\lambda+3)(\lambda-6)=\lambda^2-3\lambda-18$. □

2. 计算特征值对应的特征向量.

$$Ax=-3x \text{ 解系为 } x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix}; Ax=6x \text{ 解系为 } x_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\end{pmatrix}.$$

取 $\Lambda=diag\{-3,-3,6\}$, $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, 则有 $A=P\Lambda P^{-1}$. □

3. 利用对角化的结果进行计算.

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=P(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda^k}{k!})P^{-1}=P\,diag\{e^{-3},e^{-3},e^{-6}\}\,P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3} & & \\ & e^{-3} & \\ & & e^{-6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{5}{9}e^{-3}+\frac{4}{9}e^{6} & \frac{2}{9}e^{-3}-\frac{2}{9}e^{6} & -\frac{4}{9}e^{-3}+\frac{4}{9}e^{6} \\ \frac{2}{9}e^{-3}-\frac{2}{9}e^{6} & \frac{8}{9}e^{-3}+\frac{1}{9}e^{6} & \frac{2}{9}e^{-3}-\frac{2}{9}e^{6} \\ -\frac{4}{9}e^{-3}+\frac{4}{9}e^{6} & \frac{2}{9}e^{-3}-\frac{2}{9}e^{6} & \frac{5}{9}e^{-3}+\frac{4}{9}e^{6}\end{pmatrix}$$ □

三、（1）求证：若 3 阶复方阵A,B有相同的特征多项式和最小多项式，则A与B相似．

（2）举例：复方阵A与B不相似，但A,B有相同的秩、特征多项式和最小多项式．

情况 1： $\deg(d(x))=3$

- 此时 $d(x)=\varphi(x)$（因为最小多项式整除特征多项式，且次数相同，首一多项式必相等）。
- 说明 A 的每个特征值 λ 对应的Jordan块阶数的最大值等于其代数重数，即每个特征值对应一个Jordan块。
- 3阶方阵的Jordan块结构只能是一个3阶Jordan块 $J_3(\lambda)$。
- 因此 A,B 的Jordan标准形均为 $J_3(\lambda)$，故 $A\sim B$。

情况 2： $\deg(d(x))=2$

- 此时 $d(x)$ 有一个2次因子和一个1次因子，特征多项式为 $\varphi(x)=d(x)\cdot(x-a)$，其中 a 是常数。
- 说明 A 存在一个2阶Jordan块 $J_2(\lambda)$ 和一个1阶Jordan块 $J_1(\mu)$，且 $d(x)$ 是 $J_2(\lambda)$ 的特征多项式与 $J_1(\mu)$ 的特征多项式的最小公倍式。
- 由于特征多项式唯一确定了特征值及其代数重数，最小多项式确定了最大Jordan块的阶数，因此Jordan块结构只能是 $J_2(\lambda)\oplus J_1(\mu)$。
- 因此 A,B 的Jordan标准形相同，故 $A\sim B$。

情况 3： $\deg(d(x))=1$

- 此时 $d(x)=x-a$，说明 A 的所有Jordan块都是1阶的，即 A 可对角化，特征值全为 a。
- 因此 A 的Jordan标准形为 aI_3，同理 B 也相似于 aI_3，故 $A\sim B$。

（2）$A=\operatorname{diag}(J_3(0),J_3(0),0)$与$B=\operatorname{diag}(J_3(0),J_2(0),J_2(0))$不相似，$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=4$，$\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=x^7$，$d_A(x)=d_B(x)=x^3$． (6 分)

$\deg d=3\Rightarrow$ ✓ 3个块

四、设$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{20\times 20}$，其中$a_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ 0, & i\geq j\end{cases}$. 分别求$A$、$A^2$、$A^3$的 Jordan 标准形.

幂零阵的Jordan

推论 1 设 B 是域 F 上的 r 级幂零矩阵，其幂零指数为 l，则 B 相似于一个 Jordan 形矩阵，其中每个 Jordan 块的主对角元为 0，且级数不超过 l，Jordan 块的总数为

$$r-\mathrm{rank}(B), \tag{2}$$

t 级 Jordan 块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t)=\mathrm{rank}(B^{t+1})+\mathrm{rank}(B^{t-1})-2\mathrm{rank}(B^t); \tag{3}$$

这个 Jordan 形矩阵称为 B 的 Jordan 标准形，除去 Jordan 块的排列次序外，B 的 Jordan 标准形是唯一的。 ■

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，如果 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}, \tag{1}$$

那么 V 中存在一个基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 A 为 Jordan 形矩阵，它的主对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 N_j 为

$$N_j=n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}), \tag{2}$$

其中 t 级 Jordan 块 $J_t(\lambda_j)$的个数 $N_j(t)$为

$$N_j(t)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{t+1}+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{t-1}-2\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^t, \tag{3}$$

$t\leqslant l_j$；$j=1,2,\cdots,s$。这个 Jordan 形矩阵 A 称为$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形，除去 Jordan 块的排列次序外，$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的。

一般的Jordan

rankA=19. 有1个Jordan块. 阶是te. $A\sim J_{20}(0)$

rankA^2=18. A^2有2个Jordan块. $N(10)=\mathrm{rank}(A^{22})+\mathrm{rank}A^{18}-2\mathrm{rank}A^{20}=2$ $A^2\sim \mathrm{diag}(J_{10}(0),J_{10}(0))$

rankA^3=17. A^3有3个Jordan块. $N(7)=\mathrm{rank}(A^{24})+\mathrm{rank}(A^{18})-2\mathrm{rank}A^{21}=2$ $A^3\sim \mathrm{diag}(J_7(0),J_7(0),J_6(0))$

六 (15 分) 设 A, B 均为 2 阶复方阵. 证明: A 与 B 相似当且仅当 A 与 B 有相同的特征多项式和最小多项式.

证明:

一方面, 若 A 与 B 相似, 设 $A=PBP^{-1}$. 则 $|\lambda I-A|=|P(\lambda I-B)P^{-1}|=|P||\lambda I-B||P^{-1}|=|\lambda I-A|$. 故 A 与 B **特征多项式相同**. 又对任意多项式 f 有 $f(A)=Pf(B)P^{-1}$, 即 $f(A)=0\Leftrightarrow f(B)=0$. 故 A 与 B **最小多项式相同**.

另一方面, 若 A 与 B 有相同的特征多项式和最小多项式.

1. 若特征多项式两根不同 (设两根为 λ_1,λ_2). 则 A 与 B 都可以对角化为 $diag\{\lambda_1,\lambda_2\}$. 故 A 与 B **相似**.

2. 若特征多项式两根相同 (设重根为 λ).

若 A 与 B 最小多项式为 $x-\lambda$, 则 $A=B=\lambda I$. 故 A 与 B **相似**.

若 A 与 B 最小多项式为 $(x-\lambda)^2$. 设 A 和 B 分别相似于上三角形矩阵 $A'=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 和 $B'=\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$. 则 A' 与 B' 最小多项式为 $(x-\lambda)^2$, 即 $a,b\neq 0$.

注意到

$$\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & b\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b}{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

故 A' 与 B' 相似. 故 A 与 B **相似**.

综上, 我们证明了命题. □

1b. (15 分) 设 $A=J_{2025}(0)$ 是 Jordan 块. 求 A^{1000} 的 Jordan 标准形.

rankA^{1000}=1025. 则有 $n-\mathrm{rank}A^{1000}=1000$ 个 Jordan 块

$N(2)=\mathrm{rank}A^{3000}+\mathrm{rank}A^{1000}-2\mathrm{rank}A^{2000}=1025-25\times 2=975$

$N(3)=\mathrm{rank}A^{4000}+\mathrm{rank}A^{2000}-3\mathrm{rank}A^{3000}=25$ 即 975个$J_2(0)$, 25个$J_3(0)$

3.2023

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$. 设$\mathcal{A}$是线性变换$X\in\mathbb{F}^{5\times 1}\mapsto AX\in\mathbb{F}^{3\times 1}$.
试求$\mathbb{F}^{5\times 1}$的基M_1和$\mathbb{F}^{3\times 1}$的基M_2，使得$\mathcal{A}$在这两组基下的矩阵是$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$的形式.

$\mathcal{A}M_1=M_2\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

rankA=2. 由$\mathcal{A}M_1=M_2\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 这里有$\mathcal{A}\alpha_3=\mathcal{A}\alpha_4=\mathcal{A}\alpha_5=0$. 考虑 Ker$\mathcal{A}$

$AX=0\Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. $\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 可取$\alpha_1=e_1$. $\alpha_2=e_2$. 则 $M_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_5\}$. 对$M_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. 有$\beta_1=\mathcal{A}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\mathcal{A}\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ β_3与β_1, β_2无关. 取$\beta_3=e_3$

设n阶正交方阵A满足$\mathrm{rank}(A-I_n)=1$.
求证：存在$\alpha\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，使得$\alpha^T\alpha=1$并且$A=I_n-2\alpha\alpha^T$.

rankB=1 则 $B=\alpha\beta^T$

由rank$(A-I_n)=1$. 设 $A-I_n=\alpha\beta^T$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{n\times 1}$为非零列向量 $\Rightarrow A=I_n+\alpha\beta^T$

由A正交$\Rightarrow A^TA=I_n$. 即$(I_n+\alpha\beta^T)^T(I_n+\alpha\beta^T)=I_n\Rightarrow \alpha\beta^T+\beta\alpha^T+(\beta^T\alpha)(\alpha\beta^T)=0$. 若$\alpha$与$\beta$无关. 则$\alpha\beta^T$与$\beta\alpha^T$无关. 等式不成立

则 β与α相关. $\exists k\in\mathbb{R}$. $\beta=k\alpha$. 代入. 有 $2k\alpha\alpha^T+k^2\alpha^T\alpha(\alpha\alpha^T)=0\Rightarrow k[2+k(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T=0$.

① 若$k=0$. 则$\beta=0$. $A=I_n$. 与rank$(A-I_n)=1$矛盾!

② $2+k(\alpha^T\alpha)=0$. 即$k=-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\Rightarrow \beta=k\alpha=-\frac{2\alpha}{\alpha^T\alpha}$ 则$A=I_n-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$ 令$\eta=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^T\alpha}}$ 则$\eta^T\eta=1$. $\eta\eta^T=\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha}\Rightarrow A=I_n-2\eta\eta^T$ η即为所求.

设一组矩阵$\{A_i\in\mathbb{F}^{d_i\times d_{i-1}}|i=1,\cdots,n\}$满足$\mathrm{rank}(A_1)=d_0$，$\mathrm{rank}(A_n)=d_n$，并且
$\{A_ix|x\in\mathbb{F}^{d_{i-1}\times 1}\}=\{x\in\mathbb{F}^{d_i\times 1}|A_{i+1}x=0\}$，$\forall i=1,\cdots,n-1$.
求证：$\sum_{i=0}^n(-1)^id_i=0$.

dimker + rankA = A的列数.

(方阵时为A阶数)

2b 解答. 由题设, $d_i-rank(A_{i+1})=\overset{\dim\ker(A_{i+1})}{\cancel{}}=rank(A_i), i=1,2,\cdots,n-1$. 所以 $\Sigma_{i=0}^n(-1)^id_i=d_0+(-1)^nd_n+\Sigma_{i=1}^{n-1}(-1)^i(rank(A_i)+rank(A_{i+1}))=d_0+(-1)^n+(-1)rank(A_1)+(-1)^{n-1}rank(A_n)=0$, 即证.

3、(1) 设$f_1,f_2\in\mathbb{F}[x]$，g_1,g_2是f_1,f_2的最大公因式和最小公倍式.
求证：$\mathrm{diag}(f_1,f_2)$与$\mathrm{diag}(g_1,g_2)$在$\mathbb{F}[x]$上相抵.
(2) 求$\mathrm{diag}((x^3-x)^2,(x^2-x)^3,(x^2-1)^4)$在$\mathbb{R}[x]$上的 Smith 标准形.

有gcd. 考虑Bezout定理

3 解答. (1) 由 Bezout 定理, $\exists u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$, $f_1u+f_2v=g_1$. 则

$$diag(f_1,f_2)\sim\begin{pmatrix}f_1 & f_1u\\ 0 & f_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}f_1 & f_1u+f_2v\\ 0 & f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1 & g_1\\ 0 & f_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}f_1 & g_1\\ -\frac{f_1f_2}{g_1} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}f_1 & g_1\\ -g_2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & g_1\\ -g_2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix}=diag(g_1,g_2),$$ 即证.

(2) $(x^3-x)^2=(x+1)^2x^2(x-1)^2$, $(x^2-x)^3=x^3(x-1)^3$, $(x^2-1)^4=(x+1)^4(x-1)^4$. 标准型为 $diag((x+1)^4x^3(x-1)^4,(x+1)^2x^2(x-1)^3,(x-1)^2)$.

→初等因子: $(x-1)^4$ x^3 $(x+1)^4$ → d_3
$(x-1)^3$ x^2 $(x+1)^2$ → d_2
$(x-1)^2$ → d_1

$d_1|d_2|d_3$

5a、设$\mathcal{A}$是有限维复空间的线性变换，$\lambda_1,\cdots,\lambda_t$是它所有的特征值. 证明：$\mathcal{A}$可对角化当且仅当对所有的特征值$\lambda_i$，$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{Id})^2$与$\lambda_i$的特征子空间是同一个空间.

5a 解答. 一方面, 若 $\mathcal{A}$ 是可对角化的, 取它的一个矩阵表示是对角阵 $\Sigma=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 则对 $v\in\mathbb{C}^n$, $(\lambda I_n-\Sigma)^2v=0\iff diag((\lambda-\lambda_1)^2,\cdots,(\lambda-\lambda_n)^2)v=0$, λ 的特征空间和 $Ker((\lambda Id-\mathcal{A})^2)$ 都为 $Span\{e_i|\lambda=\lambda_i\}$.

另一方面, 若 $\forall i$, λ_i 的特征空间和 $Ker((\lambda_iId-\mathcal{A})^2)$ 都为 $Span\{e_j|\lambda_i=\lambda_j\}$. 则由 Jordan 标准型, 可以取它的一个矩阵表示是 $diag(J_{\lambda_{m_1}(n_1)},\cdots,J_{\lambda_{m_k}}(n_k))$.

若 $n_j\geq 2$, 则 $\exists l,(J-\lambda_{m_j}I_n)e_l=e_{l-1}$, 而 $(J-\lambda_{m_j}I_n)^2e_l=0$, 矛盾!

4、设方阵 $A=\begin{pmatrix} B & I_3 & I_3 \\ I_3 & B & I_3 \\ I_3 & I_3 & B \end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(1) 证明 A 可逆，并求 A^{-1}. (2) 求 A 的特征多项式和最小多项式.

—观察性质,不要硬求

4 解答. (1) 对于 B, $B=-I_n+(1,1,1)^{\top}(1,1,1)$, 所以 B 的相似标准型为 $diag(2,-1,-1)$. 有 $B^2-B-2I_3=O$. 假设 A^{-1} 具有与 A 类似的对称性, 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} C & D & D \\ D & C & D \\ D & D & C \end{pmatrix}$. 则 $BC+2D=I_3, BD+C+D=O$, 解得 $C=(B^2+B-2I_3)^{-1}(B+I_3)=\frac{1}{2}B^{-1}(B+I_3)=\frac{1}{4}(B+I_3), D=\frac{1}{4}(I_3-B)$.

(2) $\begin{pmatrix} I_3 & O & O \\ -I_3 & I_3 & O \\ -I_3 & O & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & I_3 & I_3 \\ I_3 & B & I_3 \\ I_3 & I_3 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_3 & O & O \\ I_3 & I_3 & O \\ I_3 & O & I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B+2I_3 & I_3 & I_3 \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} I_3 & \frac{1}{3}I_3 & \frac{1}{3}I_3 \\ O & I_3 & O \\ O & O & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B+2I_3 & I_3 & I_3 \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_3 & -\frac{1}{3}I_3 & -\frac{1}{3}I_3 \\ O & I_3 & O \\ O & O & I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B+2I_3 & O & O \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}$.

所以 A 的相似标准型为 $diag(4,1,1,1,-2,-2,1,-2,-2)$. 特征多项式为 $(x-1)^4(x+2)^4(x-4)$. 由于这个矩阵可以可以相似对角化, 所以最小多项式为 $(x-1)(x+2)(x-4)$.

4.2025

2 (15 分) 已知 $\mathbb{R}^5$ 中向量 $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1,1)^T$ 及 $\mathbf{a}_2=(1,2,3,4,5)^T$. 试给出一个齐次线性方程组, 使得 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 为该方程组的基础解系.

—基本问题,由基础解系反推方程

设齐次线性方程组为 $Ax=0$. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$. 基础解系为 a_1, a_2. 则 $\dim\operatorname{Ker}A=2\Rightarrow \operatorname{rank}A=3$

$Aa_1=0$. $Aa_2=0$. $\begin{cases} A_1+A_2+\cdots+A_5=0 \\ A_1+2A_2+\cdots+5A_5=0 \end{cases}\Rightarrow$ 解为 $t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 则可取 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ 2 & -3 & & 1 & \\ 3 & -4 & & & 1 \end{pmatrix}$

5b. (10 分) 求平面直角坐标系中的椭圆 $(x+y)^2+(2x+y)^2=1$ 的半长轴和半短轴长.

—椭圆 a.b 公式

解答. 椭圆方程 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$ (3 分)，矩阵特征值 $\lambda=\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$ (3 分)，

半轴长 $=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (4 分). □

6. (20 分) 设 $A\in F^{n\times n}$，$1\leqslant \operatorname{rank}(A)=r<n$. 证明：

(1) A 可在 F 上相似成 $\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 形式，其中 $B\in F^{r\times r}$.

(2) 对于 A 与 (1) 给出的 B, 它们的最小多项式满足关系式 $d_A(x)=xd_B(x)$.

证明. (1) 根据相抵标准形，存在 F 上的可逆方阵 P,Q，使得

$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$。 (8 分)

(2) 记 $M=\begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix}$，$d_B(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}b_ix^i$。一方面，由 $O=d_A(M)=\begin{pmatrix} d_A(B) & * \\ O & O \end{pmatrix}$，得 $d_A(x)$ 是 B 的化零多项式。故 $d_B(x)\mid d_A(x)$。 (3 分)

另一方面，由 $\sum\limits_{i=0}^{k}b_iM^{i+1}=\sum\limits_{i=0}^{k}b_i\begin{pmatrix} B^{i+1} & B^iC \\ O & O \end{pmatrix}=O$，得 $xd_B(x)$ 是 M 的化零多项式。故 $d_A(x)\mid xd_B(x)$。 (3 分)

当 $\det(B)\neq 0$ 时，$x\nmid d_B(x)$。由 $r<n$，得 $x\mid d_A(x)$。故 $d_A(x)=xd_B(x)$。 (3 分)

当 $\det(B)=0$ 时，$b_0=0$，$d_B(M)=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\begin{pmatrix} B^i & B^{i-1}C \\ O & O \end{pmatrix}$。注意到 $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ 是行满秩的。若 $d_B(M)=O$，则 $\sum\limits_{i=1}^{k}b_iB^{i-1}=O$，与 $d_B(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}b_ix^i$ 矛盾。故 $d_A(x)\neq d_B(x)$，只可能 $d_A(x)=xd_B(x)$。 (3 分) □

线代A2期中部分

2026.4.24

1.2025

设实线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的子空间 $V_1=\operatorname{Span}\{(x+1)^2,(x+2)^2\}$，$V_2=\operatorname{Span}\{(x+3)^2,(x+4)^2\}$. 写出 $V_1\cap V_2$ 的一个基 $\underline{2x^2+10x+11}$

$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=\mu_1g_1+\mu_2g_2$ 求解方程组

$5\mu_1=8\lambda_2+12\mu_2$

$3\mu_1=8\lambda_2+15\mu_2$

$\Rightarrow \mu_1=-3\mu_2$

$\mu_1=2\lambda_2+3\mu_2$

$\mu_2=1, \mu_1=-3$ $\lambda_2=\frac{\mu_1-3\mu_2}{2}=-3$

$\lambda_1=1$

$\Rightarrow$ 为 $(x+1)^2-3(x+2)^2$

$=x^2+2x+1-3x^2-12x-12=-2x^2-10x-11$

设实线性空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(X)=AX+XA$，其中 $A=J_n(0)$ 是 Jordan 块，则 $\operatorname{rank}\mathcal{A}=\underline{n^2-n}$.

$\operatorname{rank}\mathcal{A}=n-\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ $AX+XA=0\Rightarrow$ 各元 $(AX)_{ij}+(XA)_{ij}=0$ 对 X, 为 $X_{i+1,j}+X_{i,j-1}=0\Rightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的基: $E_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$ $E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\cdots E_n=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$

设 $\mathcal{A}$ 是任意线性空间 V 上的线性变换，则 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 与 $V/\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 同构.

—有限维时 ✓.

✗ 无限维时 $V=\mathbb{R}[x]$ $\mathcal{A}$ 为微分

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$AX=\begin{pmatrix} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$XA=\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$

3. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是有限维线性空间 V 上的线性变换. 求证：下列两个叙述等价.

① $V=\operatorname{Ker}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$. ② $\operatorname{rank}\mathcal{A}=\operatorname{rank}(\mathcal{AB})=\operatorname{rank}\mathcal{B}$.

3. (1) $V=\operatorname{Ker}\mathcal{A}+\operatorname{Im}\mathcal{B}\Rightarrow\operatorname{Im}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{AB}\Rightarrow\operatorname{rank}(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(\mathcal{AB})$. (5 分)

(2) $\operatorname{rank}(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(\mathcal{AB})\Rightarrow\operatorname{Im}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{AB}\Rightarrow\forall\alpha\in V$, $\exists\beta\in V$ 使 $\mathcal{A}\alpha=\mathcal{AB}\beta\Rightarrow$ $\alpha-\mathcal{B}\beta\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}\Rightarrow V=\operatorname{Ker}\mathcal{A}+\operatorname{Im}\mathcal{B}$. (5 分)

(3) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}\cap\operatorname{Im}\mathcal{B}=\{\mathbf{0}\}\Leftrightarrow\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{B}}$ 是单射 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\mathcal{AB})=\operatorname{rank}(\mathcal{B})$. (5 分)

2.2024

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$，$x\in\mathbb{R}^{3\times1}$，$x^Tx=1$，则 x^TAx 的最小值是 $\underline{\frac{1}{2}}$

[化对称，$B=\frac{1}{2}(A+A^T)$，$x^Tx=1$ 时 $(x^TBx)_{min}=(x^TAx)_{min}$ 为 B 最小特征值

1. 设 n 阶对称实方阵 $A=(a_{ij})$ 是正定的．证明：$\det(A)\leqslant\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_{kk}$．并给出等号成立的充分必要条件．

1. 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\alpha^T&a_{nn}\end{pmatrix}$．由 A 正定，可得 $\det(A)>0$，A_1 正定，A_1^{-1} 正定． (5 分)

故 $\det(A)=\det(A_1)(a_{nn}-\alpha^TA_1^{-1}\alpha)\leqslant\det(A_1)a_{nn}$，等号成立 $\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0}$． (5 分)

对 n 归纳，得 $\det(A)\leqslant a_{11}\cdots a_{nn}$，等号成立 $\Leftrightarrow A$ 是对角阵． (5 分)

得分	评卷人

一（本题20分）给定n阶方阵$A=(a_{ij})$，其中$a_{ij}=\begin{cases}j-i, & i<j\\0, & i\geq j\end{cases}$．求$A^3$的Jordan标准形.

$A=\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n-1\\&0&1&&\vdots\\&&0&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{pmatrix}$ 幂零指数为 n. 块数为 $n-\text{rank}A^3=3$. 若 $n=3k$. $N(k)=\text{rank}A^{3k+3}+\text{rank}A^{3k-3}-2\text{rank}A^{3k}=3$

若 $n=3k+1$. $N(k)=\text{rank}A^{3k+3}+\text{rank}A^{3k-3}-2\text{rank}A^{3k}=2$. $N(k+1)=1$

若 $n=3k+2$. $N(k)=\text{rank}A^{3k+3}+\text{rank}A^{3k-3}-2\text{rank}A^{3k}=1$. $N(k+1)=2$

A.B 3阶复方阵. $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)$. $d_A(x)=d_B(x)$ 证明：A与B相似. 举例对4阶不成立

特征值：3个1重：A.B对角. A~B

1个1重.1个2重：$\varphi_A(x)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$. $d_A(x)=$ $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ — $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{pmatrix}$；$(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$ — $\begin{pmatrix}\lambda_1&1&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{pmatrix}$ 即 A~B

反例：$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$

1个3重：$\varphi_A(x)=(\lambda-\lambda_1)^3$. $d_A(x)=$ $\lambda-\lambda_1$ — $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_1\end{pmatrix}$

$(\lambda-\lambda_1)^2$ — $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_1&1\\&&\lambda_1\end{pmatrix}$ 故A~B

$(\lambda-\lambda_1)^3$ — $\begin{pmatrix}\lambda_1&1&\\&\lambda_1&1\\&&\lambda_1\end{pmatrix}$

3.2023

1. (20 分) 设实二次型 $Q(x)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant4}(x_i+x_j)^2$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$．

(1) 求对称实方阵 S 使得 $Q(x)=x^TSx$．

(2) 求 $\dfrac{Q(x)}{x^Tx}$ 的取值范围． — $\dfrac{x^TSx}{x^Tx}$ 为特征值范围区间.

(3) 求所有实数 λ，使得 $Q(x)\geqslant\lambda x_1^2$，$\forall x$．

1. (1) $S=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$． (5 分)

(2) S 的特征值 $2,2,2,6$．$\dfrac{x^TSx}{x^Tx}$ 的取值范围 $[2,6]$． (5 分)

(3) $Q(x)\geqslant\lambda x_1^2\Leftrightarrow S-\lambda E_{11}$ 半正定 $\Leftrightarrow\det(S-\lambda E_{11})\geqslant0\Leftrightarrow\lambda\leqslant\dfrac{12}{5}$． (10 分)

直和：交为0.
加为整.

5. (15 分) 设实线性空间 $V_0=\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}\mid Ax=\mathbf{0}\}$，$V_1=\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}\mid Ax=x\}$，其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$．求证：$\mathbb{R}^{n\times1}=V_0\bigoplus V_1$．

5. 设 $\alpha\in V_0\cap V_1$，则 $\alpha=A\alpha=\mathbf{0}$． (5 分)

对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}^{n\times1}$，易验证 $\alpha-A\alpha\in V_0$，$A\alpha\in V_1$，故 $\alpha\in V_0+V_1$． (5 分)

综上，$\mathbb{R}^{n\times1}=V_0\bigoplus V_1$． (5 分)

4.2021

1.（10 分）设实线性空间 V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$n\geqslant3$，求向量组 $S=\{\alpha_i-\alpha_j\mid1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 的秩． — 求rank. 不一定用矩阵. 也可用定义.

1. 一方面，$\alpha_i-\alpha_j=(\alpha_1-\alpha_j)-(\alpha_1-\alpha_i)$．另一方面，若 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)+\cdots+\lambda_n(\alpha_1-\alpha_n)=(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\alpha_1-\lambda_2\alpha_2-\cdots-\lambda_n\alpha_n=\mathbf{0}$，则 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$．故 $\alpha_1-\alpha_2,\cdots,\alpha_1-\alpha_n$ 是 S 的极大线性无关组．因此，$\text{rank}(S)=n-1$．

5.2020

7. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换，$f,g\in\mathbb{F}[x]$ 互素．证明：

Bezout

$$\text{Ker}\,f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\text{Ker}\,f(\mathcal{A})\oplus\text{Ker}\,g(\mathcal{A}).$$

7. 根据 Bezout 定理，存在 $u,v\in\mathbb{F}[x]$，使得 $uf+vg=\gcd(f,g)=1$．

易知 $\text{Ker}\,f(\mathcal{A})$ 和 $\text{Ker}\,g(\mathcal{A})$ 都是 $\text{Ker}\,f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$ 的子空间．

对任意 $\alpha\in\text{Ker}\,f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$，有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1=u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha\in\text{Ker}\,g(\mathcal{A})$，$\alpha_2=v(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha\in\text{Ker}\,f(\mathcal{A})$．故 $\text{Ker}\,f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\subset\text{Ker}\,f(\mathcal{A})+\text{Ker}\,g(\mathcal{A})$．

特别，当 $\alpha\in\text{Ker}\,f(\mathcal{A})\cap\text{Ker}\,g(\mathcal{A})$ 时，由 $\alpha_1=\alpha_2=0$，得 $\alpha=0$．

综上，$V=\text{Ker}\,f(\mathcal{A})\bigoplus\text{Ker}\,g(\mathcal{A})$．

线代A2期末部分

2026.4.24

1.2025

1. 设 H 是 Hermite 阵，则 iH 是__B,C__（选出所有正确的选项）. —规范方阵：$A^HA=AA^H$

(A) Hermite 方阵 (B) 反 Hermite 方阵 (C) 规范方阵 (D) 以上都不对

tip: Hermite阵不是酉方阵

3. 设实内积空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的内积 $(X,Y)=\mathrm{tr}(X^TY)$，其上线性变换 $\mathscr{A}(X)=PXP^{-1}$，其中 $P=J_n(1)$ 是 Jordan 块. 求 $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$.

伴随变换：$(\mathscr{A}(x),y)=(x,\mathscr{A}^*(y))$

解答： $(\mathscr{A}(X),Y)=\mathrm{tr}(P^{-T}X^TP^TY)=\mathrm{tr}(X^TP^TYP^{-T})$. 得 $\mathscr{A}^*(Y)=P^TYP^{-T}$. (5 分)

(1) 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$\alpha\in V$ 使得 $V=\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha$. 求证：对于任意 $\mathscr{A}$-不变子空间 U，存在 $\beta\in U$ 使得 $U=\mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$.

证明： 若 $U=\{\mathbf{0}\}$，取 $\beta=\mathbf{0}$. 下设 $U\neq\{\mathbf{0}\}$. 任意 $u\in U$ 形如 $u=f_u(\mathcal{A})\alpha$，$f_u\in\mathbb{F}[x]$. 设 $\mathbf{0}\neq\beta\in U$ 使得 $\deg(f_\beta)$ 最小. 下证 $f_\beta\mid f_u$，$\forall u\in U$. 从而 $u\in\mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$. (9 分)

否则存在 $u\in U$ 使得 $g=\gcd(f_\beta,f_u)$，$\deg(g)<\deg(f_\beta)$. 设 $v=g(\mathscr{A})\alpha$. 根据 Bezout 定理，$v=\lambda(\mathscr{A})u+\mu(\mathscr{A})\beta\in U$. 与 $\deg(f_\beta)$ 的最小性矛盾. (6 分)

2.2024

得分	评卷人

四、（本题20分）设Euclid空间$V=\mathbb{R}^{3\times3}$的内积$(X,Y)=Tr(X^TSY)$，其中$S=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. 设$V$上的线性变换$\mathcal{A}(X)=XA$, 这里$A\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

正交变换：$(\mathscr{A}x,\mathscr{A}y)=(x,y)$

(1) 求所有A使得$\mathcal{A}$是正交变换;

(2) 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}$，求$\mathcal{A}$的伴随变换.

四 (1) $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Leftrightarrow$ $(XA,YA)=(X,Y)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(A^TX^TSYA)=\mathrm{Tr}(X^TSY)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(AA^TX^TSY)=\mathrm{Tr}(X^TSY)$. 由 X^TSY 可取遍 V，得 $AA^T=I$. (10 分)

(2) $(\mathcal{A}(X),Y)=(X,\mathcal{A}^*(Y))$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(A^TX^TSY)=\mathrm{Tr}(X^TS\mathcal{A}^*(Y))$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(X^TSYA^T)=\mathrm{Tr}(X^TS\mathcal{A}^*(Y))$. 由 X^TS 可取遍 V，得 $\mathcal{A}^*(Y)=YA^T$. (10 分)

得分	评卷人

五、（本题20分）设$A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$都是实对称半正定方阵. 证明: $Tr((A+B)^3)\geq Tr(A^3)+Tr(B^3)$.

即只需证积是对称的

实对称的积≠实对称

半正定（一定是对称的）之积在AB=BA时半正定

（看特征值均≥0）

五 由 $(A+B)^3=A^3+A^2B+ABA+BA^2+AB^2+BAB+B^2A+B^3$, (6 分)

得 $\mathrm{Tr}(A+B)^3-\mathrm{Tr}(A^3)-\mathrm{Tr}(B^3)=3\,\mathrm{Tr}(ABA+BAB)$, (8 分)

其中 ABA 和 BAB 都是实对称半正定方阵，$\mathrm{Tr}(ABA+BAB)\geqslant 0$. (6 分)

得分	评卷人

六、（本题20分）设n维Euclid空间V上的线性变换$\mathcal{A}$满足: 若$(\alpha,\beta)=0$, 则$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=0$. 求证：存在$V$上的正交变换$\mathcal{P}$和实数$\lambda$使得$\mathcal{A}=\lambda\mathcal{P}$.

对任意的$\mathscr{A}$证明. 先挑出特殊的$\mathscr{A}$如0.

六 不妨设 $\mathcal{A}\neq\mathcal{O}$，则存在非零向量 $u\in V$ 使得 $\lambda=\dfrac{|\mathcal{A}u|}{|u|}>0$.

对于任意 $v\in V$，设 $\alpha=v+\dfrac{|v|}{|u|}u$，$\beta=v-\dfrac{|v|}{|u|}u$，

则 $(\alpha,\beta)=0\Rightarrow(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=0\Rightarrow|\mathcal{A}v|=\lambda|v|$.

从而，$\mathcal{P}=\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ 是正交变换.

3.2023

1. (10 分) 陈述欧氏空间上的线性变换是规范变换的三个等价条件.

解答： 设 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}\in L(V)$ 的伴随变换. $\mathscr{A}$ 是规范变换的等价条件有

① $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$. ② $|\mathscr{A}\alpha|=|\mathscr{A}^*\alpha|$，$\forall\alpha\in V$. ③ $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\mathscr{A}^*\alpha,\mathscr{A}^*\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$.

④ $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵 A 是规范方阵. (每个条件 3.3 分)

5. (10 分) 设欧氏空间 $V=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 上的内积为

$$(f,g)=\int_0^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

试求线性变换 $\mathscr{A}:f(x)\mapsto f'(x)$ 的伴随变换.

解法 2： 取 V 的基 $1,x,x^2$. 度量矩阵 $G=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&24\end{pmatrix}$. $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\\\hline 1&-1&1\\&1&-2\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 即 $(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\&1&-2\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 为标准正交基

作相合变换，得标准正交基 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=x-1$，$\alpha_3=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

$\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下矩阵表示 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$\mathscr{A}^*:\alpha_1\mapsto\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_2\mapsto\alpha_3$，$\alpha_3\mapsto 0$. $(0,1,x-2)=(1,x-1,\frac{1}{2}x^2-2x+1)A$. 在标正基下伴随变换的矩阵为$A^T$

8. (10 分) 设 n 阶实对称方阵 $A=(a_{ij})$ 满足条件 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

证明：A 是正定矩阵.

设λ为A的一个特征值. $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$为其特征向量. $Ax=\lambda x$, 设$|x_k|=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$. 有$|x_k|>0$.

有$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=\lambda x_k\Rightarrow(\lambda-a_{kk})x_k=\sum\limits_{j\neq k}a_{kj}x_j\Rightarrow|\lambda-a_{kk}|\cdot|x_k|=|\sum\limits_{j\neq k}a_{kj}x_j|\leq|x_j|\cdot|\sum\limits_{j\neq k}a_{kj}|\leq|x_k|\cdot|\sum\limits_{j\neq k}a_{kj}|\Rightarrow|\lambda-a_{kk}|\leq|\sum\limits_{j\neq k}a_{kj}|$

又$a_{kk}\geq\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|\Rightarrow\lambda\geq a_{kk}-|\lambda-a_{kk}|>0$. 即$A$特征值均正. 正定. 证毕