线性代数复习

tip：此复习笔记为备考2026暑期夏令营而创，按章进行，每章内容分为知识点&例题部分与习题&参考部分，每天一节，先整理一章知识点后再统一做习题工作。知识点会包含书中全部定义与定理，重要程度用例分辨概念；习题&参考部分包含书中习题，复习时先只看教材习题，其余在后续参考。

第一章 线性方程组的解法

知识点&例题

定义 1.1.2 设 F 是复数集合的子集，包含 0 和 1，并且在加、减、乘、除运算下封闭(做除法时除数不为 0)，就称 F 是**数域**(number field)． □

定义 1.2.1 对任意正整数 m，n，由数域 F 中 $m\times n$ 个数排成 m 行、n 列所得到的数表，称为 F 上的 $m\times n$ **矩阵**(matrix)．数表中的每个数称为矩阵的一个**元**(element)，也称为矩阵的一个**分量**(entry)，其中排在第 i 行第 j 列的数称为矩阵的第(i,j)元或第(i,j)分量．F 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合记作 $F^{m\times n}$． □

定义 1.2.2 由数域 F 中 n 个数 a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$排成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 F 上的 n **维向量**(n - dimensional vector)，也称 n 维数组向量，a_i 称为它的第 i 分量．所有分量都为 0 的向量$(0,\cdots,0)$称为**零向量**(zero vector)，记作 $\mathbf{0}$．F 上全体 n 维向量组成的集合称为 F 上的 n **维向量空间**(n - dimensional vector space)，记作 F^n． □

定义 1.2.4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $F^{m\times n}$中的两个矩阵．如果 $\boldsymbol{B}$ 的每一行都是 $\boldsymbol{A}$ 的行的线性组合，$\boldsymbol{A}$ 的每一行也是 $\boldsymbol{B}$ 的行的线性组合，就称两个矩阵**行等价**(row equivalent)． □

定理 1.2.1 设 F 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过以下变形之一变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价：

1. 将某两行互换位置；
2. 用 F 中某个非零的数乘以某行；
3. 将某行的常数倍加到另一行上． □

定理 1.2.5 定理 1.3.1 中所说的三类变形称为矩阵的**初等行变换**(elementary transformation of rows)．

定理 1.3.1 如果齐次线性方程组的未知数个数大于方程个数，则齐次方程组有非零解，从而有无穷多组解． □

教材习题

第二章 线性空间

知识点&例题

2.1 线性相关与线性无关

1. 线性相关(无关)的定义

定义 2.1.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是数域F 上的 n 维向量，如果存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

就称向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$**线性相关**(linearly dependent)．

反过来，如果对于$\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$，

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$$

就称向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$**线性无关**(linearly independent)． □

例：u_1,u_2,u_3 线性无关，u_1+u_2,u_2+u_3,u_3+u_1 之秩？

解：rank( )=3 线性无关．

定理 2.1.1 设 $m\geqslant 2$，则：

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是其余向量的线性组合．

定理 2.1.2 向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性相关⇔其中某个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是它前面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j<i)$的线性组合．

推论 2.1.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是由非零向量组成的向量组，其中每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(2\leqslant i\leqslant m)$都不是它前面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(1\leqslant j<i)$的线性组合，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关． □

定理 2.1.3 如果向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$包含一个子集$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}\}$线性相关，那么整个向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性相关．如果向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关，那么它的每个子集都线性无关．

2. 利用解线性方程组判定线性相关(无关)

定理 2.1.4 设 F^n 中的向量$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 线性无关．如果在每个 $\boldsymbol{u}_j=(a_{1j},\cdots,a_{nj})(1\leqslant j\leqslant m)$上再任意添加一个分量成为 F^{n+1}中的一个向量$\boldsymbol{v}_j=(a_{1j},\cdots,a_{nj},a_{n+1,j})$，那么所得到的向量组$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 线性无关．

3. n 维空间中线性无关向量的最大个数

定理 2.1.5 设$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 是n 维向量空间 F^n 中的 m 个向量．如果 $m>n$，则$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 线性相关．

推论 2.1.2 n 维数组空间 F^n 中线性无关的向量最多有 n 个． □

F^n 中线性无关向量的最大个数是 n，这就是 F^n 被称为 n 维空间的原因．

定理 2.1.6 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量空间 F^n 中任意 n 个线性无关的向量，则F^n 中任何一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都能够写成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合的形式

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

并且其中的系数$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 唯一确定．

4. 无限集合的线性组合与线性相关

定义 2.1.2 设 V 是 F 上的线性空间，S 是 V 的任意子集，则

(1) S 的任一有限子集 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$的任一线性组合

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$$

称为 S 的线性组合．

(2) 如果 S 的某个有限子集 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$线性相关，就称 S 线性相关． □

2.2 向量组的秩

1. 极大线性无关组

定义 2.2.1 设 V 是数域 F 上的向量空间，S 是 V 中的向量组成的向量组．如果 S 的子集 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关，并且将 S 任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 添加在 M 上所得的向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}\}$线性相关，就称 M 是 S 的**极大线性无关组**(maximal linearly independent system)． □

命题 2.2.1 设 S 是同一向量空间中的向量组成的向量组，$M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$是 S 的线性无关子集，则

M 是 S 的极大线性无关组⇔S 中所有的向量都是 M 的线性组合．

命题 2.2.2 设 S 是 F 上 n 维向量空间 F^n 的子集，则 S 的任一线性无关子集 S_0 都能扩充为 S 的一个极大线性无关组 M．

算法 2.2.1 求 F^n 中有限个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 组成的向量组的极大线性无关组．

(1) 将各向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 写成列向量的形式，依次以它们为各列排成矩阵 $\boldsymbol{A}$．

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换化成如下的阶梯形

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\cdots0 & b_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & b_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & & \ddots & \cdots & \cdots\\ & & & & & b_{rj_r} & \cdots\\ & & & & & & O\end{pmatrix}$$

其中 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$，而 b_{1j_1}，b_{2j_2}，$\cdots$，b_{rj_r}都不为 0．

于是 $\boldsymbol{B}$ 的第$j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列组成 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，相应地，$\boldsymbol{A}$ 的第$j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$组成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组．

例 2 求向量 —求极大线性无关组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,-5,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,-3,-19,6)$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(3,6,-3,-24,7)$

组成的向量组 S 的一个极大线性无关组．

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\2&2&4&1&6\\0&3&-3&1&-3\\-5&4&-19&1&-24\\1&-3&6&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2，4 列组成 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组，因此$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$是 S 的一个极大线性无关组． □

2. 向量组的等价，秩

定义 2.2.2 设 S_1 与 S_2 是同一个向量空间 V 中的两个向量组．如果 S_2 中的每个向量都是 S_1 中的向量的线性组合，就称 S_2 是 S_1 的线性组合．如果 S_1 与 S_2 互为线性组合，就称 S_1 与 S_2 **等价**(equivalent)．

向量组的线性组合具有传递性，也就是说：

命题 2.2.3 如果数域 F 上的向量组 S_2 是 S_1 的线性组合，S_3 是 S_2 的线性组合，那么 S_3 是 S_1 的线性组合．

定理 2.2.4 向量组 S 与它的任一极大线性无关组 S_1 等价．S 中任意两个极大线性无关组 S_1 与 S_2 等价．

定理 2.2.5 设 $S_2=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s\}$是 $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_t\}$的线性组合，并且 $s>t$，则 S_2 线性相关．

推论 2.2.2 如果 $S_2=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s\}$是 $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_t\}$的线性组合，并且 S_2 线性无关，则 $s\leqslant t$． □

推论 2.2.3 如果线性无关向量组 $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s\}$与 $S_2=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_t\}$等价，那么它们所含向量个数 s 与 t 相等．特别，同一向量组 S 的两个极大线性无关子集 S_1，S_2 所含向量个数相等． □

定义 2.2.3 任一向量组 S 的任一极大线性无关组所含向量个数 r 称为向量组 S 的**秩**(rank)，记作 rank S．

任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为这个矩阵的**行秩**(row rank)，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**(column rank)． □

推论 2.2.4 设向量组 S 的秩为 r，则 S 的任何一个线性无关子集 S_1 中所含向量个数不超过 r． □

定理 2.2.6 如果向量组 S_2 是 S_1 的线性组合，则 rank $S_2 \leqslant$ rank S_1. 等价的向量组秩相等.

定理 2.2.7 初等行变换不改变矩阵的列秩. □

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩不一定要通过求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列秩来实现，仍然可以通过对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换来实现. 我们有：

定理 2.2.8 初等行变换不改变矩阵的行秩. □

定理 2.2.9 任意矩阵的行秩与列秩相等.

2.3 子空间

定义 2.2.4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**(rank)，记作 rank $\boldsymbol{A}$. □

1. 子空间的定义

定理 2.3.1 齐次线性方程组(2.3.1)的解集 W 具有如下性质：

性质 1 如果 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y} \in W$，则 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \in W$.

性质 2 如果 $\boldsymbol{X} \in W$，则对任意 $\lambda \in F$ 有 $\lambda \boldsymbol{X} \in W$.

定义 2.3.1 向量空间 F^n 的非空子集 W 如果满足以下两个条件：

(1) $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$，

(2) $\boldsymbol{u} \in W$，$\lambda \in F \Rightarrow \lambda \boldsymbol{u} \in W$，

就称 W 是 F^n 的**子空间**(subspace). 如果 F^n 的子空间 W_1 是子空间 W_2 的子集，则称 W_1 是 W_2 的子空间. □

命题 2.3.2 设 W 是 F^n 的子空间. 则 W 中任意有限个向量 $\boldsymbol{u}_1$，…，$\boldsymbol{u}_k$ 的任意线性组合 $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1+\cdots+\lambda_k \boldsymbol{u}_k$ 含于 W，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k \in F$.

2. 基与维数

定义 2.3.2 设 W 是 F^n 的子空间. 如果 W 中存在 r 个线性无关向量，并且任意 $r+1$ 个向量线性相关，就称 W 的**维数**(dimension)为 r，记为 dim $W=r$.

定理 2.3.3 设 W 是 F^n 的子空间. $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\} \subset W$，则

(1) M 是 W 的基 $\Leftrightarrow M$ 是 W 的极大线性无关组.

(2) W 的基 M 所含向量个数 $|M|=\dim W$.

推论 2.3.1 F^n 的子空间 W 的所有的基所含向量个数相等，等于向量组 W 的秩 rank W. rank $W=\dim W$. □

推论 2.3.2 设 F^n 的子空间 W 的维数为 r，则 W 中任意一个线性无关子集 S 都能扩充为 W 的一组基，S 所含向量个数都不超过 r. 如果 W_0 是 W 的子空间，则 W_0 的任何一组基都能扩充为 W 的基，$\dim W_0 \leqslant \dim W$，且 $W_0=W \Leftrightarrow \dim W_0=\dim W$.

定理 2.3.4 设 F^n 的子空间 W 的维数为 r. $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\} \subset W$，则

M 线性无关 $\Leftrightarrow M$ 是 W 的基 $\Leftrightarrow W$ 中所有的向量都是 M 的线性组合.

3. 齐次线性方程组解空间的维数

定理 2.3.5 设数域 F 上 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则它的解空间的维数

$$\dim V_A=n-\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$$

可以理解为

解空间的维数 = 未知数个数 − 线性无关的方程的最大个数

定义： 齐次线性方程组的解空间的一组基称为这个方程组的一个**基础解系**(system of fundamental solutions).

例 2 已知 F^5 中的向量

—反解方程组

$$\boldsymbol{X}_1=(1,2,3,4,5),\quad \boldsymbol{X}_2=(1,3,2,1,2)$$

求一个齐次线性方程组，使 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 组成这个方程组的基础解系.

解 设

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4+a_{i5}x_5=0$$

是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$中的任意一个方程. 将 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的坐标代入得

$$\begin{cases} a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+4a_{i4}+5a_{i5}=0 \\ a_{i1}+3a_{i2}+2a_{i3}+a_{i4}+2a_{i5}=0 \end{cases} \tag{2.3.22}$$

将(2.3.22)看作以 a_{i1}，a_{i2}，a_{i3}，a_{i4}，a_{i5}为未知数的线性方程来解. 此方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

就是以 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 为行向量组成的矩阵. 对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

方程组(2.3.22)化为

$$\begin{cases} a_{i1}=-5a_{i3}-10a_{i4}-11a_{i5} \\ a_{i2}=\quad a_{i3}+3a_{i4}+3a_{i5} \end{cases}$$

因此

$$(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5})=(-5a_{i3}-10a_{i4}-11a_{i5},a_{i3}+3a_{i4}+3a_{i5},a_{i3},a_{i4},a_{i5})$$
$$=a_{i3}(-5,1,1,0,0)+a_{i4}(-10,3,0,1,0)+a_{i5}(-11,3,0,0,1).$$

方程组(2.3.22)的一组基础解系是

$$(-5,1,1,0,0),\ (-10,3,0,1,0),\ (-11,3,0,0,1).$$

以这组基础解系为各行组成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 rank $\boldsymbol{A}=3$. 以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0 \\ -10x_1+3x_2+x_4=0 \\ -11x_1+3x_2+x_5=0 \end{cases} \tag{2.3.23}$$

的解空间的维数为 $5-\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=5-3=2$. 而 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 是方程组(2.3.23)的两个线性无关解，因此组成(2.3.23)的基础解系.

因此，方程组(2.3.23)符合要求. □

4. 子集生成的子空间

定理 2.3.6 F^n 的任意非空子集 S 的全体线性组合组成的集合$V(S)$是 F^n 的子空间. F^n 的子空间如果包含 S，必然包含 $V(S)$.

定义 2.3.3 F^n 的非空子集 S 的全体线性组合组成的子空间，称为 S **生成的子空间**(subspace generated by S)，记作 $V(S)$. 当 S 是有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$ 时，也将 $V(S)$记作 $V(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$. □

2.4 非齐次线性方程组

1. 非齐次线性方程组有解的条件

定理 2.4.1 线性方程组(2.4.1)有解$\Leftrightarrow$它的系数矩阵与增广矩阵的秩相等. □

2. 非齐次线性方程组解集的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

定理 2.4.2 任意取定非齐次线性方程组(2.4.1)的一个特解 $\boldsymbol{\eta}$，则(2.4.1)的通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y}$ 是与(2.4.1)对应的齐次线性方程组(2.4.5)的通解. □

定理 2.4.3 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是数域 F 上的非齐次线性方程组(2.4.1)的一个特解，$\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$是对应的齐次线性方程组(2.4.5)的一个基础解系. 则非齐次线性方程组(2.4.1)的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}+t_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$$

其中$t_1,\cdots,t_{n-r}$是 F 中的任意常数. □

例 3 设 4 元线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 rank $\boldsymbol{A}=3$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是它的 3 个解，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\quad 5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

求这个线性方程组的通解.

断非齐次

解 以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 V_A 的维数 $\dim V_A=4-\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=4-3=1$. 如果原方程组是齐次线性方程组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是它的解，都在 1 维空间 V_A 中. 但 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，不在同一个 1 维子空间中. 因此原方程组是非齐次线性方程组.

找通解

原线性方程组的任意两个解的差是对应的齐次线性方程组的解，含于 V_A. 因此 V_A 包含 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$，从而包含它们的线性组合

$$\boldsymbol{X}_1=5(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)-2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=(5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)-3\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \square$$

2.5 一般的线性空间

定义 2.5.1 设 V 是一个非空集合，F 是一个数域. 如果满足了以下两个条件，则 V 称为 F 上的**线性空间**(linear space)，也称为**向量空间**(vector space)，V 中的元素称为**向量**(vector)，F 中的数称为**标量**(scalar). 有时候，为了强调 V 是 F 上的线性空间，也将 V 记为$V(F)$.

1. 向量组的线性组合、子空间

定理 2.5.2 设 V 是 F 上的线性空间，S 是 V 的任意子集，则 S 的任一有限子集 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$的任一线性组合

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$$

(其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k \in F$)称为 S 的**线性组合**. 如果 V 中的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以写成 V 的子集 S 的线性组合，也称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 S 线性表出.

S 的全体线性组合的集合记作$V(S)$. □

定义 2.5.3 设 V 是数域 F 上的线性空间，W 是 V 的非空子集. 如果 W 对 V 中的加法和数乘运算封闭，也就是满足如下条件：

(1) $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in W \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in W$；

(2) $\boldsymbol{\alpha} \in W$，$\lambda \in F \Rightarrow \lambda\boldsymbol{\alpha} \in W$，

就称 W 是 V 的**子空间**. □

命题 2.5.1 设 V 是数域 F 上的线性空间，W 是 V 的子空间. 则

(1) W 对于 V 的加法和数乘运算构成 F 上的线性空间.

(2) 对 V 的任意子集 S，$V(S)$构成 V 的子空间.

如果 V 的子空间 W 包含 S，则 W 包含$V(S)$. 因此，$V(S)$是 V 中包含 S 的最小子空间. $V(S)$称为由集合 S **生成的子空间**，S 称为子空间$V(S)$的一组**生成元**(generators). □

定义 2.5.4 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 与 T 都是 V 的子集. 如果 T 中每个元素都是 S 的线性组合，就称 T 是 S 的线性组合. 如果 S 与 T 互为线性组合，就称 S 与 T **等价**. □

命题 2.5.2 (1) T 是 S 的线性组合$\Leftrightarrow V(T) \subseteq V(S)$.

(2) S 与 T 等价$\Leftrightarrow V(S)=V(T)$.

(3) 如果 S_2 是 S_1 的线性组合，且 S_3 是 S_2 的线性组合，则 S_3 是 S_1 的线性组合.

(4) 如果 S_1 与 S_2 等价，且 S_2 与 S_3 等价，则 S_1 与 S_3 等价.

2. 线性相关与线性无关

定义 2.5.5 设 V 是 F 上的线性空间，S 是 V 的任意子集. 如果对 S 的某个有限子集 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$，存在 F 中不全为 0 的数$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 满足条件

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

就称 S **线性相关**.

反过来，如果对 S 的每个有限子集$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$，$F$ 中满足条件

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

的数$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 只有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$，就称 S **线性无关**. □

定理 2.5.3 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的任一非空子集. 则

S 线性相关$\Leftrightarrow S$ 中某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是其余向量的线性组合.

有限向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$线性相关$\Leftrightarrow$其中某个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是它前面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j<i)$ 的线性组合. 如果这个有限向量组 S 中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$，并且每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$都不是它前面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j<i)$的线性组合，那么 S 线性无关. □

3. 极大线性无关组与秩

定义 2.5.6 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的子集．如果 S 的子集 M 线性无关，并且将 S 任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 添加在 M 上所得的集合 $S_1=M\cup\{\boldsymbol{\alpha}\}$ 线性相关，就称 M 是 S 的**极大线性无关组**．

命题 2.5.4 设 M 是 S 的线性无关子集．则

M 是 S 的极大线性无关组 $\Leftrightarrow S$ 中所有的向量都是 M 的线性组合 $\Leftrightarrow M$ 与 S 等价． □

命题 2.5.5 V 的任意子集 S 的任意两个极大线性无关组等价． □

定理 2.5.6 设 V 是数域 F 上的线性空间，V 的有限子集 $S_2=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s\}$ 是 $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 的线性组合．如果 $s>n$，则 S_2 线性相关．反过来，如果 S_2 线性无关，则 $s\leqslant n$．

如果线性无关向量组 $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s\}$ 与 $S_2=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_t\}$ 等价，那么它们所含向量个数 s 与 t 相等．

如果 V 中的向量组 S 有一个有限的极大线性无关组 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$，其中所含向量个数为 r，那么 S 的任一线性无关子集 S_1 所含向量个数 $|S_1|\leqslant r$；S 的任一线性无关子集可以扩充为一个极大线性无关组；S 的所有的极大线性无关组所含向量个数都等于 r． □

定义 2.5.7 如果向量组 S 有一个极大线性无关组 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 由有限个向量组成，则 M 中所含向量个数 r 称为**向量组 S 的秩**，记作 rank S． □

命题 2.5.7 如果向量组 S_2 是 S_1 的线性组合，则 rank $S_2\leqslant$ rank S_1．等价的向量组秩相等． □

4. 维数、基与坐标

定义 2.5.8 设 V 是数域 F 上的线性空间．

（1）如果 V 可以由某个有限子集 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 生成，即 $V=V(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，就称 V 是**有限维线性空间**(finite-dimensional linear space)．此时 V 中线性无关的向量个数不超过 n，rank $V\leqslant n$．

（2）如果 V 中存在 n 个线性无关向量，并且任意 $n+1$ 个向量线性相关，就称 V 的**维数**(dimension)为 n，记为 dim $V=n$．

（3）如果 V 中存在一组向量 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，使 V 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 在 F 上的线性组合

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{2.5.4}$$

并且其中的系数 $x_1,\cdots,x_n$ 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 唯一决定，则 M 称为 V 的**一组基**．$\boldsymbol{\alpha}$ 的线性组合表达式(2.5.4)中的系数组成的有序数组 $(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 M 下的**坐标**． □

定理 2.5.8 设 V 是数域 F 上的有限维线性空间，由某个有限子集 S 生成．则

（1）S 的极大线性无关组 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基．M 也是 V 的极大线性无关组，dim V = rank V = rank $M=n$．

（2）V 的子集合 M 是 V 的基 $\Leftrightarrow M$ 是 V 的极大线性无关组．

（3）V 的所有的基所含向量个数都相等，等于 dim W．

（4）V 的任何一组线性无关向量 $S=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$ 所含向量个数 $m\leqslant$ dim V，S 可以扩充为 V 的一组基． □

定义 2.5.9 如果数域 F 上线性空间 V 中存在无限多个线性无关的向量，就称 V 是**无穷维空间**(infinite-dimensional space)． □

2.6 同构与同态

定义 2.6.1 设 V_1，V_2 是数域 F 上两个线性空间．如果存在一一映射 σ：$V_1\to V_2$，满足条件

（1）$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$；

（2）$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，$\lambda\in F$，

就称线性空间 V_1 与 V_2 **同构**(isomorphic)，称 σ 是 V_1 到 V_2 的**同构映射**(isomorphism)．特别，如果 $V_1=V_2$，则 σ 称为 V_1 的**自同构**(automorphism)． □

命题 2.6.1 设 σ：$V_1\to V_2$ 是 F 上线性空间之间的同构映射，则

（1）σ 将 V_1 的零向量 $\mathbf{0}_1$ 映到 V_2 的零向量 $\mathbf{0}_2$．

（2）σ 将每个 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量映到 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 的负向量：$\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$；

（3）V_1 的子集合 S 线性相关(无关)$\Leftrightarrow\sigma(S)$ 线性相关(无关)；

（4）M 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow\sigma(M)$ 是 V_2 的基；

（5）同构的空间维数相等：如果 V_1 是有限维线性空间，则 dim V_1 = dim V_2．

例 2 设 V 是 F 上有限维线性空间，$M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 V 的一组基，$M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 V 的另一组基．已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 在 M_1 下的坐标分别是 $\boldsymbol{\Pi}_1=(1,1,-1)$，$\boldsymbol{\Pi}_2=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\Pi}_3=(-1,1,1)$．$\boldsymbol{\alpha}\in V$ 在 M_1 下的坐标是 $(1,3,5)$．求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 M_2 下的坐标．

解 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 M_2 下的坐标为 (x,y,z)，则

$$\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\beta}_1+y\boldsymbol{\beta}_2+z\boldsymbol{\beta}_3 \tag{2.6.1}$$

将 V 中每个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在 M_1 下的坐标记作 $\sigma(\boldsymbol{\beta})$，则 σ：$V\to F^3$ 是线性空间之间的同构映射．在等式(2.6.1)两边用 σ 作用，也就是将(2.6.1)中所有的向量用它们在基 M_1 下的坐标代替，得到

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=x\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)+y\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)+z\sigma(\boldsymbol{\beta}_3)$$

即

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

解此线性方程组得

$$(x,y,z)=(2,3,4)\quad\square$$

5. 已知 F^5 中的向量

$$X_1=(1,2,3,4,5),\quad X_2=(1,-1,1,-1,1),\quad X_3=(1,2,4,8,16).$$

求一个齐次线性方程组，使 X_1，X_2，X_3 组成这个方程组的基础解系．

$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0.\\ a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0\\ a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0\end{cases}$ 解得基础解系 $\alpha_1=(6,1,-4,1,0)$. $\alpha_2=(16,6,-11,0,1)\Rightarrow\begin{cases}6x_1+x_2-4x_3+x_4=0\\16x_1+6x_2-11x_3+x_5=0.\end{cases}$

X_1,X_2,X_3 为此方程组线性无关解. 有 $\dim V_A=5-2=3$, 故为基础解系.

定理 2.6.2 同一数域 F 上同一维数 n 上的任何两个线性空间相互同构．

定义 2.6.2 设 V_1，V_2 是数域 F 上两个线性空间．如果存在映射 φ：$V_1\to V_2$，满足条件

（1）$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta})$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$；

（2）$\varphi(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\varphi(\boldsymbol{\alpha})$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\lambda\in F$，

就称 φ 是 V_1 到 V_2 的**同态映射**(homomorphism)． □

命题 2.6.3 设 φ：$V_1\to V_2$ 是 F 上线性空间之间的同态映射，则

（1）φ 将 V_1 的零向量 $\mathbf{0}_1$ 映到 V_2 的零向量 $\mathbf{0}_2$；

（2）φ 将每个 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量映到 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ 的负向量：$\varphi(-\boldsymbol{\alpha})=-\varphi(\boldsymbol{\alpha})$；

（3）V_1 的子集合 S 线性相关 $\Rightarrow\varphi(S)$ 线性相关．

2.7 子空间的交与和

1. 子空间的交

定理 2.7.1 设 W_i $(i\in I)$ 是 F 上线性空间 V 的任意一组子空间，

$$U=\bigcap_{i\in I}W_i=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in W_i,\ \forall\,i\in I\}$$

是这些子空间的交．则 U 是 V 的子空间．

2. 子空间的和

定义 2.7.1 设 V 是 F 上线性空间，$W_1,\cdots,W_t$ 是 V 的子空间．定义

$$W_1+\cdots+W_t=\{\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_t\mid\boldsymbol{\beta}_i\in W_i,\ \forall\,1\leqslant i\leqslant t\}$$

称为子空间 $W_1,\cdots,W_t$ 的和(sum)． □

命题 2.7.2 设 V 是数域 F 上线性空间，$W_1,\cdots,W_t$ 是 V 的子空间．则

（1）$W_1+\cdots+W_t$ 是子空间．

（2）$W_1+\cdots+W_t$ 是包含 $W_1\cup\cdots\cup W_t$ 的最小子空间．

（3）取每个 W_i $(1\leqslant i\leqslant t)$ 的一组基，则 $M_1\cup\cdots\cup M_t$ 生成的子空间等于 $W_1+\cdots+W_t$．

（4）dim $(W_1+\cdots+W_t)\leqslant$ dim $W_1+\cdots+$ dim W_t．

3. 子空间和的维数

定理 2.7.3 设 W_1,W_2 是 V 的子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

推论 2.7.1 设 W_1,W_2 是 V 的子空间，则

$$\dim(W_1\cap W_2)\geqslant\dim W_1+\dim W_2-\dim V.$$

特别，当 dim W_1 + dim W_2 > dim V 时有 $W_1\cap W_2\neq0$． □

推论 2.7.2 dim (W_1+W_2) = dim W_1 + dim $W_2\Leftrightarrow W_1\cap W_2=0$． □

推论 2.7.3 dim $(W_1+\cdots+W_t)$ = dim $W_1+\cdots+$ dim $W_t\Leftrightarrow(W_1+\cdots+W_i)\cap W_{i+1}=0$ 对 $1\leqslant i\leqslant t-1$ 成立． □

4. 子空间的直和

定义 2.7.2 设 $W_1,\cdots,W_t$ 是线性空间 V 的子空间，$W=W_1+\cdots+W_t$．如果 W 中每个向量 $\boldsymbol{w}$ 的分解式

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_t,\quad\boldsymbol{w}_i\in W_i,\quad\forall\,1\leqslant i\leqslant t$$

是唯一的，就称 W 为 $W_1,\cdots,W_t$ 的**直和**(direct sum)，记为 $W_1\oplus\cdots\oplus W_t$． □

定理 2.7.4 $W_1+\cdots+W_t$ 是直和的充分必要条件是：

$$\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_t=\mathbf{0}\ (\boldsymbol{w}_i\in W_i,\ \forall\,1\leqslant i\leqslant t)\Leftrightarrow\boldsymbol{w}_1=\cdots=\boldsymbol{w}_t=\mathbf{0} \tag{2.7.8}$$

定理 2.7.5 $W_1+W_2=W_1\oplus W_2\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\mathbf{0}$．

推论 2.7.4 $W_1+W_2=W_1\oplus W_2\Leftrightarrow$ dim (W_1+W_2) = dim W_1 + dim W_2．

定理 2.7.6 设 $W_1,\cdots,W_t$ 是数域 F 上有限维向量空间 V 的子空间．则

$W_1+\cdots+W_t=W_1\oplus\cdots\oplus W_t\Leftrightarrow$ dim $(W_1+\cdots+W_t)$ = dim $W_1+\cdots+$ dim W_t

各 W_i 的基 M_i $(1\leqslant i\leqslant t)$ 中的向量共同组成的集合就是 $W_1+\cdots+W_t$ 的一组基．

推论 2.7.5 $W_1+\cdots+W_t$ 是直和 $\Leftrightarrow(W_1+\cdots+W_i)\cap W_{i+1}=\mathbf{0}$ 对 $1\leqslant i\leqslant t-1$ 成立． □

定义 2.7.3 设 W 是 V 的子空间．如果 V 的子空间 U 满足条件 $W\oplus U=V$，就称 U 是 W 在 V 中的**补空间**(complement space)． □

命题 2.7.7 设 W,U 是 V 的子空间．则以下命题等价：

（1）U 是 W 在 V 中的补；

（2）dim W + dim U = dim V 且 $W\cap U=\mathbf{0}$；

（3）W 的基与 U 的基的并集是 V 的基． □

教材习题

2.1 8. 设复数域上的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关．λ 取什么复数值时，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1-\lambda\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\lambda\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\lambda\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n-\lambda\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关？

解：$x_1(\alpha_1-\lambda\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\lambda\alpha_3)+\cdots+x_n(\alpha_n-\lambda\alpha_1)=0$ 即 $(x_1-\lambda x_n)\alpha_1+(x_2-\lambda x_1)\alpha_2+\cdots+(x_n-\lambda x_{n-1})\alpha_n=0$

则由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关：$x_1=\lambda x_n,\cdots,x_n=\lambda x_{n-1}=\lambda^2x_{n-2}=\cdots=\lambda^{n-1}x_1=\lambda^nx_n\Rightarrow$ 若 $\lambda^n\neq1\Rightarrow x_k=0\ \forall\,1\le k\le n$.

此时线性无关. 若 $\lambda^n=1$, ∃非零解, 线性相关. 综上. $\lambda^n\neq1$.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维数组向量，已知标准基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可被它们线性表出，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关．

证明：若线性相关. 存在 α_j s.t. 其可被其余 $n-1$ 个向量线性表出. 则 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 可被此 $n-1$ 向量线性表出. 与 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关性矛盾!

2.2 2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,3,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(6,5,4,3)$，

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关；

（2）把 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5\}$ 的极大线性无关组．

竖示为列向量. $\begin{pmatrix}0&1&3&4&6\\1&2&4&3&5\\2&3&5&2&4\\3&4&6&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2&-5&-7\\&1&3&4&6\\&&0&&\\&&&0&\end{pmatrix}$ 则(1)证毕.(2). $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 即为极大线性无关组.

2.3 2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,1)$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成 R^4 的一组基．

写为 $(\alpha_1,\alpha_2,e_1,\cdots,e_4)$. $\begin{pmatrix}1&0&1&&&\\0&1&&1&&\\1&0&&&1&\\0&1&&&&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&&&\\&1&&1&&\\&&-1&&1&\\&&&-1&&1\end{pmatrix}$ 显然 $\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2$ 可作为 R^4 的一组基

3. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$，试将标准基向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出．

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&-1&1&0\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}:=B$ 有 B^{-1}: $\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\1&1&&&&1&&\\1&-1&1&&&&1&\\1&-1&-1&1&&&&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&&&&1&&&\\&1&&&-1&1&&\\&&1&&-2&1&1&\\&&&1&-4&2&1&1\end{array}\right)$

则 $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&&&\\-1&1&&\\-2&1&1&\\-4&2&1&1\end{pmatrix}$

2.4 1. 已知 5 元线性方程组的系数矩阵的秩为 3，且以下向量是它的解

$$X_1=(1,1,1,1,1),\ X_2=(1,2,3,4,5),\ X_3=(1,0,-3,-2,-3).$$

(1) 求方程组的通解.

(2) $X_1+X_2+X_3$ 是否是方程组的解？ 不是

(3) $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是否是方程组的解？ 是

(1). 若齐次, rank$V_A=5-3=2\neq3$. 故为非齐次方程组. 对去掉常数项后的齐次方程组, 再找两个线性无关的解.
$Y_1=X_2-X_1=(0,1,2,3,4)$, $Y_2=X_3-X_1=(0,-1,-4,-3,-4)$ 二者线性无关, 构成一组基础解系. 则通解为 $(1,1+x-y,1+2x-4y,1+3x-3y,1+4x-4y)$

2.5 3. 设整数 $k\geqslant2$，数域 F 上的线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性相关. 证明：存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in F$，使得对任何 α_{k+1}，向量组 $\{\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}\}$ 线性相关.

∃不全为0的实数 $c_1\dots c_k$, s.t. $c_1\alpha_1+\dots+c_k\alpha_k=0$. 又 $k\geq2$ 则 $c_1\lambda_1+\dots+c_k\lambda_k=0$ 有非零解 $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$

则此时 $c_1(\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1})+\dots+c_k(\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1})=c_1\alpha_1+\dots+c_k\alpha_k+(c_1\lambda_1+\dots+c_k\lambda_k)\alpha_{k+1}=0$. 得证.

5. 设向量组 S，T 的秩分别为 s，t，求证：向量组 $S\cup T$ 的秩 $\leqslant s+t$.

S_0,T_0 为 S,T 的极大线性无关组. 对 $\alpha\in S\cup T$. 则 $\alpha\in S$ 或 $\alpha\in T\Rightarrow\alpha$ 能被 S_0 或 T_0 表出. 则 $S\cup T$ 能被 $S_0\cup T_0$ 表出.

则 rank$(S\cup T)\leq$ rank$(S_0\cup T_0)\leq|S_0\cup T_0|\leq|S_0|+|T_0|=s+t$.

2.7 2. 设 W_1，W_2 分别是数域 F 上的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0\\x_2+4x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的解空间. 分别求 W_1+W_2 及 $W_1\cap W_2$ 的维数并各求出一组基.

1° (I) 得到一组基 $\{(1,-2,1,0),(1,-1,0,1)\}$. (II) 得到一组基 $\{(4,-4,1,0),(4,-3,0,1)\}$. 求四个向量的极大线性无关组为 $\alpha_{1,2,3}$, $\dim(W_1+W_2)=3$

2° 对 $W_1\cap W_2$ 有系数矩阵: $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\1&2&4&2\\0&1&4&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&-1\\&&1&1\\&&&0\end{pmatrix}$ 则 rank$A=3\Rightarrow\dim W_1\cap W_2=4-3=1$. 基为 $\{(0,1,-1,1)\}$

3. 设 W_1，W_2 分别是数域 F 上齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间. 求证：$F^n=W_1\oplus W_2$.

设 $X_0=(x_0,\dots,x_n)\in W_1\cap W_2$. 则 $X=0\Rightarrow W_1+W_2=W_1\oplus W_2$. 对 $\forall X\in F$. 取 $c=\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$. $X_1=(c,c,\dots,0)$. $X_1=X-X_2$

则 $X\in X_1+X_2\Rightarrow F^n=W_1+W_2=W_1\oplus W_2$.

第三章 行列式

知识点&例题

定义 3.1.1 由 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照任何一种顺序排成的一个有序数组 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 称为一个 n 元排列(permutation). □

定义 3.1.2 排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 中每出现一对 $p<q$ 使 $j_p>j_q$，就称 (j_p,j_q) 是该排列的一个**逆序**(reverse order). 排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 中逆序的个数称为这个排列的**逆序数**(number of reverse order)，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数，就称这个排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 为**奇排列**(odd permutation)；如果逆序数为偶数，就称这个排列为**偶排列**(even permutation). □

定义 3.1.3 在一个 n 元排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 中，将某两个数码 j_p，j_q 的位置互换、其余数码位置不变，就称为这个排列的一次**对换**(transposition). □

定理 3.1.1 任一个排列经过任一次对换，必改变奇偶性.

定理 3.1.2 每个排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 都可以经过有限次对换变成标准排列 $(12\cdots n)$. 同一个排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 变成标准排列所经过的对换的次数 s 不唯一，但是 s 的奇偶性是唯一的，并且与排列的奇偶性相同.

将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的形式，按照下式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\qquad(3.1.1)$$

计算得到的一个数，称为 n **阶行列式**(determinant of order n).

命题 3.2.1

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\qquad(3.2.1)$$

定义 3.2.1 将 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行列互换，也就是将 A 的各行元依次作为各列元，得到的 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**转置**(transpose)，记为 $A^{\mathrm T}$.

设行列式 $\Delta=\det A$，则 $\det A^{\mathrm T}$ 称为 Δ 的转置，记作 $\Delta^{\mathrm T}$. □

性质 1 $\det A=\det A^{\mathrm T}$. 即：行列式转置，其值不变.

性质 2 将行列式 Δ 的某一行(设为第 k 行)α_k 拆成两个行向量之和 $\alpha_k=\beta_k+\gamma_k$，则 Δ 可以相应地写成两个行列式 Δ_1，Δ_2 之和，Δ_1，Δ_2 的第 k 行分别等于 β_k，γ_k，其余各行与 Δ 相同：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{k1}+c_{k1}&b_{k2}+c_{k2}&\cdots&b_{kn}+c_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{k1}&b_{k2}&\cdots&b_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{k1}&c_{k2}&\cdots&c_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

性质 3 将行列式的任意一行乘以常数 λ，则行列式值变为原来的 λ 倍.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{k1}&\lambda a_{k2}&\cdots&\lambda a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

性质 4 行列式两行互换，行列式的值变为原来值的相反数. 即：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{q1}&a_{q2}&\cdots&a_{qn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{q1}&a_{q2}&\cdots&a_{qn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

性质 5 如果行列式某行(列)元全为 0，则行列式值为 0.

性质 6 如果行列式某两行(列)相等，则行列式值为 0.

性质 7 如果行列式某两行(列)成比例，则行列式的值为 0.

性质 8 将行列式的某一行(列)的 λ 倍加到另一行(列)，行列式的值不变.

例: 求行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&0&-5\\3&-1&-1&0\\1&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&-3&-9\\0&-7&-10&-12\\0&-2&-2&-2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&-3&-9\end{vmatrix}=-2\times1\times1\times-3\times-4=-24$

例: 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}[x-(n-1)a]$

行/列和相同. 相加后提出.

例: 求 n 阶行列式 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$ (Vandermonde 行列式)

$V_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}(x_2-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}=\prod\limits_{1<i\leq n}(x_i-x_1)\cdot V_{n-1}\Rightarrow V_n=\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$

1. 行列式按一行(列)展开

命题 3.3.2 行列式 Δ 的值，等于它的任意一行各元分别乘以各自的代数余子式的乘积之和：

余子式: 除 a_{ij} 行列后其余部分行列式. M_{ij}

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$ 代数余子式: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

也等于它的任意一列各元分别乘以各自的代数余子式的乘积之和：

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

定理 3.3.3

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}=\begin{cases}\Delta,&当\ k=i,\\0,&当\ k\neq i;\end{cases}\qquad\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ij}=\begin{cases}\Delta,&当\ k=j,\\0,&当\ k\neq j.\end{cases}\qquad□$$

例: $\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0\\1&2&1&\cdots&0\\0&1&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\end{vmatrix}$ 按第一行展开 $\Delta_n=2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}\Rightarrow\Delta_n-\Delta_{n-1}$ 为等差数列. $d=\Delta_2-\Delta_1=3-2=1$. $\Rightarrow\Delta_n=n+1$

2. 行列式按若干行(列)展开

定理 3.3.5 (Laplace 展开定理) 设 $|A|$ 是 n 阶行列式. 对任意正整数 $r<n$，任意取定 r 个指标 $i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$，则 $|A|$ 的值等于它的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行(或列)元组成的所有的 r 阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和. 得

$$|A|=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+k_1+k_2+\cdots+k_r}A\begin{pmatrix}i_{r+1}&\cdots&i_n\\k_{r+1}&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant n}A\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\i_1&i_2&\cdots&i_r\end{pmatrix}\cdot(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+i_1+i_2+\cdots+i_r}A\begin{pmatrix}k_{r+1}&\cdots&k_n\\i_{r+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

其中 $i_{r+1},\cdots,i_n$ 由 $1,2,\cdots,n$ 中去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 之后剩下的数按从小到大顺序排列得到，$k_{r+1},\cdots,k_n$ 由 $1,2,\cdots,n$ 中去掉 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 之后剩下的数按从小到大顺序排列得到.

性质 2′

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k}+c_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k}+c_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk}+c_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3′ 将行列式的任意一列乘以常数 λ，则行列式值变为原来的 λ 倍. 行列式中任一列的公因子可以提到行列式的外面. □

推论 3.4.2 设 A 是 n 阶方阵. 则如下命题等价：

(1) $|A|\neq 0$;

(2) A 的列向量线性无关；

(3) A 的行向量线性无关；

(4) $\operatorname{rank} A = n$.

例 3 设 $|A|$ 是 n 阶行列式，正整数 $r<n$. 如果 $|A|$ 的所有的 r 阶子式都等于 0，求证：$|A|=0$.

证明 $|A|$ 等于前 r 行元组成的所有的 r 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和. 由于所有的 r 阶子式都等于 0，它们与各自的代数余子式的乘积之和也是 0. 因此 $|A|=0$. □

Cramer 法则

推论 3.4.1 如果由 n 个方程组成的 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $\Delta\neq 0$，则方程组有唯一解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)$. □

定理 3.4.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in F^{n\times 1}$，$\Delta$ 是依次以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为各列组成的行列式. 则：$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $F^{n\times 1}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \Delta\neq 0$.

定理 3.4.3（Cramer 法则） 如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.4.1}$$

的系数行列式 $\Delta\neq 0$，则方程组有唯一解

$$(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_j}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

其中 Δ_j 是将 Δ 的第 j 列各元分别换成 $b_1,\cdots,b_n$ 得到的行列式.

教材习题

3.3

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}=x^n-(-1)^n y^n$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

由 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$ 递推，有 $D_n=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$

3. 求证：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j\sum_{k=1}^n A_{kj}$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{jk} 是 a_{jk} 在 $\det A$ 中的代数余子式.

方法：升阶. $\text{LHS}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11}+x_1 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x_1 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 按第一行展开：$D=\det A+\sum_{i=1}^n x_i(-1)^{1+(i+1)}D_i$

$D_i=\sum_{k=1}^n(-1)\cdot(-1)^{k+1}\underline{D_{i(k1)}}$ 代表 D_i 的 $(k,1)$ 元的余子式. $\Rightarrow D=\det A+\sum_{i=1}^n x_i\sum_{k=1}^n(-1)^{i+k}M_{ki}=\det A+\sum_{i=1}^n x_i\sum_{k=1}^n A_{ki}$

3.4 3. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是任意 n 个不同的数，$y_1,\cdots,y_n$ 是任意 n 个数. 求证：存在唯一一个次数小于 n 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，使得对 $1\leqslant i\leqslant n$ 满足条件 $f(x_i)=y_i$.

即有方程组：$\begin{cases} a_0+a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1 \\ \cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n \end{cases}$ 视为 $a_0,\cdots,a_{n-1}$ 为未知量的 n 阶线性方程组.

系数矩阵行列式为 Vandermonde 行列式，值为 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\neq 0$. 故有唯一解

例 1 计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda_1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & \lambda_2+a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & \lambda_n+a_nb_n \end{vmatrix}$$

$\text{LHS}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & \lambda_1+a_1b_1 & \cdots & & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_nb_1 & \cdots & & \lambda_n+a_nb_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n \\ -a_1 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{\lambda_i} & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n\lambda_i\cdot\left(1+\sum_{j=1}^n\frac{a_jb_j}{\lambda_j}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & \cdots & 1+x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=2\prod_{i=1}^n x_i\cdot\prod_{1\le j<k\le n}(x_k-x_j)$$

$-\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ 其中 $x_0=1$

第四章 矩阵的代数运算（内容基础常用，未列出全部知识点）

知识点&例题

矩阵乘法的定义 对任意正整数 m,n,p，任意的数域 F，任意的矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times p}\in F^{n\times p}$ 可以相乘，得到的乘积 AB 是一个 $m\times p$ 矩阵

$$AB=(c_{ij})_{m\times p}$$

它的第 (i,j) 元

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

矩阵乘法还有如下一些与数的乘法类似的性质：

(1) 结合律： $C(BA)=(CB)A$

对任意 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{p\times m}$，$C\in F^{q\times p}$ 成立.

设 A 是方阵. 如果 $A^{\mathrm T}=A$，则称 A 为**对称方阵**(symmetric matrix). 如果 $A^{\mathrm T}=-A$，就称 A 是**反对称方阵**(anti-symmetric matrix)，也称**斜对称方阵**(skew symmetric matrix).

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的每个元 a_{ij} 换成与它共轭的复数 $\overline{a_{ij}}$，得到的矩阵称为 A 的共轭矩阵，记作 $\overline{A}$. 也就是说：$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$. 容易验证，关于矩阵共轭的以下性质成立：

(1) $\forall A, B\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$；

(2) $\forall\lambda\in\mathbf{C}$，$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$；

(3) $\forall A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$B\in\mathbf{C}^{n\times p}$，$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$；

(4) $\forall A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\overline{A}^{\mathrm T}=\overline{A^{\mathrm T}}$.

设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$. 如果 $\overline{A}^{\mathrm T}=A$，就称 A 为 **Hermite 方阵**(Hermitian matrix). 如果 $\overline{A}^{\mathrm T}=-A$，就称 A 为**反 Hermite 方阵**(anti Hermitian matrix). 显然，实 Hermite 方阵就是对称方阵，实斜 Hermite 方阵就是反对称方阵.

4. 分块矩阵的转置

设矩阵 $A\in F^{m\times n}$ 写成分块形式

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

则 A 的转置

$$A^{\mathrm T}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm T} & A_{21}^{\mathrm T} & \cdots & A_{p1}^{\mathrm T} \\ A_{12}^{\mathrm T} & A_{22}^{\mathrm T} & \cdots & A_{p2}^{\mathrm T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}^{\mathrm T} & A_{2q}^{\mathrm T} & \cdots & A_{pq}^{\mathrm T} \end{pmatrix}$$

定义 4.4.1 如下方阵称为**初等方阵**(elementary matrix)：

(1) 对 $1\leqslant i<j\leqslant n$，将 n 阶单位阵 $I_{(n)}$ 的第 i，j 两行互换得到的方阵

$$P_{ij}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} I_{(i-1)} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{(j-i-1)} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I_{(n-j)} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

(2) 对 $1\leqslant i\leqslant n$，$\lambda\neq 0$，将 n 阶单位阵 $I_{(n)}$ 的第 i 行乘 λ 得到的方阵

$$D_i(\lambda)=\begin{pmatrix} I_{(i-1)} & & \\ & \lambda & \\ & & I_{(n-i)} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

(3) 对 $1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$，$\lambda\neq 0$，将 n 阶单位阵 $I_{(n)}$ 的第 j 行的 λ 倍加到第 i 得到的方阵

$$T_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix} I_{(i-1)} & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I_{(n-j)} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$ □

定理 4.4.1 对矩阵 B 作初等行变换，效果相当于对 B 左乘相应的初等方阵：

(1) 将 B 的第 i，j 行互换：$B\mapsto P_{ij}B$.

(2) 将 B 的第 i 行乘 $\lambda\neq 0$：$B\mapsto D_i(\lambda)B$.

(3) 将 B 的第 j 行的 λ 倍加到第 i 行：$B\mapsto T_{ij}(\lambda)B$. □

定理 4.4.2 (1) 对 $1\leqslant i<j\leqslant n$，将 n 阶单位阵的第 i，j 两列互换得到初等方阵 P_{ij}. 将任一 $p\times n$ 矩阵 B 的第 i，j 两列互换，得到的矩阵是 BP_{ij}.

(2) 对 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $\lambda\neq 0$，将 n 阶单位阵的第 i 列乘 λ 得到初等方阵 $D_i(\lambda)$. 将任一 $p\times n$ 矩阵 B 的第 i 列乘 λ，得到的矩阵是 $BD_i(\lambda)$.

(3) 对 $1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$ 和 $\lambda\neq 0$，将 n 阶单位阵的第 i 列的 λ 倍加到第 j 列得到初等方阵 $T_{ij}(\lambda)$. 将任一 $p\times n$ 矩阵 B 的第 i 列的 λ 倍加到第 j 列得到 $BT_{ij}(\lambda)$. □

例: $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\\1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\end{pmatrix}$. A^{10}?

解: $A=XY$. $X=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $Y=(1\ 2\ 1\ 2)$. $A^{10}=X(YX)^9Y=-2^9A$

定义 4.3.1 对于矩阵 $A\in F^{m\times n}$，如果存在矩阵 $B\in F^{n\times m}$满足条件 $AB=I_{(m)}$ 且 $BA=I_{(n)}$，就称 A **可逆**(invertible)，并且称 B 是 A 的**逆**(inverse)． □

命题 4.3.1 假如 A 可逆，那么 A 的逆 B 是唯一的．

引理 4.3.2 A 可逆 $\Rightarrow A^{-1}$ 可逆．且 $(A^{-1})^{-1}=A$． □

引理 4.3.3 A 可逆 $\Rightarrow A$ 的各列线性无关． □ tip:行列式=0 ⇔ 方阵称奇异方阵

定理 4.3.4 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 是方阵且 $|A|\neq 0$．

当 $|A|\neq 0$ 时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中 A^* 的第 (i,j) 元为 A 的第 (j,i) 元的代数余子式 A_{ji}． □

A^* 称为 A 的**伴随方阵**(adjoint matrix)．

算法 4.3.1 已知 $A\in F^{n\times n}$，$|A|\neq 0$，$B\in F^{n\times m}$．求矩阵 $X\in F^{n\times m}$ 满足条件

$$AX=B$$

可以采用以下算法：

以 A，B 为块组成 $n\times(n+m)$ 矩阵 (A,B)．将 (A,B) 经过一系列初等行变换化为 (I,D) 的形式，则 $X=D$ 是方程 $AX=B$ 的唯一解．

特别，将 $n\times 2n$ 矩阵 (A,I) 经过一系列初等行变换化为 (I,D) 的形式，则 $D=A^{-1}$．

性质 1 A 可逆 $\Rightarrow A$ 的逆 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$．

性质 2 n 阶方阵 A，B 可逆 $\Rightarrow$ 它们的乘积 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．

一般地，如果 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 可逆，则它们的乘积 $A_1A_2\cdots A_k$ 可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

性质 3 设 $0\neq\lambda\in F$，A 可逆，则 $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$．

性质 4 设 A 可逆，则它的转置 $A^{\mathrm T}$ 可逆，且 $(A^{\mathrm T})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm T}$．

性质 5 设 m 阶方阵 A 与 n 阶方阵 B 可逆，则准对角阵 $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$$

推论 4.6.1 设 s 是任意正整数．如果 A 不含 s 阶非零子式，则 A 不含阶数高于 s 的非零子式，$\mathrm{rank}\,A<s$．如果 A 含有 s 阶非零子式，则对每个正整数 $k<s$，A 含有 k 阶非零子式，$\mathrm{rank}\,A\geqslant s$． □

定理 4.6.2 对任意 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times p}$，$\mathrm{rank}\,AB\leqslant\mathrm{rank}\,A$ 且 $\mathrm{rank}\,AB\leqslant\mathrm{rank}\,B$．

定理 4.6.3 设 $A\in F^{m\times n}$，P，Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵，则 $\mathrm{rank}\,(PAQ)=\mathrm{rank}\,A$．

定义 4.6.2 设 A，$B\in F^{m\times n}$．如果 A 可以通过一系列初等行变换和初等列变换变成 B，就称 A 与 B **相抵**，也称 A 与 B **等价**(equivalent)． □

定理 4.6.4 A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow$ 存在可逆方阵 P，Q 使 $B=PAQ$．

命题 4.6.5 矩阵的相抵关系具有如下性质：

(1) 反身性：A 相抵于自己．

(2) 对称性：如果 A 相抵于 B，则 B 相抵于 A．

(3) 传递性：如果 A 相抵于 B，B 相抵于 C，则 A 相抵于 C．

定理 4.6.6 设 A，$B\in F^{m\times n}$．则：A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,B$．

教材习题

4.1 13. 设 A 为 2×2 矩阵，证明：如果 $A^k=O$，$k\geqslant 2$，那么 $A^2=O$．

A 幂零. 则 $\mathrm{tr}A=0$. $\det A=0$. $\Rightarrow A^2=0$ (λ=0 或 1. 分类讨论)

4.2 2. 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在 n 阶非零方阵 B 使 $AB=O$ 的充分必要条件是 $|A|=0$．

$\Rightarrow$) 若 $AB=0$. 则 $A(b_1,b_2,\cdots,b_n)=0$ 即 $Ab_j=0$ $\forall 1\le j\le n$. 若 $|A|\neq0$. $Ax=0\Rightarrow x=0$. 则 $B=0$ 矛盾! 则 $|A|=0$.

$\Leftarrow$) 若 $|A|=0$. 则 $\exists x\neq0$. $Ax=0$. 取 $B=(x,x,\cdots,x)$ 即可.

4.3 5. 设 A 是 n 阶方阵，证明：若 $A^2=I$，且 $A\neq I$，则 $A+I$ 为非可逆矩阵．

若可逆. $A^2-I=(A+I)(A-I)=0$ $(A+I)^{-1}(A+I)(A-I)=0\Rightarrow A=I$. 矛盾!

8. 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的伴随方阵．证明：

(1) $(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*$ 对任意数 λ 成立；

(2) $(AB)^*=B^*A^*$ 对任意同阶方阵 A，B 成立；

(3) 当 $n>2$ 时，$(A^*)^*=(\det A)^{n-2}A$；当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$．

伴随方阵性质: $AA^*=|A|I$. $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

(1) $\lambda A\cdot(\lambda A)^*=|\lambda A|I\Rightarrow(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}|A|A^{-1}=\lambda^{n-1}A^*$ (2)(3) 同理.

4.4 6. 设 A，B，C，$D\in F^{n\times n}$ 且 A 可逆．求 $2n$ 阶可逆方阵 P，Q 使 $P\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}Q$ 具有形式 $\begin{pmatrix}A&O\\O&D_1\end{pmatrix}$，其中 D_1 是某个 n 阶方阵． 取 $P=\begin{pmatrix}I&\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}I&-A^{-1}B\\&I\end{pmatrix}$

4.7 2. 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2=A$．求证：$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{Tr}A$．

已证 $A=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}P^{-1}$. P 为可逆方阵. 则 $\mathrm{rank}A=r$. $\mathrm{Tr}A=\mathrm{tr}\left(P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}P^{-1}\right)=\mathrm{tr}\left(P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}\right)=r$.

定理 4.4.3 任意的 $m\times n$ 矩阵 A 都可以通过有限次初等行变换和初等列变换化为

$$\begin{pmatrix}I_{(r)}&O\\O&O\end{pmatrix}\qquad(4.4.2)$$

其中 $r=\mathrm{rank}\,A$．

推论 4.4.1 对任意 $m\times n$ 矩阵 A，用一系列的 m 阶初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 左乘 A，以及一系列初等方阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$ 右乘 A，将 A 化为

$$\begin{pmatrix}I_{(r)}&O\\O&O\end{pmatrix}$$

其中 $r=\mathrm{rank}\,A$．存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使 PAQ 具有上述形式．

推论 4.4.2 如果 A 是可逆方阵，则 A 可以表示为若干个初等方阵的乘积．

推论 4.4.3 可逆方阵 A 可以经过有限次初等行变换化为单位阵．

Schur公式: $\begin{pmatrix}I&0\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A^{-1}B\\0&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

引理 4.5.2 同阶方阵 A，B 的乘积的行列式等于它们的行列式的乘积：

$$|AB|=|A|\cdot|B|\quad\square$$

当公式记忆

例: $A\in F^{n\times m}$, $B\in F^{m\times n}$. 证明 $|I_n-AB|=|I_m-BA|$

证明: $|I_n-AB|=\begin{vmatrix}I_m&B\\&I_n-AB\end{vmatrix}$. 有 $\begin{pmatrix}I_m&\\A&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&B\\&I_n-AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&\\-A&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m-BA&B\\0&I_n\end{pmatrix}$. 证毕

应用: 计算 $\begin{vmatrix}1+a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&1+a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&1+a_nb_n\end{vmatrix}=\left|I-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(-b_1,-b_2,\cdots,-b_n)\right|=1-(-b_1,\cdots,-b_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=1+\sum_{i=1}^n a_ib_i$

定理 4.5.3 (Binet-Cauchy 公式) 设 $A\in F^{n\times m}$，$B\in F^{m\times n}$．则

(1) 当 $n>m$ 时，$|AB|=0$；

(2) 当 $n=m$ 时，$|AB|=|A|\cdot|B|$；

(3) 当 $n<m$ 时，

$$|AB|=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant m}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}.\quad\square$$

推论 4.5.1 设 $A\in F^{n\times m}$，$B\in F^{m\times n}$，正整数 $r\leqslant\min\{m,n\}$．$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$．则

$$(AB)\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant m}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}.$$

定理 4.6.1 设 r 是正整数，$m\times n$ 矩阵 A 含有 r 阶非零子式，不含 $r+1$ 阶非零子式，则 A 的行秩与列秩都是 r．r 是 A 的非零子式的最高阶数．

定义 4.6.1 设 $A\in F^{m\times n}$ 所含的非零子式的最高阶数为 r，就称 r 是 A 的**秩**(rank)，记为 $\mathrm{rank}\,A$．当 $A=O$ 时，A 不含任何非零子式，定义 $\mathrm{rank}\,A=0$． □

例 5 设 A，$B\in F^{m\times n}$，求证：$\mathrm{rank}\,(A+B)\leqslant\mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,B$．

证法 1

$$\mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,B=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}I_{(m)}&O\\I&I_{(m)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(n)}&O\\I&I_{(n)}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&O\\A+B&B\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{rank}\,(A+B).$$

最后一个不等号成立的原因是：$A+B$ 是 $\begin{pmatrix}A&O\\A+B&B\end{pmatrix}$ 的子矩阵．

4.5 1. 设 A 是 n 阶可逆方阵，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，证明：

$$\det(A-\alpha\alpha^{\mathrm T})=(1-\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha)\cdot\det(A)$$

原式 $=\det(A(I-(A^{-1}\alpha)\alpha^T))=\det A\cdot\det(1-\alpha^TA^{-1}\alpha)=(1-\alpha^TA^{-1}\alpha)\det A$

4.6 3.（矩阵的满秩分解） 设 $A=F^{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}\,A=r>0$．求证：存在 $B\in F^{m\times r}$ 和 $C\in F^{r\times n}$ 且 $\mathrm{rank}\,B=\mathrm{rank}\,C=r$，使 $A=BC$．

有可逆矩阵 P. Q s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}\cdot(I_r,0)Q$ 取 $B=P\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$. $C=(I_r,0)Q$ 即可.

5. 设 A，B 是行数相同的矩阵，(A,B) 是由 A，B 并排组成的矩阵．证明：

$$\mathrm{rank}\,(A,B)\leqslant\mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,B$$

思路: 构造子矩阵

设 $S=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$. $T=\begin{pmatrix}I&\\I&I\end{pmatrix}$ 则 $TS=\begin{pmatrix}A&\\A&B\end{pmatrix}$. RHS $=\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}TS\geq\mathrm{rank}(A,B)$

7. 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的伴随方阵．证明：

(1) $\mathrm{rank}\,A^*=n\Leftrightarrow\mathrm{rank}\,A=n$； (2) $\mathrm{rank}\,A^*=1\Leftrightarrow\mathrm{rank}\,A=n-1$；

(3) $\mathrm{rank}\,A^*=0\Leftrightarrow\mathrm{rank}\,A<n-1$．

4.7 **例 5** 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2=A$．求证：存在 n 阶可逆方阵 P 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}I_{(r)}&O\\O&O\end{pmatrix},\ \text{其中 } r=\mathrm{rank}\,A$$

存在可逆方阵 P_1. Q_1 s.t. $A=P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1$. 则 $A^2=P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1$. 设 $T=Q_1P_1=\begin{pmatrix}T_1&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow T_1=I_r$. $Q_1=\begin{pmatrix}I_r&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}P_1^{-1}\Rightarrow A=P_1\begin{pmatrix}I_r&T_2\\0&0\end{pmatrix}P_1^{-1}$. $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}I_r&T_2\\0&0\end{pmatrix}$

又 $\begin{pmatrix}I_r&-T_2\\&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I_r&T_2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&-T_2\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ 取 $P=P_1\begin{pmatrix}I&-T_2\\&I\end{pmatrix}$ 即可.

第六章 线性变换

知识点&例题

6.1 线性映射

定义 6.1.1 如果映射 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 满足：

LM(1) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in U$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)$；

LM(2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in U$，$\lambda\in F$，$\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$，

则映射 $\mathscr{A}$ 称为线性空间 U 到 V 的**线性映射**(linear mapping)．当 $U=V$ 时，线性映射 $A: V\to V$ 称为 V 的**线性变换**(linear transformation)． □

一定有 $\mathscr{A}(0)=0$

设 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 是线性映射．则

(1) $\mathscr{A}$ 将零向量 $\mathbf{0}_U\in U$ 变到零向量 $\mathbf{0}_V\in V$，将 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ 变到 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$ 的负向量：

$$\mathscr{A}(\mathbf{0}_U)=\mathbf{0}_V,\quad \mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$$

(2) $\mathscr{A}$ 保持线性组合关系式不变：

$$\mathscr{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k)=\lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_k)$$

(3) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 线性相关．

(4) 如果 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关．

定义 6.1.2 设 U，V 是数域 F 上有限维线性空间，分别取 U 的基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 V 的基 $M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$．对每个 $1\leqslant j\leqslant n$，设 U 的基向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 在 $\mathscr{A}$ 下的像 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)$ 在基 M_2 下的坐标为

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\in F^{m\times 1}$$

A 是依次以 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为各列组成的矩阵，也就是说

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)A \tag{6.1.3}$$

则 A 称为 $\mathscr{A}$ **在基 M_1 和 M_2 下的矩阵**(matrix of $\mathscr{A}$ with respect to bases M_1,M_2)．

当 $U=V$ 时我们取 $M_1=M_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，此时称满足条件

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)A \tag{6.1.4}$$

的矩阵 A 为线性变换 $\mathscr{A}$ **在基 M_1 下的矩阵**(matrix of $\mathscr{A}$ with recpect to basis M_1)． □

定理 6.1.1 设 $\mathscr{A}: U\to V$ 是数域 F 上有限维线性空间的映射．取 U 的基 M_1 将 U 的向量用坐标表示，取 V 的基 M_2 将 V 的向量用坐标表示．如果 $\mathscr{A}$ 所引起的坐标之间的映射可以通过某个矩阵 A 的左乘来实现：

$$\mathscr{A}: X\mapsto AX$$

则 $\mathscr{A}$ 是线性映射，A 是 $\mathscr{A}$ 在基 M_1，M_2 下的矩阵．

特别，列向量空间之间由矩阵的左乘定义的映射 $\mathscr{A}$: $F^{n\times 1}\to F^{m\times 1}$，$X\mapsto AX$ 是线性映射，A 就是 $\mathscr{A}$ 在 $F^{n\times 1}$ 和 $F^{m\times 1}$ 的自然基下的矩阵． □

例：$\alpha_1=(1.1.1)$ $\alpha_2=(0.1.1)$ $\alpha_3=(0.0.1)$ 求线性映射 $\mathscr{A}: F^3\to F^2$ s.t. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别映为 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$

$\beta_1=(1.0)$ $\beta_2=(0.1)$ $\beta_3=(1.1)$

解：写为列向量形式．有 $A(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=(\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T)$ 则有 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

则有 $\mathscr{A}: F^{1\times3}\to F^{1\times2}$．$(x,y,z)\to(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}$

定理 6.1.2 设 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 F 上 n 维线性空间的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 F 上线性空间 V 的任意 n 个向量，则存在唯一的线性映射 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 分别映到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$．

推论 6.1.1 设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$ 是 F 上 n 维线性空间的任何一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 是 V 中任意 k 个向量．则存在线性映射 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 分别映到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$，但当 $k<n$ 时 $\mathscr{A}$ 不唯一．

定义 6.1.3 设 V 是 F 上有限维线性空间．则线性映射 f: $V\to F$ 称为 V 上的**线性函数**(linear function)，它满足条件：

LM (1) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，$f(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=f(\boldsymbol{\alpha}_1)+f(\boldsymbol{\alpha}_2)$；

LM (2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\lambda\in F$，$f(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda f(\boldsymbol{\alpha})$． □

定义 6.1.4 V 上全体线性函数组成的集合，也就是 $L(V,F)$，是 F 上的 n 维线性空间．$L(V,F)$ 称为 V 的**对偶空间**(dual space)，记作 V^*．设 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的任意一组基，将每个 $f\in V^*=L(V,F)$ 在基 M 下的矩阵 $A\in F^{1\times n}$ 记作 $\sigma(f)$，则 $V^*\to F^{1\times n}$ 是 V^* 到 n 维行向量空间 $F^{1\times n}$ 的同构映射．对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 定义线性函数

$$\alpha_i^*: V\to F, x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\mapsto x_i$$

概念	基 M_1,M_2 下的矩阵 B	M_1 到 M_2 的过渡矩阵 P
作用对象	描述线性映射 $\mathscr{A}: U\to V$ 的行为	描述同一个线性空间 V 内部两组基之间的变换关系
输入/输出	输入是 U 的基 M_1，输出是 V 的基 M_2	输入和输出都是同一个空间 V 的两组基 M_1,M_2
核心公式	$\mathscr{A}(M_1)=M_2\cdot B$	$M_2=M_1\cdot P$
维度	B 是 $\dim V\times\dim U$ 矩阵	P 是 $\dim V\times\dim V$ 方阵（且可逆）

从而

$$\alpha_i^*(\boldsymbol{\alpha}_i)=1,\ \alpha_i^*(\boldsymbol{\alpha}_j)=0,\ \forall j\neq i$$

则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^*\}$ 是 V^* 的一组基，称为 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的**对偶基**(dual basis)． □

6.2 坐标变换

则 P 称为基 M_1 到 M_2 的**过渡矩阵**(transition matrix)．它可以由等式

$$\underbrace{(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)}_{M_2}=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)}_{M_1}P \tag{6.2.2}$$

定义．表示

$$\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\Pi}_j=p_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+p_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n,\quad\forall 1\leqslant j\leqslant n$$

等式(6.2.2)称为**基变换公式**(basis tranformation formula)．

将 V 中每个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 M_1 下的坐标记为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，则 σ: $V\to F^{n\times 1}$ 是线性空间的同构映射．它将 V 的基 $M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 映到 $F^{n\times 1}$ 的一组基 $\{\boldsymbol{\Pi}_1,\cdots,\boldsymbol{\Pi}_n\}$，以这组基为列向量组成的方阵 P 的行列式 $\det P\neq 0$，因此 P 是可逆方阵．

定理 6.2.1 有限维线性空间的两组基之间的过渡方阵是可逆方阵． □

$$X=PY\quad\text{即}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \tag{6.2.6}$$

称为**坐标变换公式**(coordinates transformation formula)，也就是同一个向量在两组不同的基下的坐标 X，Y 之间的关系式．

☆ **定理 6.2.2** 矩阵 A，B 相抵 $\Leftrightarrow$ A，B 是同一线性映射 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 在两对不同的基 M_1，M_2 和 N_1，N_2 下的矩阵．如果 M_1 到 M_2 的过渡方阵是 P，N_1 到 N_2 的过渡方阵是 Q，则

$$B=Q^{-1}AP. \quad □$$

若 $\mathscr{A}: V\to V$．M_1 到 M_2 过渡矩阵为 P．$\mathscr{A}$ 在 M_1 下矩阵为 A．则在 M_2 下矩阵为 $B=P^{-1}AP$

推论 6.2.1 对任意线性映射 $\mathscr{A}$: $U\to V$，存在 U 的基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 V 的基 $M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$，使 $\mathscr{A}$ 在基 M_1，M_2 下的矩阵为

$$S=\begin{pmatrix}I_{(r)}&O\\O&O\end{pmatrix}$$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j,\ \forall 1\leqslant j\leqslant r;\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\mathbf{0},\ \forall r+1\leqslant j\leqslant n$$

证明：取 U 的基 $N_1=\{u_1,\cdots,u_n\}$．$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(u_1,\cdots,u_n)P$．$P$ 为 N_1 到 M_1 的过渡矩阵　取 A 为基 N_1 N_2 下的矩阵．

取 V 的基 $N_2=\{v_1,\cdots,v_m\}$．$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(v_1,\cdots,v_m)Q^{-1}$ Q 为 M_2 到 N_2 的过渡矩阵．

即 $\mathscr{A}(u_1,\cdots,u_n)=(v_1,\cdots,v_m)A$

则 $\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)QAP\Rightarrow S=QAP$ 即为所求．

6.3 像与核

例 1 设

$$\mathscr{A}: F^{4\times 1}\to F^{3\times 1}, X\mapsto AX$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix}$．求 $F^{3\times 1}$ 的基 $M_1=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 与 $F^{3\times 1}$ 的基 $M_2=\{Y_1,Y_2,Y_3\}$，使 $\mathscr{A}$ 在 M_1，M_2 下的矩阵具有标准形

$$B=\begin{pmatrix}I_{(r)}&\\&O\end{pmatrix}$$

解 M_1，M_2 满足的条件为

$$AX_i=Y_i(\forall 1\leqslant i\leqslant r);\ AX_i=\mathbf{0}\ (\forall i>r)$$

解线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 求解空间的基 $\{X_{r+1},\cdots,X_4\}$．

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知 $r=2$，$AX=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3+2x_4\\-2x_3-3x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

取

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

添加

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

扩充为 $F^{4\times 1}$ 的一组基 $M_1=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$．取

$$Y_1=AX_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad Y_2=AX_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

添加 $Y_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 组成 $F^{3\times 1}$ 的一组基 $M_2=\{Y_1,Y_2,Y_3\}$．

则 $\mathscr{A}$ 在基 M_1，M_2 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad □$$

定义 6.3.1 设 $\mathscr{A}: U\to V$ 是 F 上线性空间之间的线性映射．

集合

$$\mathscr{A}(U)=\{\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in U\}$$

称为映射 $\mathscr{A}$ 的像(image)，也称为 $\mathscr{A}$ 的**值域**(range)，也记作 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$．

集合

$$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha}\in U\mid\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\}$$

称为映射 $\mathscr{A}$ 的核(kernel)，也记作 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$． □

每个矩阵 $A\in F^{m\times n}$ 的左乘作用都引起列向量空间之间的线性映射 $\mathscr{A}$: $F^{n\times 1}\to F^{m\times 1}$，$X\mapsto AX$．我们也常用 $\mathrm{Ker}A$，$\mathrm{Im}A$ 来表示这个线性映射 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 和像 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$．

命题 6.3.1 任意线性映射 $\mathscr{A}: U\to V$ 的像 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ 是 V 的子空间，核 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 是 U 的子空间．

定义 6.3.2 线性映射 $\mathscr{A}: U\to V$ 的像 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的**秩**(rank)，记作 $\mathrm{rank}\,\mathscr{A}$． □

引理 6.3.2 设 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 是数域 F 上有限维线性空间之间的线性映射，$M_0=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 是 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 的一组基，$S=\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_t\}$ 是 U 的一个向量组．记 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_t\}$ 为 M_0 添加 S 得到的向量组，$\mathscr{A}(S)=\{\mathscr{A}(\boldsymbol{u}_1),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{u}_t)\}$ 是 S 的像．则

(1) M 线性无关 $\Leftrightarrow\mathscr{A}(S)$ 线性无关；

(2) M 是 U 的基 $\Leftrightarrow\mathscr{A}(S)$ 是 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=\mathscr{A}(U)$ 的基．

定理 6.3.3 设 $\mathscr{A}$: $U\to V$ 是有限维线性空间之间的线性映射，$\mathrm{rank}\,\mathscr{A}=r$，$n=\dim U$，$m=\dim V$．则

$$\dim U=\mathrm{rank}\,\mathscr{A}+\dim\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$$

且存在 U 的基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 V 的基 $M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$，使 $\mathscr{A}$ 在基 M_1，M_2 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}I_{(r)}&\\&O\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$$

命题 6.3.4 设 $\mathscr{A}: U\to V$ 是有限维线性空间之间的线性映射，$A\in F^{m\times n}$ 是 $\mathscr{A}$ 在任意一对基下的矩阵，$V_A=\{X\in F^{n\times 1}\mid AX=\mathbf{0}\}$ 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间．则

$$\mathrm{rank}\ A=\mathrm{rank}\,\mathscr{A},\quad \dim V_A=\dim\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$$

★ **命题 6.3.5** 线性映射 $\mathscr{A}: U\to V$ 是单射的充分必要条件是 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}$.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是单射. 则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\mathbf{0})\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}$.

反过来，设 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}$. 则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\Rightarrow\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}\Rightarrow\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$$

这说明 $\mathscr{A}$ 是单射. □

推论 6.3.1 线性映射 $\mathscr{A}: U\to V$ 是可逆映射 $\Leftrightarrow\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=V$ 且 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}$. □

命题 6.3.6 设 $\mathscr{A}: U\to V$ 是有限维空间之间的线性映射. 则 $\mathscr{A}$ 是可逆映射的充分必要条件是，以下 3 个条件中的任意两个条件同时成立：

(1) $\dim U=\dim V=n$.

(2) $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathbf{0}$.

(3) $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=V$.

例 2 设 $A\in F^{n\times n}$. 如果 $\mathrm{rank}\,A^k=\mathrm{rank}\,A^{k+1}$ 对某个正整数 k 成立，求证：$\mathrm{rank}\,A^k=\mathrm{rank}\,A^{k+s}$ 对所有正整数 s 成立.

证明 取 $V=F^{n\times 1}$，定义线性映射 $\mathscr{A}: V\to V$，$X\mapsto AX$. 则对任意正整数 m，有 $\mathscr{A}^m: V\to V, X\mapsto A^mX$.

我们有：$\mathrm{rank}\,\mathscr{A}^k=\mathrm{rank}\,A^k=\mathrm{rank}\,A^{k+1}=\mathrm{rank}\,\mathscr{A}^{k+1}$. 即：

$$\dim\mathscr{A}^k(V)=\dim\mathscr{A}^{k+1}(V)\tag{6.3.6}$$

而 $\mathscr{A}^{k+1}(V)=\mathscr{A}^k(\mathscr{A}(V))\subseteq\mathscr{A}^k(V)$. 因此，(6.3.6) 导致

$$\mathscr{A}^{k+1}(V)=\mathscr{A}^k([redacted]V))\tag{6.3.7}$$

对任意正整数 m，将等式 (6.3.7) 两边同时用 $\mathscr{A}^m$ 作用得

$$\mathscr{A}^{k+m+1}(V)=\mathscr{A}^{k+m}(V)$$

从而

$$\mathrm{rank}\,A^{k+m+1}=\dim\mathscr{A}^{k+m+1}(V)=\dim\mathscr{A}^{k+m}(V)=\mathrm{rank}\,A^{k+m}$$

因而

$$\mathrm{rank}\,A^k=\mathrm{rank}\,A^{k+1}=\mathrm{rank}\,A^{k+2}=\cdots=\mathrm{rank}\,A^{k+s}$$

对所有的正整数 s 成立. □

例：$A\in F^{n\times n}$. $k\in\mathbb{N}^+$. 证明 $\mathrm{rank}A^k-\mathrm{rank}A^{k+1}\geq\mathrm{rank}A^{k+1}-\mathrm{rank}A^{k+2}$

证明：取 $V=F^{n\times1}$. 定义线性映射 $\mathscr{A}: V\to V$. $x\mapsto Ax$. 对 $\forall m\in\mathbb{N}^+$. $\mathscr{A}^m(V)=\mathrm{Im}(\mathscr{A}^m)$ 为 V 子空间.

取 $U=\mathscr{A}^k(V)$, $W=\mathscr{A}^{k+1}(V)$. $\mathscr{A}_1: U\to V$. $X\mapsto AX$. $\mathscr{A}_2: W\to V$. $X\to AX$.

有 $\dim U=\mathrm{rank}\mathscr{A}^k=\mathrm{rank}A^k$. $\dim W=\mathrm{rank}\mathscr{A}^{k+1}=\mathrm{rank}A^{k+1}$. $\dim\mathrm{Im}\,\mathscr{A}_2=\mathrm{rank}(A^{k+2})$

$\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}_1=\dim U-\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{rank}A^k-\mathrm{rank}A^{k+1}$, $\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}_2=\mathrm{rank}A^{k+1}-\mathrm{rank}A^{k+2}$

$\mathrm{Ker}\mathscr{A}_1=\{x\in U|Ax=0\}$. $\mathrm{Ker}\mathscr{A}_2=\{x\in W|Ax=0\}$. 有 $W\subseteq U$. $\mathrm{Ker}\mathscr{A}_2=\mathrm{Ker}\mathscr{A}_1\cap W\subseteq\mathrm{Ker}\mathscr{A}_1$. 证毕

6.4 线性变换

定义 6.4.1 设 V 是数域 F 上有限维向量空间，维数为 n. 则 V 到自身的线性映射 $\mathscr{A}: V\to V$ 称为 V 的**线性变换**(linear transformation). □

定义 6.4.2 设 A，B 是数域 F 上两个 n 阶方阵. 如果存在 F 上 n 阶可逆方阵 P，使 $B=P^{-1}AP$，就称 A，B 在 F 上**相似**(similar).

定理 6.4.1 矩阵 A，$B\in F^{n\times n}$ 相似当且仅当它们是 F 上同一 n 维空间 V 的同一线性变换在两组基下的矩阵. □

命题 6.4.2 方阵之间的相似关系满足下列性质：

(1) **自反性** 任意 $A\in F^{n\times n}$ 与自身相似.

(2) **对称性** 如果 $F^{n\times n}$ 中 A 与 B 相似，则 B 与 A 相似.

(3) **传递性** 设 A，B，$C\in F^{n\times n}$，且 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似.

命题 6.4.3 设方阵 A，B 相似，$B=P^{-1}AP$ 对 F 上可逆方阵 P 成立. $f(\lambda)\in F[\lambda]$ 是系数在 F 中的任一多项式. 则

$$f(B)=P^{-1}f(A)P.$$

也就是说：A 与 B 相似 $\Rightarrow f(A)$ 与 $f(B)$ 相似，从而 $\mathrm{rank}\,f(A)=\mathrm{rank}\,f(B)$. 特别，$f(A)=0$ 当且仅当 $f(B)=0$.

6.5 特征向量

定义 6.5.1 如果可以选基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵 B 是对角阵，就称 $\mathscr{A}$ **可对角化**(diagonalizable). 如果方阵 A 相似于某个对角阵 B，就称 A 可对角化. □

定义 6.5.2 设 $\mathscr{A}: V\to V$ 是 V 的线性变换. 如果非零向量 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 被 $\mathscr{A}$ 映到它的某个倍向量，即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\beta}$ 对某个 $\lambda\in F$ 成立，就称 λ 是 $\mathscr{A}$ 的**特征值**(eigenvalue)，$\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**(eigenvector).

定理 6.5.1 线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 可对角化的充分必要条件是：存在 $\mathscr{A}$ 的一组特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 组成 V 的一组基. □

算法 6.5.1 **求方阵 $A\in F^{n\times n}$ 的特征值和特征向量：**

(1) 求出 $\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+\cdots$，它是 λ 的 n 次多项式，称为 A 的**特征多项式**(eigenpolynomial)；

(2) 解一元 n 次方程 $\varphi_A(\lambda)=0$，求出它在 F 中的所有的不同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$，就是 A 的特征值(也称为 A 的特征根)；

(3) 对 A 的每个特征值 λ_i，齐次线性方程组 $(A-\lambda_iI)X=0$ 必然有非零解. $(A-\lambda_iI)X=0$ 的非零解就是 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量. □

如果要求线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 的特征值和特征向量，先取 V 的任一组基 $M=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，设 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 A. 则方阵 A 的特征值就是 $\mathscr{A}$ 的特征值. 以 A 的特征向量为坐标(在基 M 下的坐标)的向量就是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

定理 6.5.2 如果 A，B 相似，则 A，B 的特征多项式相同，从而 A，B 的特征值完全相同. 换句话说：特征多项式和特征值是相似不变量.

定义 6.5.3 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的线性变换，A 是 $\mathscr{A}$ 在 V 任意一组基下的矩阵. 则 A 的特征多项式 $\det(\lambda I-A)$ 称为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，记作 $\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda)$. □

$\mathscr{A}$ $B=\mathscr{B}A$

命题 6.5.3 设 A 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\tag{6.5.15}$$

则

$$\mathrm{tr}\,A=-a_1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$$
$$\det A=(-1)^na_n=\lambda_1\cdots\lambda_n$$

在特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 的分解式 (6.5.15) 中的 n 个根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 可能有重复. 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 $\varphi_A(\lambda)$ 的全部不同的特征值，则 $\varphi_A(\lambda)$ 的分解式写成

$$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$

其中每个一次因子 $\lambda-\lambda_i$ 的指数 n_i 称为特征值 λ_i 的**代数重数**(algebraic multiplicity)，至少为 1. 各根的代数重数之和 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$.

命题 6.5.4 如果方阵 A 是准上三角形矩阵(或准下三角形矩阵)，则 A 的特征多项式等于它的对角块的特征多项式的乘积.

特别，如果 A 是上三角形矩阵(或下三角形矩阵)，则它的对角元就是它的全部特征值.

相似：特征值. 特征多项式. tr. det 不变

6.6 特征子空间

定义 6.6.1 设 $\lambda_0\in F$ 是矩阵 $A\in F^{n\times n}$ 的特征值，则

$$V_{\lambda_0}=\{X\in F^{n\times1}\mid(A-\lambda_0I)X=0\}=\{X\in F^{n\times1}\mid AX=\lambda_0X\}$$

是 $F^{n\times1}$ 的子空间，称为 A 的属于特征值 λ_0 的**特征子空间**(eigensubspace).

设 $\lambda_0\in F$ 是线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 的特征值，则

$$V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\}=\mathrm{Ker}\,(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})$$

是 V 的子空间，称为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的**特征子空间**. □

推论 6.6.1 对每个 $1\leq i\leq t$，设 $\dim V_{\lambda_i}=m_i$，$\{\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im_i}\}$ 是 V_{λ_i} 的一组基. 则各特征子空间 V_{λ_i} 的基 M_i 所含向量共同组成的集合 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_{ij}\mid1\leq i\leq t,1\leq j\leq m_i\}$ 线性无关，它包含 $m_1+m_2+\cdots+m_t$ 个线性无关的特征向量，是 $\mathscr{A}$ 的特征向量集合的一个极大线性无关组.

V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow\mathscr{A}$ 的各特征子空间 V_{λ_i} 的维数之和等于 $\dim V$.

定义 6.6.2 设 λ_i 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的任意一个特征值，则特征子空间 V_{λ_i} 的维数 m_i 称为 λ_i 的**几何重数**(geometric multiplicity). □

定理 6.6.2 设 λ_i 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值，它的代数重数为 n_i，几何重数为 m_i，则

(1) $1\leq m_i\leq n_i$.

(2) $\mathscr{A}$ 可对角化的充分必要条件是：每个特征值的几何重数都等于代数重数.

推论 6.6.2 如果 $\mathscr{A}$ 的所有特征值都是单根(即代数重数为 1)，则 $\mathscr{A}$ 可对角化. □

6.7 最小多项式

定义 6.7.1 设 $A\in F^{n\times n}$. 如果系数在 F 中的非零多项式 $f(\lambda)\in F[\lambda]$ 满足条件 $f(A)=O$，就称 $f(\lambda)$ 是 A 的**零化多项式**(annihilator). A 的所有化零多项式中次数最低的首一多项式称为 A 的**最小多项式**(minimal polynomial)，记作 $d_A(\lambda)$.

定理 6.7.1 设 $f(\lambda)$ 是方阵 A 的零化多项式，$d_A(\lambda)$ 是 A 的最小多项式. 则：$f(\lambda)$ 是 $d_A(\lambda)$ 的倍式；$d_A(\lambda)$ 由 A 唯一决定.

定理 6.7.2 复方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式没有重根.

定理 6.7.3 复数域上的 n 阶方阵 A 相似于上三角形矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

B 的主对角线元 $b_{11},\cdots,b_{nn}$ 就是 A 的全体特征值，并且这些特征值可以按预先指定的任何顺序排列.

推论 6.7.1 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 的线性变换. 则存在 V 的基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为上三角形矩阵，其主对角线元是 $\mathscr{A}$ 的全体特征根，并且可以按预先指定的任意顺序排列. □

定理 6.7.4 (Cayley-Hamilton 定理) 任意方阵 $A\in F^{n\times n}$ 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda)=\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_n$$

都是 A 的零化多项式. 即

$$\varphi_A(A)=A^n-c_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_nI=O$$

推论 6.7.2 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)$ 是特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 的因式.

如果

$$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的全部不同的特征值. 则 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)$ 为

$$d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_t}$$ ★包含全部特征值

其中 $1\leq k_i\leq n_i,\forall1\leq i\leq t$.

定义 6.7.2 如果存在正整数 k 使 $A^k=O$ 对方阵 A 成立，就称 A 是**幂零的**(nilpotent). □

推论 6.7.3 A 是幂零的 $\Leftrightarrow A$ 只有唯一的特征值 0. □

教材习题

6.1 1. 判断下面所定义的变换或映射 $\mathscr{A}$，哪些是线性的，哪些不是：

线性：零→零

(1) 数域 F 上线性空间 V 的变换 $\mathscr{A}:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，其中 $\lambda\in F$ 与 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 预先给定；

$\beta=0$ 时是. $\beta\neq0$ 时 $\mathscr{A}(0)\neq0$. 不是

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,4)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2)$.

(1) 是否存在线性映射 $\mathscr{A}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别映到 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$?

(2) 是否存在线性映射 $\mathscr{A}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 将 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 分别映到 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$?

(1) 设 $\mathscr{A}: X\mapsto AX$ $A(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)$ $K=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-2\\1&4&4\end{pmatrix}$ 可逆. 则存在

(2). 有 β_1,β_2,β_3 线性相关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. $AB=K$ 不可能. 不存在.

过渡：$(\alpha_1,\cdots,\alpha_3)=IP\Rightarrow P=(\ ,\ \vdots\ \vdots)$

7. 设线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$ 分别变换到 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=(2,3,5)$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=(1,0,0)$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=(0,1,-1)$. 分别求 $\mathscr{A}$ 在 F^3 的自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 以及基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵.

坐标为 X→为 AX

则 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\ldots,e_3)A=\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P^{-1}$

在 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下. $A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{pmatrix}$. 在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下. A_1 为此基下 $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的坐标.

有 $\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}A_1$ $((\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A_1)$

8. 设 $\mathscr{A}: F^{1\times3}\to F^{1\times2}$，$(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$

(1) 求证 $\mathscr{A}$ 是线性映射，并求出 $\mathscr{A}$ 在 $F^{1\times3}$，$F^{1\times2}$ 的自然基下的矩阵.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，$M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 下的矩阵，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1);\boldsymbol{\beta}_1=(1,0),\boldsymbol{\beta}_2=(1,1)$

(1) $\mathscr{A}(\lambda X_1+X_2)=(\lambda X_1+X_2)A=\lambda X_1A+X_2A=\lambda\mathscr{A}(X_1)+\mathscr{A}(X_2)$

即求 $X\mapsto AX$ 中的 A. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$

(2). 有 $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2)B$. B 可求.

6.2 1. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两组基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，$M_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,3)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(4,3,8)$.

(1) 求基 M_1 到 M_2 的过渡矩阵.

(2) 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 M_1 和 M_2 下的坐标.

(3) $\mathbf{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别映到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，分别求 $\mathscr{A}$ 在两组基下的矩阵.

(1) $M_2=M_1P$. P 可求 (2) M_1: $X=(1,3,-4)^T$. M_2: $X=PY$. 则 $Y=P^{-1}X$. (3) 设为 A.B. 有 $\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)=P$. 则 $A=P$.

P 的第 i 列是 β_i 在 M_1 下的坐标, P^{-1} 的第 i 列是 α_i 在 M_2 下的坐标

有 $\mathscr{A}(X_1,X_2,X_3)=(e_1,e_2,e_3)=I$. 则 $B=P$. $B=P^{-1}AP=P^{-1}PP=P$

6.3 3. 设 $\mathscr{A}: U \to V$ 是有限维线性空间之间的线性映射，W 是 U 的子空间. 求证：

$$\dim \mathscr{A}(W) \geqslant \dim W - \dim U + \operatorname{rank} \mathscr{A}$$

考虑 $\mathscr{A}$ 在 W 上的限制：$\mathscr{A}|_W: W \to V$. $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}|_W = \dim W - \dim \mathscr{A}(W)$

又 $\operatorname{Ker} \mathscr{A}|_W \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim U - \operatorname{rank} \mathscr{A} \Rightarrow$ 由 $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}|_W \leqslant \dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. 得证.

7. V 是数域 F 上 n 维线性空间，f，g 是 V 上两个线性函数. 已知 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$，求证：存在非零常数 $c \in F$ 使 $g = cf$.

$\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F = 1$. $\dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Im} f \geqslant n-1$. 若 $\dim \operatorname{Ker} f = n$. 则 $f = g = 0$. 故正. 若 $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} g = n-1$

将 $\operatorname{Ker} f$ 的一组基 $\{\alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 扩充为 V 的一组基 $M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. $S = \{1\}$ 为 F 的基. 则 f, g 在 M, S 下的矩阵为 $A = (a, 0, \cdots, 0)$，$B = (b, 0, \cdots, 0)$ 取 $c = ba^{-1}$ 即可

6.4 1. 以下的矩阵 A，B 是否相似？说明理由.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

取 $f(x) = x - 1$. $\operatorname{rank} f(A) = 1 \neq 2 = \operatorname{rank} f(B)$.

不相似

3. 已知数域 F 上方阵 A 满足条件 $\operatorname{rank}(A - I) = 1$ 且 $(A - I)^2 = O$. 求证：A 相似于 $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\right)$.

设 $B = A - I$. $\operatorname{rank} B = 1$ 且 $B^2 = 0$. $\exists P_1, Q_1$ 为可逆方阵 相 B 相抵于标准形 $D_1 = \operatorname{diag}(1, 0, \cdots, 0)$

有 B 相似于 $B_1 = P_1 B P_1^{-1} = D_1 Q_1^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且由 $B_1^2 = P_1 B^2 P_1^{-1} = 0$ 知 $\alpha = 0$. $\beta \neq 0$.

$\exists Q_2$ 为可逆方阵. $\beta Q_2 = (1, 0, \cdots, 0)$ 取 $P_2 = \operatorname{diag}(1, Q_2)$. 有 $N = P_2^{-1} B_1 P_2 = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right)$

取 $P = P_2^{-1} P_1$. 则 $B = P^{-1} N P$. $A = I + B$ 相似于 $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\right)$

6.5 1. 求下列矩阵 A 的全部特征值和特征向量. 如果 A 可对角化，求可逆方阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；

(2). $\varphi_A(x) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 特征值为 1, 2, 3. $\lambda = 1$ 时 $(I - A)X = 0 \Rightarrow$ 通解为 $X = (c, 0, 0)$

$\lambda = 2$ 时 $(2I - A)X = 0 \Rightarrow$ 通解为 $X = (c, c, 0)$

$\lambda = 3$ 时 $(3I - A)X = 0 \Rightarrow$ 通解为 $X = (0, c, c)$

于是可取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

6.6 2. 设 λ_1，λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个不同的特征值，X_1，X_2 是分别属于 λ_1，λ_2 的特征向量，证明：$X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

有 X_1, X_2 线性无关. 若是 A 特征向量. 则 $A(X_1 + X_2) = \lambda_0(X_1 + X_2)$ $\lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$

又 $0 = A(X_1 + X_2) - \lambda_0(X_1 + X_2) = (\lambda_1 - \lambda_0)X_1 + (\lambda_2 - \lambda_0)X_2 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ 矛盾！

6.7 2. 在复数域上把下列矩阵 A 相似变形到上三角形或对角阵 $P^{-1}AP$，并求出过渡矩阵 P. 并求出 A 的最小多项式.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$；　　(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(1). $\varphi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. $X_1 = (1, -1, 1)^T$ 添加 e_2, e_3 扩为一组基 有 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A_1 = P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

取 A_1 右下角 2 阶方阵. 有 $\lambda_1 = 1$. $Y_1 = (1, -1)^T$. 添 e_2 扩为一组基. 有 $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $T = P_2^{-1} A_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

故 $T = P^{-1}AP$. $P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 将 A 相似为上三角阵 T.

A 的最小多项式 $d_A(x) = d_T(x)$. 有 $\varphi_T(x) = (x-1)^3$. 计算知 $(T - I)^2 \neq 0 \Rightarrow d_A(x) = (x-1)^3$.

6.8 5. 已知 A 的最小多项式 $d_A(\lambda) = (\lambda - a)^m$. 求 $\begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

$\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I - A & -I \\ & \lambda I - A \end{vmatrix} = \varphi_A^2(\lambda)$ 则 φ_B 的根都是 φ_A 的根 $\Rightarrow d_B(\lambda) = (\lambda - a)^d$

有 $(B - aI)^d = \begin{pmatrix} A - aI & I \\ & A - aI \end{pmatrix}^d = \left[\begin{pmatrix} A - aI & \\ & A - aI \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^d = \begin{pmatrix} A - aI & \\ & A - aI \end{pmatrix}^d + d\begin{pmatrix} A - aI & \\ & A - aI \end{pmatrix}^{d-1}\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (A - aI)^d & d(A - aI)^{d-1} \\ & (A - aI)^d \end{pmatrix}$ 由 $d_A(\lambda) = (\lambda - a)^m \Rightarrow (A - aI)^k = 0$. $k \geqslant m$ 则 $d \geqslant m+1$

即有 $\varphi_B(\lambda) = (\lambda - a)^{m+1}$

第七章 Jordan 标准形

知识点&例题

定义 7.1.1 设 a 是任意复数，m 是任意正整数，形如

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}_{m \times m}$$

的 m 阶方阵称为 **Jordan 块**(Jordan block)，记作 $J_m(a)$，其中 m 表示它的阶数，a 是它的对角线元，也就是它的特征值.

如果一个方阵 J 是准对角阵，并且所有的对角块都是 Jordan 块，就称这个准对角阵为 **Jordan 形矩阵**(matrix of Jordan type). □

注意 每个复数 a 都可以看作一阶的 Jordan 块 $J_1(a)$. 每个对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 都可以看作由一阶 Jordan 块 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 组成的准对角阵，因此都是 Jordan 形矩阵.

定义 7.1.2 设 V 是数域 F 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，a 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，$0 \neq \beta \in V$. 如果存在正整数 k 使得

$$(\mathscr{A} - a\mathscr{I})^k(\beta) = 0$$

就称 β 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 a 的**根向量**(root vector). 此时必然存在使

$$(\mathscr{A} - a\mathscr{I})^m(\beta) = 0$$

的最小的正整数 m，也就是说

$$(\mathscr{A} - a\mathscr{I})^m(\beta) = 0 \text{ 且 } (\mathscr{A} - a\mathscr{I})^{m-1}(\beta) \neq 0,$$

我们称 β 为 m 次根向量.

数域 F 上每个 n 阶方阵 A 在 n 维列向量空间 $F^{n \times 1}$ 上引起一个线性变换 $\mathscr{A}$: $X \mapsto AX$. $\mathscr{A}$ 的根向量也称为 A 的根向量，$\mathscr{A}$ 的 m 次根向量也称为 A 的 m 次根向量. □

定理 7.1.1 设复方阵 A 相似于 Jordan 形矩阵 J. 则对 A 的每个特征值 λ_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$，可以利用等式

$$\operatorname{rank}(J - \lambda_i I)^k = \operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^k \quad (\forall \text{ 正整数 } k)$$

来确定 J 中属于特征值 λ_i 的 Jordan 块 $J_{m_{i1}}(\lambda_i), \cdots, J_{m_{ik_i}}(\lambda_i)$ 的阶 $m_{i1}, \cdots, m_{ik_i}$，从而确定 J. 具体公式为：

计算 $r_k = \operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^k$，并约定 $r_0 = n$. 计算 $d_k = r_{k-1} - r_k$，$\forall k \geqslant 1$，则 $d_k \geqslant d_{k+1}$. 计算 $\delta_k = d_k - d_{k+1}$，$\forall k \geqslant 1$. 则：

J 中的 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda_i)$ 共有 δ_k 个.

推论 7.1.1 如果复方阵 A 相似于 Jordan 形矩阵 J，则除了各 Jordan 块的排列顺序可以任意改变，J 由 A 唯一确定.

定理 7.2.1 设 n 维复线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 具有 t 个不同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$，特征多项式

$$\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{n_t}.$$

则对每个特征值 λ_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$，$\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全体根向量与零向量一起组成子空间 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{I})^{n_i}$，其维数等于 n_i.

定义 7.2.1 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全体根向量与零向量共同组成的子空间称为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 的**根子空间**(root subspace)，记为 W_{λ_i}. □

我们证明：$\mathscr{A}$ 作用的线性空间 V 是 $\mathscr{A}$ 的各根子空间的直和. 因而可以由这些根子空间的基向量共同构成 V 的一组基.

定理 7.2.2 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ 是 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部不同的特征值，则

$$V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_t}$$

定理 7.2.3 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ 是 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部不同的特征值，代数重数分别为 $n_1, \cdots, n_t$. 则：

(1) $\mathscr{A}$ 将每个根子空间 W_{λ_i} 映到 W_{λ_i} 中：$\mathscr{A}(W_{\lambda_i}) \subseteq W_{\lambda_i}$，因而 $\mathscr{A}$ 的作用引起 W_{λ_i} 的一个线性变换 $\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}}$：$\beta \mapsto \mathscr{A}(\beta)$；

(2) 取每个根子空间 W_{λ_i} 的一组基 $M_i = \{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in_i}\}$. 则各组基中的向量(都是根向量)共同组成的集合

$$M = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$$

是 V 的一组基；

(3) 设 $\mathscr{A}_{W_{\lambda_i}}$ 在基 M_i 下的矩阵为 $A_i \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i}$. 则 $\mathscr{A}$ 在 M 下的矩阵是准对角阵

$$\operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_t)$$

且可适当选择各个根子空间的基使每个 A_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ 是上三角形矩阵，其对角元全为 λ_i.

定义 7.2.2 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性变换. 如果 V 的子空间 W 被 $\mathscr{A}$ 的作用映到 W 中，即

$$\mathscr{A}(W) = \{\mathscr{A}(\alpha) \mid \alpha \in W\} \subseteq W$$

就称 W 是 $\mathscr{A}$ 的**不变子空间**(invariant subspace)，也称 $\mathscr{A}$ 不变子空间.

如果 W 是线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 的不变子空间，则 $\mathscr{A}$ 的作用在 W 上引起线性变换

$$\mathscr{A}|_W: W \to W,\ \alpha \mapsto \mathscr{A}(\alpha)$$

称为 $\mathscr{A}$ 在 W 上的**限制**(restriction). □

定理 7.2.4 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性映射，W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 将 W 的基 $M_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 扩充为 V 的基 $M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \cdots, \alpha_n\}$. 则 $\mathscr{A}$ 在基 M 下的矩阵为准上三角形

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \tag{7.2.6}$$

其中 $A_{11} \in F^{m \times m}$ 是 $\mathscr{A}|_W$ 在基 M_1 下的矩阵.

如果 $M_2 = \{\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\}$ 生成的子空间 U 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $\mathscr{A}$ 在 M 下的矩阵具有准对角形

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \tag{7.2.7}$$

其中 A_{11}，A_{22} 分别是 $\mathscr{A}|_W$，$\mathscr{A}|_U$ 在基 M_1，M_2 下的矩阵.

反过来，如果线性变换 $\mathscr{B}$: $V \to V$ 在 V 的基 $M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵具有形式

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \tag{7.2.8}$$

其中 $B_{11} \in F^{m \times m}$，则 $W = V(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

推论 7.2.1 设 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，V 是不变子空间 $W_1, \cdots, W_t$ 的直和. 取每个 W_i 的一组基 M_i，依次将 $M_1, \cdots, M_t$ 的向量排列起来组成 V 的基 M. 则 $\mathscr{A}$ 在基 M 下的矩阵为准对角矩阵

$$\operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_t)$$

其中每个 A_i 是 $\mathscr{A}|_{W_i}$ 在基 M_i 下的矩阵，$\forall 1 \leqslant i \leqslant t$.

证明 当 $t = 2$ 时结论是定理 7.2.4 的一部分. 对 t 作数学归纳法容易证明命题对任意正整数 t 成立. □

推论 7.2.2 设 A 是 n 阶复方阵，记 $V = \mathbf{C}^{n \times 1}$，$\mathscr{A}$: $V \to V$，$X \mapsto AX$. 则 $\mathscr{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow V$ 是 $\mathscr{A}$ 的一维不变子空间的直和.

证明 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{A}$ 的特征向量 $X_1, \cdots, X_n$ 构成 V 的基

$\Leftrightarrow V$ 是 $\mathscr{A}$ 的一维不变子空间 $FX_1, \cdots, FX_n$ 的直和. □

定理 7.3.1 设 $\mathscr{A}$ 是 V 上线性变换，$\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 a 的 m 次根向量，即 $(\mathscr{A}-a\mathscr{I})^{m}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}\neq(\mathscr{A}-a\mathscr{I})^{m-1}(\boldsymbol{\beta})$．对每个 $1\leqslant i\leqslant m$，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(\mathscr{A}-a\mathscr{I})^{m-i}(\boldsymbol{\beta})$．则

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，组成子空间 $U=V(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的一组基 M_1．

（2）U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．$\mathscr{A}|_U$ 在基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 Jordan 块

$$\boldsymbol{J}_m(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & a\end{pmatrix}$$

定义 7.3.1 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上线性空间 V 上的线性变换，$S\subseteq V$．则 V 中包含 S 的全体 $\mathscr{A}$ 不变子空间的交仍然是包含 S 的 $\mathscr{A}$ 不变子空间，因此是包含 S 的最小 $\mathscr{A}$ 不变子空间，称为由 S 生成的 $\mathscr{A}$ 不变子空间．特别，由 V 中一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 生成的 $\mathscr{A}$ 不变子空间称为**循环子空间**（cyclic subspace）． □

引理 7.3.2 设 V 是数域 F 上线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\beta}\in V$，$U$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 生成的循环子空间．则

U 是由所有的 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\beta})$（$k$ 为非负整数）生成的子空间．（约定 $\mathscr{A}^0=\mathscr{I}$）．

$U=\{f(\mathscr{A})(\boldsymbol{\beta})\mid f(\lambda)\in F[\lambda]\}$，其中 $F[\lambda]$ 是系数在 F 中、以 λ 为字母的全体多项式组成的集合．

定义 7.3.2 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上线性空间 V 上的线性变换，$\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\beta}\in V$．满足条件

$$f(\mathscr{A})(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$$

的非零多项式 $f(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{\beta}$（相对于 $\mathscr{A}$）的**零化多项式**（annihilator），其中次数最低的首一的零化多项式称为 $\boldsymbol{\beta}$（相对于 $\mathscr{A}$）的**最小多项式**（minimal polynomial），记作 $d_{\mathscr{A},\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$，在 $\mathscr{A}$ 给定之后也可简记为 $d_{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$． □

定理 7.3.3 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$d_{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\lambda^m$$

是 $\boldsymbol{\beta}$ 相对于 $\mathscr{A}$ 的最小多项式．则

（1）$M_1=\{\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\beta}),\cdots,\mathscr{A}^{m-1}(\boldsymbol{\beta})\}$ 是循环子空间 $U=F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\beta}$ 的一组基．

（2）$\mathscr{A}|_U$ 在基 M_1 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & \ddots & & -a_1\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -a_{m-1}\end{pmatrix}_{m\times m}\qquad(7.3.4)$$

定理 7.4.1 设 $\mathscr{A}$ 是有限维复线性空间 V 上的线性变换．则存在一组基 M 使 $\mathscr{A}$ 在 M 下的矩阵是 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{J}$．

对任意复方阵 $\boldsymbol{A}$，存在同阶可逆复方阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 是 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{J}$．

如果不计较 Jordan 块的排列顺序，则上述 $\boldsymbol{J}$ 分别由线性变换 $\mathscr{A}$ 和方阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定． □

由于每个复方阵都相似于唯一的 Jordan 形矩阵，因此 Jordan 形矩阵可以作为相似等价类的代表，称为 **Jordan 标准形**（Jordan canonical form）．

定理 7.4.2 设数域 F 上 n 维线性空间 W 的线性变换 $\mathscr{B}$ 的特征值全为零．则存在 W 的基使 $\mathscr{B}$ 在这组基下的矩阵是 Jordan 标准形

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_{m_1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{m_i}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{m_d}(0))$$

其中 d 是特征子空间 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{B}$ 的维数．而 W 是 d 个循环子空间的直和．

例 1 求

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&2&0&1&2&3\\0&0&2&0&1&-1\\0&0&0&2&1&2\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$，并求可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$． 特征值1的根子空间.

解：$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^5$. 对 $\lambda=1$. $(A-I)X=0$ 有 $\dim \mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=6-\mathrm{rank}(A-I)=1$; 1个 Jordan 块 $J_1(1)$
基础解系为 $X_1=(1,0,0,0,0,0)^T$

对 $\lambda=2$. $B=A-2I$. $\mathrm{rank}\,B=4$. $\mathrm{rank}\,B^2=2$. $\mathrm{rank}\,B^3=1$

解 $(A-2I)Y=0\Rightarrow S_1=\{Y_1,Y_2\}=\{(1,1,0,0,0,0)^T,(1,0,1,0,0,0)^T\}$

解 $(A-2I)^2Y=0$. 将 S_1 扩充为 $\mathrm{Ker}\,B^2$ 的一组基 $M_2=S_1\cup S_2$. $S_2=\{Y_3,Y_4\}=\{(0,0,0,1,0,0)^T,(0,0,3,0,2,-1)^T\}$

解 $(A-2I)^3Y=0$. 将 M_2 扩充为 $\mathrm{Ker}\,B^3$ 的一组基. $M_3=M_2\cup S_3$. $S_3=\{Y_5\}=\{(0,0,0,0,1,-2)^T\}$

有 $B^2(Y_5)=(A-2I)^2Y_5=(-3,-3,0,0,0,0)^T$. $B^2(Y_3)=(1,1,0,0,0,0)^T$. $B^2(Y_4)=(4,1,3,0,0,0)^T$

则 $T=\{B^2(Y_5),B(Y_3),B(Y_4),Y_1,Y_2\}$ 的极大线性无关组为 $T^*=\{B^2(Y_5),B(Y_4)\}$

特征值为2的根子空间 W_2 的基：$0\leftarrow B^2(Y_5)\leftarrow B(Y_5)\leftarrow Y_5$. $0\leftarrow B(Y_4)\leftarrow Y_4$. B 在此基下的矩阵为 $B=\mathrm{diag}(J_3(0),J_2(0))$

则 A 的 $\lambda=2$ 的 Jordan 形为 $\mathrm{diag}(J_3(2),J_2(2))\Rightarrow A$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}1&&&&&\\&2&1&&&\\&&2&1&&\\&&&2&&\\&&&&2&1\\&&&&&2\end{pmatrix}$

对 $P=(X_1,B(Y_4),Y_4,B^2(Y_5),B(Y_5),Y_5)$ 有 $P^{-1}AP=J$.

定义 7.4.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$ 中每个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_{m_{ij}}(\lambda_i)$ 的特征多项式（也就是最小多项式）$(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**初等因子**（elementary divisor）．$\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子组成的集合称为 $\boldsymbol{A}$ 的**初等因子组**（elementary divisors）． □

定理 7.4.3 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$，初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{m_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}}$$
$$(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{m_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}}$$

其中 $m_{i1}\geqslant m_{i2}\geqslant\cdots\geqslant m_{ik_i}$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant t$．则

（1）$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$

其中 $n_i=m_{i1}+m_{i2}+\cdots+m_{ik_i}$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant t$．

（2）$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式

$$d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}}$$

（3）$\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数等于 k_i．

（4）$\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵

$\Leftrightarrow$ 所有的初等因子次数 $m_{i1}=1$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant t$

$\Leftrightarrow$ 最小多项式 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_t)$ 没有重根． □

例 3 由 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组 $\{\lambda,\lambda^2,(\lambda+1)^3,\lambda-1,\lambda-1\}$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 和最小多项式 $d_A(\lambda)$．

解 $\boldsymbol{A}$ 相似于 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1(0),\boldsymbol{J}_2(0),\boldsymbol{J}_3(-1),\boldsymbol{J}_1(1),\boldsymbol{J}_1(1))$．

$$\varphi_A(\lambda)=\varphi_J(\lambda)=\lambda\cdot\lambda^2\cdot(\lambda+1)^3\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)=\lambda^3(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2$$

最小多项式 $d_A(\lambda)=d_J(\lambda)$ 等于各 Jordan 块最小多项式（即初等因子）的最小公倍式

$$\lambda^{k_0}(\lambda+1)^{k_{-1}}(\lambda-1)^{k_1},$$

其中的指数 k_0，k_{-1}，k_1 分别是初等因子组中 λ，$\lambda+1$，$\lambda-1$ 的指数的最大值，分别等于 2，3，1．因此

$$d_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)\qquad\square$$

定义 7.5.1 设 $F[\lambda]$ 是系数在数域 F 中，以 λ 为字母的全体多项式组成的集合．$F[\lambda]$ 中的元组成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 称为 λ 矩阵，也称多项式矩阵．

λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中非零子式的最大阶数 r 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩，记作 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}(\lambda)$．

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 $n\times n$ λ 矩阵．如果存在 λ 矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{I}.$$

就称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆的 λ 矩阵，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆． □

定理 7.5.3 设 $m\times n$ λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 可以经过有限次初等变换化为如下形式

$$\boldsymbol{S}(\lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}(\lambda) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda))$，$d_i(\lambda)$ 是 $F[\lambda]$ 中的首一多项式，且每个 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_{i+1}(\lambda)$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant r-1$．

定义 7.5.3 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 都是 $m\times n$ λ 矩阵．如果存在 m 阶可逆 λ 方阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 和 n 阶可逆 λ 方阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$，使

$$\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)$$

就称 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵（equivalent）． □

推论 7.5.1 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是秩为 r 的 $m\times n$ λ 矩阵，则存在 m 阶初等 λ 方阵 $\boldsymbol{P}_1(\lambda)$，$\boldsymbol{P}_2(\lambda)$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_s(\lambda)$ 和 n 阶初等 λ 方阵 $\boldsymbol{Q}_1(\lambda)$，$\boldsymbol{Q}_2(\lambda)$，$\cdots$，$\boldsymbol{Q}_t(\lambda)$，使

$$\boldsymbol{P}_s(\lambda)\cdots\boldsymbol{P}_2(\lambda)\boldsymbol{P}_1(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}_1(\lambda)\boldsymbol{Q}_2(\lambda)\cdots\boldsymbol{Q}_t(\lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}(\lambda) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{D}(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda))$，$d_i(\lambda)$ 是 $F[\lambda]$ 中的首一多项式，且每个 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_{i+1}(\lambda)$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant r-1$． □

推论 7.5.2 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 是可逆 λ 方阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{P}(\lambda)$ 是有限个初等 λ 方阵的乘积．

定义 7.6.1 对每个正整数 $k\leqslant\min\{m,n\}$，$m\times n$ λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中所有的 k 阶非零子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k **阶行列式因子**（determinant divisor），记为 $D_k(\lambda)$．如果 $k>\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}(\lambda)$，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有的 k 阶子式都等于零，则约定 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)=0$． □

定理 7.6.1 $m\times n$ λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵的充分必要条件是：对每个正整数 $k\leqslant\min\{m,n\}$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子相同．

推论 7.6.1 设 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子为 $D_k(\lambda)$（$1\leqslant k\leqslant r=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}(\lambda)$），并约定 $D_0(\lambda)=1$．则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于如下的 Smith 标准形

$$\boldsymbol{S}(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),\boldsymbol{O})$$

其中每个 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_{i+1}(\lambda)$，$\forall\,1\leqslant i\leqslant r-1$，且

$$d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\qquad(\forall\,1\leqslant k\leqslant r)$$

由 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 唯一决定． □

定义 7.6.2 设 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 r，对每个 $1\leqslant k\leqslant r$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$，并约定 $D_0(\lambda)=1$．则 $d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$（$1\leqslant k\leqslant r$）称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的**不变因子**（invariant divisor）．

对每个不等于常数的复系数多项式 $f(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$，将 $f(\lambda)$ 分解为一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 两两不同，则每一个一次因式 $\lambda-\lambda_i$ 在 $f(\lambda)$ 的分解式中的最高次幂 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 称为 $f(\lambda)$ 的一个**初等因子**（elementary divisor）．$f(\lambda)$ 的所有的初等因子组成的集合

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$

称为 $f(\lambda)$ 的**初等因子组**（elementary divisors）．将 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的各个不等于常数的不变因子 $d_k(\lambda)$ 的初等因子组合并得到的集合称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的**初等因子组**．

定理 7.6.2 复数域上 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 具有相同的秩及相同的初等因子组．

定理 7.6.3 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\mathrm{diag}(f_1(\lambda),\cdots,f_r(\lambda))$ 是对角元全不为零的 λ 对角阵．则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的各对角元 $f_i(\lambda)$（$1\leqslant i\leqslant r$）的初等因子共同组成的集合就是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子组．

推论 7.6.2 （1）准对角阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1(\lambda),\cdots,\boldsymbol{A}_m(\lambda))$ 的初等因子组由它的各对角块 $\boldsymbol{A}_i(\lambda)$（$1\leqslant i\leqslant m$）的初等因子组合并得到．

（2）设 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_s)$ 是 Jordan 形矩阵，其中每个

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$$

是特征值为 λ_i 的 m_i 阶 Jordan 块（$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 不一定两两不同）．则 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$ 作为 λ 矩阵的初等因子组与 $\boldsymbol{J}$ 作为复方阵的初等因子组相同，等于 $\{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\mid 1\leqslant i\leqslant s\}$．

定义 7.7.1 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$．则 λ 矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方阵**（eigenmatrix）． □

定理 7.7.3 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是数域 F 上的 n 阶方阵．则

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在 F 上相似 $\Leftrightarrow$ 特征方阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 在 F 上相抵．

定理 7.7.4 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是数域 F 上的 n 阶方阵．K 是数域且 $K\supset F$．则

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 在 F 上相似 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 在 K 上相似．

特别，取 K 为复数域，得

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 在 F 上相似 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 复相似．

定理 7.7.2 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的矩阵．设数域 F 上的 n 阶方阵 A 的特征方阵 $\lambda I-A$ 的前 s 个不变因子 $d_i(\lambda)=1$，后 $n-s$ 个不变因子

$$d_i(\lambda)=\lambda^{d_i}+a_{i,d_i-1}\lambda^{d_i-1}+\cdots+a_{i1}\lambda+a_{i0}\quad(\forall\, s+1\leqslant i\leqslant n)$$

次数 $d_n\geqslant d_{n-1}\geqslant\cdots d_{s+1}\geqslant 1$．则

（1）V 是 $n-s$ 个循环子空间 U_{s+1}，…，U_n 的直和，其中每个循环子空间 $U_i(s+1\leqslant i\leqslant n)$ 的生成元 $\boldsymbol{\beta}_i$ 相对于 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $d_i(\lambda)$．

（2）A 在 F 上相似于标准形

$$B=\mathrm{diag}(B_{s+1},\cdots,B_n)$$

其中

$$B_i=\begin{pmatrix}0 & & & -a_{i0}\\ 1 & \ddots & & -a_{i1}\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -a_{i,d_i-1}\end{pmatrix}_{d_i\times d_i},\quad\forall\, s+1\leqslant i\leqslant n\quad\square$$

由于 $\lambda I-A$ 的不变因子都可以由 $\lambda I-A$ 的元经过有限次辗转相除法得到，都是 F 上的多项式，并且由 $\lambda I-A$ 唯一决定，从而由 A 唯一决定．因此定理 7.7.2 中所说的标准形是数域 F 上的矩阵，由 A 唯一决定，称为 A 的**有理标准形**(rational canonical form)．

考虑 A 的左乘作用在列向量空间 $F^{n\times 1}$ 上引起的线性变换 $\mathscr{A}: X\mapsto AX$．则 A 是 $\mathscr{A}$ 在 $F^{n\times 1}$ 的自然基 $M=\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的矩阵．作 λ 矩阵 $\lambda I-A$ 的相抵变换，找到可逆的 λ 矩阵 $P(\lambda)$，$Q(\lambda)$ 使 $P(\lambda)(\lambda I-A)Q(\lambda)$ 等于 Smith 标准形 $\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$．则由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)P(\mathscr{A})^{-1}$$

可以求得循环子空间的生成元 $\boldsymbol{\beta}_{s+1}$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$，进而求得每个循环子空间的基 $B_i=\{\boldsymbol{\beta}_i,\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_i),\cdots,\mathscr{A}^{d_i-1}(\boldsymbol{\beta}_i)\}$．依次以基 $B_i(s+1\leqslant i\leqslant n)$ 中的向量作为各列组成可逆矩阵 T，则 $T^{-1}AT$ 是有理标准形．

定理 7.7.5 设 n 阶复方阵 A 的特征方阵的初等因子组为

$$E=\{(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}\mid 1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant k_i\}.$$

则 A 在复数域上相似于由各个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}$ 对应的 Jordan 块

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{m_{ij}\times m_{ij}}\quad(\forall\,1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant k_i)$$

的全体组成的 Jordan 标准形

$$J=\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & J_{m_{ij}}(\lambda_i) & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$$

例：求 $\begin{pmatrix}0&0&1&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$ 的Jordan标准形．

解：将 $\lambda I-A$ 化为Smith标准形．$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda&-1&&&\\&\lambda&-1&&\\&&\lambda&-1&\\&&&\lambda&\\&&&&\lambda\end{pmatrix}\to S(\lambda)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\lambda^2&\\&&&&\lambda^3\end{pmatrix}$ 初等因子：λ^2,λ^3

对应 $J_2(0)$．$J_3(0)$．故 A 的Jordan标准形为 $\mathrm{diag}(J_2(0),J_3(0))$

例：n阶复方阵 A 与 A^T 相似

证明：A．A^T 的特征方阵 $\lambda I-A$．$\lambda I-A^T=(\lambda I-A)^T$ 互为转置．对 $\forall 1\leqslant k\leqslant n$．$\lambda I-A^T$ 的 k 阶子式．

是 $\lambda I-A$ 的某 k 阶子式的转置．故 k 阶行列式因子相等．$\lambda I-A$ 与 $\lambda I-A^T$ 相抵．则 A 与 A^T 相似

命题 7.8.1 同阶实方阵 A 与 B 复相似 $\Leftrightarrow$ A 与 B 实相似．

引理 7.8.2 设 A 是 n 阶实方阵．则以 A 的虚特征值为根的初等因子成对共轭出现．也就是说：如果以 A 的虚特征值 τ 为根的 $\lambda I-A$ 的全部初等因子为

$$(\lambda-\tau)^{m_1},(\lambda-\tau)^{m_2},\cdots,(\lambda-\tau)^{m_r}$$

则 τ 的共轭虚数 $\bar{\tau}$ 也是 A 的虚特征值，$\lambda I-A$ 的以 $\bar{\tau}$ 为根的全部初等因子为

$$(\lambda-\bar{\tau})^{m_1},(\lambda-\bar{\tau})^{m_2},\cdots,(\lambda-\bar{\tau})^{m_r}$$

定理 7.8.3 设 n 阶实方阵 A 的全部初等因子为

$$\lambda^{n_j}(1\leqslant j\leqslant s);\quad(\lambda-\lambda_j)^{m_j}\quad(1\leqslant j\leqslant t)$$

$$(\lambda-a_j-b_j\mathrm{i})^{k_j},\quad(\lambda-a_j+b_j\mathrm{i})^{k_j}\quad(1\leqslant j\leqslant p)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的非零实特征值(不一定两两不同)，$a_1\pm b_1\mathrm{i}$，…，$a_p\pm b_p\mathrm{i}$ 是 A 的虚特征值(不一定两两不同)．则 A 实相似于如下的标准形

$$\mathrm{diag}(N_{n_1},\cdots,N_{n_s},\lambda_1M_{m_1},\cdots,\lambda_tM_{m_t},L_{k_1}(a_1\pm b_1\mathrm{i}),\cdots,L_{k_p}(a_p\pm b_p\mathrm{i})),$$

其中

$$N_{n_j}=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n_j\times n_j},\quad M_{m_j}=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}_{m_j\times m_j}$$

$$L_{k_j}(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}aM_{k_j}&bM_{k_j}\\-bM_{k_j}&aM_{k_j}\end{pmatrix}\quad\square$$

定理7.8.4 设 n 阶实方阵 A 的全部初等因子为

$$(\lambda-\lambda_j)^{n_j}\quad(1\leqslant j\leqslant t)$$

$$(\lambda-a_j-b_j\mathrm{i})^{m_j},(\lambda-a_j+b_j\mathrm{i})^{m_j}\quad(1\leqslant j\leqslant p)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的实特征值(不一定两两不同)，$a_1\pm b_1\mathrm{i}$，…，$a_p\pm b_p\mathrm{i}$ 是 A 的虚特征值(不一定两两不同)．则 A 实相似于如下的标准形：

$$\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_t}(\lambda_t),K_{m_1}(a_1\pm b_1\mathrm{i}),\cdots,K_{m_p}(a_p\pm b_p\mathrm{i})),$$

其中

$$K_{m_j}(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}L(a_j\pm b_j\mathrm{i}) & I_{(2)} & & \\ & L(a_j\pm b_j\mathrm{i}) & \ddots & \\ & & \ddots & I_{(2)}\\ & & & L(a_j\pm b_j\mathrm{i})\end{pmatrix}$$

是初等因子为 $(\lambda-a_j-b_j\mathrm{i})^{m_j}$，$(\lambda-a_j+b_j\mathrm{i})^{m_j}$ 的 $2m_j$ 阶方阵，

$$L(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}a_j&b_j\\-b_j&a_j\end{pmatrix}\quad\square$$

推论7.8.1 如果实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 有虚特征值 $a+b\mathrm{i}$，则 V 中存在 $\mathscr{A}$ 的 2 维不变子空间 W，$\mathscr{A}|_W$ 的特征值为 $a\pm b\mathrm{i}$．$\square$

教材习题

（难．略去）

第八章 二次型

知识点&例题

定义 8.1.1 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

称为 n 元**二次型**(quadratic form). □

定理 8.1.1 任意数域 F 上的二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

都可以通过配平方法找到可逆线性代换 $Y=PX$，化成标准形

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=Q_1(y_1,\cdots,y_n)=b_1y_1^2+\cdots+b_ny_n^2$$

推论 8.1.1 实数域 $\mathbf{R}$ 上的二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 可以通过可逆线性代换化为如下的形式

$$Q_1(u_1,\cdots,u_n)=u_1^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_{p+q}^2$$

定义 8.2.1 设

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

是数域 F 上的二次型，则满足条件

$$Q(X)=X^{\mathrm{T}}SX,\ \forall X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in F^{n\times 1}$$

的对称方阵 S 称为**二次型 Q 的矩阵**(matrix of quadratic form). 其中 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 的元

$$s_{ii}=a_{ii},\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n;\quad s_{ij}=s_{ji}=\frac{1}{2}a_{ij},\quad \forall 1\leqslant i<j\leqslant n$$

设 V 是数域 F 上的线性空间，M 是 V 的一组基. V 上任何一个二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha})$ 可以通过向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 M 下的坐标 X 来表示，从而可以用对称方阵 S 来表示：

$$Q(\boldsymbol{\alpha})=X^{\mathrm{T}}SX$$

S 称为 V 上的二次型 Q 在基 M 下的矩阵. □

定义 8.2.2 设 A，B 是 F 上的 n 阶方阵. 如果存在 F 上 n 阶可逆方阵 P，使

$$B=P^{\mathrm{T}}AP \tag{8.2.4}$$

就称 A 与 B 相合(congruent). □

例：通过对称方阵的相合对角化化简二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

解：$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 则 $Q(X)=X^{\mathrm{T}}SX$. $S=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\\frac12&0&\frac12\\\frac12&\frac12&0\end{pmatrix}$.

旧 新

坐标变换：$X=PY$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

有 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&\frac12&\frac12&1&&\\\frac12&0&\frac12&&1&\\\frac12&\frac12&0&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac12&1&1&1&\\\frac12&0&\frac12&&1&\\1&\frac12&0&&&1\end{array}\right)\to\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&\\0&-\frac14&0&-\frac12&\frac12&\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)}_{\text{标准型}}\to\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&1&1&\\&-1&&-1&1&\\&&-1&-1&-1&1\end{array}\right)}_{\text{规范型}}$ $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\&&1\end{pmatrix}$. $S_1=P^{\mathrm{T}}SP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

$Q(x_1,x_2,x_3)=Q_1(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

定义 8.3.1 设 $Q(X)$ 是 n 元实二次型. 如果对 $\mathbf{R}^n$ 中所有的 $X\neq O$ 都有 $Q(X)>0$，就称 Q 是**正定的**(positive definite). 如果对 $\mathbf{R}^n$ 中所有的 $X\neq O$ 都有 $Q(X)<0$，就称 Q 是**负定的**(negative definite). 如果对 $\mathbf{R}^n$ 中所有的 $X\neq O$ 都有 $Q(X)\geqslant 0$，就称 Q 是**半正定的**(semi-positive definite). 如果对 $\mathbf{R}^n$ 中所有的 $X\neq O$ 都有 $Q(X)\leqslant 0$，就称 Q 是**半负定的**(semi-negative definite).

引理 8.3.1 与正定(或半正定)实对称方阵 S 相合的方阵 $S_1=P^{\mathrm{T}}SP$ 仍然正定(或半正定)，其中 P 是实可逆方阵.

定理 8.3.2 实对称方阵 S 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆实方阵 P 使 $S=P^{\mathrm{T}}P$. □

定理 8.3.3 n 阶实对称方阵 S 半正定 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使 $S=A^{\mathrm{T}}A$，并且可以要求 $m=\operatorname{rank}S$.

推论 8.3.1 实对称方阵 S 正定 $\Rightarrow$ S 的行列式 $\det S>0$.

定理 8.3.4 实对称方阵 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\Leftrightarrow$ S 的所有顺序主子式大于 0：

$$\begin{vmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1k}\\\vdots&&\vdots\\s_{k1}&\cdots&s_{kk}\end{vmatrix}>0,\quad \forall 1\leqslant k\leqslant n$$

命题 8.3.5 正定实对称方阵 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 的任意主子式

$$S\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}>0$$

例 3 设实对称方阵 S 正定，则存在可逆的上三角形矩阵 T 使 $T^{\mathrm{T}}ST=I$.

引理 8.2.1 方阵的相合关系具有如下性质：

(1) 自反性：每个方阵 A 与自身相合；

(2) 对称性：如果 A 与 B 相合，则 B 与 A 相合；

(3) 传递性：如果 A 与 B 相合，且 B 与 C 相合，则 A 与 C 相合. □

引理 8.2.2 与对称方阵相合的方阵仍是对称方阵. 与反对称方阵相合的方阵仍是反对称方阵.

定理 8.2.3 数域 F 上有限维线性空间 V 上同一个二次型在两组不同基 M，M_1 下的矩阵 S，S_1 相合：

$$S_1=P^{\mathrm{T}}SP$$

其中 P 是 M 到 M_1 的过渡矩阵. □

算法 8.2.1 将 n 阶对称方阵 S 相合到对角矩阵 $S_1=P^{\mathrm{T}}SP$，求 S_1 及 P：

1. 将 S 与同阶单位矩阵 I 排成 $n\times 2n$ 矩阵 $A=(S,I)$.

2. 从 $A_0=A$ 开始，经过初等变换依次得到 A_1，A_2，…，其中对每个 A_{i-1} 进行一次初等行变换，然后对它的前 n 列进行相应的列变换，得到 A_i.

行列同时变换.

这里，与初等行变换 $\mathscr{T}$ 相应的列变换 $\mathscr{T}'$ 是：

(1) 设 $\mathscr{T}$ 将第 i，j 两行互换，则 $\mathscr{T}'$ 将第 i，j 两列互换；

(2) 设 $\mathscr{T}$ 将第 i 行乘非零常数 a，则 $\mathscr{T}'$ 将第 i 列乘 a；

(3) 设 $\mathscr{T}$ 将第 j 行的 a 倍加到第 i 行，则 $\mathscr{T}'$ 将第 j 列的 a 倍加到第 i 列.

3. 将第 2 步重复有限次，将 (S,I) 变成 (S_1,P^{T})，其中左边 n 列组成对角矩阵 S_1，则右边 n 列组成的可逆方阵 P^{T} 的转置方阵 P 满足条件 $S_1=P^{\mathrm{T}}SP$. □

定理 8.2.4 设 S 是数域 F 上的 n 阶对称方阵，则存在 F 上 n 阶可逆方阵 P 使 $D=P^{\mathrm{T}}SP$ 是对角矩阵. 其中的对角元可以按任意指定的顺序排列.

推论 8.2.1 对实数域上任意 n 阶对称方阵 S，存在 n 阶实可逆方阵 P，使

$$P^{\mathrm{T}}SP=\operatorname{diag}(I_{(p)},-I_{(q)},O_{(n-p-q)})$$

其中 $p+q=\operatorname{rank}S$.

例 2 已知实二次型 $Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz+2yz$.

(1) λ 取什么值时 $Q(x,y,z)$ 正定？

(2) λ 取什么值时 $Q(x,y,z)$ 负定？

(3) λ 取什么值时 $Q(x,y,z)$ 可以写成实系数一次多项式的平方 $(ax+by+cz)^2$？

证明 $Q(x,y,z)$ 的矩阵

$$S=\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{pmatrix}$$

(1) Q 正定 $\Leftrightarrow S>0\Leftrightarrow S$ 的顺序主子式 $\det S_k>0$，$\forall k=1,2,3$，

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\det S_1=\lambda>0,\\\det S_2=\lambda^2-1>0,\\\det S_3=(\lambda-1)^2(\lambda+2)>0.\end{cases}\Leftrightarrow\quad\lambda>1$$

故 Q 正定当且仅当 $\lambda>1$.

(2) Q 负定 $\Leftrightarrow S<0\Leftrightarrow -S>0\Leftrightarrow -S$ 的所有顺序主子式 $\det((-S)_k)>0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\det((-S)_1)=-\lambda>0,\\\det((-S)_2)=\lambda^2-1>0,\\\det((-S)_3)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)>0.\end{cases}\Leftrightarrow\quad\lambda<-2$$

故 Q 负定当且仅当 $\lambda<-2$.

(3) $Q=(ax+by+cz)^2\Leftrightarrow S\geqslant 0$ 且 $\operatorname{rank}S=1$.

$\operatorname{rank}S=1\Rightarrow\det S=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 -2. 易见 $\lambda=-2$ 时 S 不是半正定(并且此时 $\operatorname{rank}S=2$). 剩下唯一的可能性是 $\lambda=1$. 当 $\lambda=1$ 时

$$Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=(x-y-z)^2$$

确实是一次实多项式的平方. □

定理 8.4.2 在复数域 $\mathbf{C}$ 上，每个对称方阵 S 相合于唯一的规范形

$$A=\begin{pmatrix}I_{(r)}&O\\O&O\end{pmatrix} \tag{8.4.1}$$

其中 $r=\operatorname{rank}S$.

定理 8.4.3 实数域 $\mathbf{R}$ 上的任意 n 阶对称方阵 S 相合于规范形

$$A=\operatorname{diag}(I_{(p)},-I_{(q)},O_{(n-p-q)}) \tag{8.4.2}$$

其中的 p，q 由 S 唯一决定，$p+q=\operatorname{rank}S$.

教材习题

8.2 1. 求实对称方阵在实相合下的标准形：

~~(1)~~ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$；

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 4 & & 1 & \\ 3 & 4 & 6 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & \\ & -1 & & -2 & 1 & \\ & & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ 则 $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $P^TSP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

4. 证明：n 阶可逆复对称方阵在复数域上相合于

$$\begin{pmatrix} O & I_{(m)} \\ I_{(m)} & O \end{pmatrix}（当 n=2m）\quad 或 \quad \begin{pmatrix} O & I_{(m)} & \\ I_{(m)} & O & \\ & & 1 \end{pmatrix}（当 n=2m+1）.$$

→ 1c标准形均相

H为n阶可逆复方阵，相合于 I_n。二者均可逆对称，也相合于 I_n，故相合。

6. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $\det A<0$，证明：必存在 n 维向量 $X\neq 0$，使 $X^TAX<0$.

由于A实对称，∃P为实可逆方阵，$D=P^TAP=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 且 $\det D=(\det P)^2\det A$，$\det P\neq 0 \Rightarrow \det P>0$。

又 $\det A<0 \Rightarrow \det D<0$，则∃ $d_i<0$。取 $X=Pe_i$，则 $X^TAX=e_i^TP^TAPe_i=d_i<0$。证毕

8.3 5. 在二次型 $Q=X^TAX$ 中，实对称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0 \quad (\forall k=1,2,\cdots,n-1);\ \det A=0.$$

试证明：二次型矩阵 Q 为半正定.

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha^T \\ \alpha & a \end{pmatrix}$ A_1为n-1阶方阵，其所有顺序主子式>0，则A_1正定，为实对称，则∃P为可逆方阵，$P^TA_1P=I_{n-1}$。

$B=\begin{pmatrix} P^T & \\ & 1 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} P & \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & \beta^T \\ \beta & a \end{pmatrix}$ 则 $D=\begin{pmatrix} I & \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} I & -\beta^T \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & d \end{pmatrix}$ 且 $d=0$。故为半正定

5. 设 ~~S~~ A 是实对称方阵. 求证：如果存在 X_1，X_2 使 $X_1^TAX_1>0>X_2^TAX_2$，则存在 $X_0\neq O$ 使 $X_0^TAX_0=0$.

可知S不正定，不负定，即∃P为可逆实对称矩阵，$P^TAP=\mathrm{diag}(I_p,-I_q,O_{n-r})$。取 $X_0=P(e_1+e_{p+1})\neq 0$。

$X_0^TAX_0=1-1=0$。证毕

例 6　设 A 是 n 阶实可逆方阵，K 是 n 阶反对称方阵. 求证：$\det(A^TA+K)>0$.

证明　考虑闭区间[0,1]上以实数 λ 为自变量的函数 $f(x)=\det(A^TA+\lambda K)$. 显然 $f(\lambda)$ 是 λ 的多项式函数，因而是连续函数. 且当 $\lambda=0$ 时，由 $A^TA+0K=A^TA$ 正定知道 $f(0)=\det(A^TA)>0$.

我们证明不可能 $f(\lambda)=0$. 若不然，设有某个 $\lambda\in[0,1]$ 使 $f(\lambda)=\det(A^TA+\lambda K)=0$，则存在非零的列向量 $X\in \mathbf{R}^{n\times 1}$ 使 $(A^TA+\lambda K)X=\mathbf{0}$，从而

$$X^TA^TAX+\lambda X^TKX=0 \tag{8.5.5}$$

X^TKX 是 1 阶方阵，$X^TKX=(X^TKX)^T=X^TK^TX=X^T(-K)X=-X^TKX$. 因此 $X^TKX=0$. 代入(8.5.5)得

$$X^TA^TAX=0$$

然而，A^TA 正定，对 $X\neq\mathbf{0}$ 应有 $X^TA^TAX>0$，矛盾.

这说明了 $f(\lambda)\neq 0$ 对所有的 $\lambda\in[0,1]$ 成立.

如果 $f(1)=\det(A^TA+K)<0$，则由 $f(0)>0$ 及 $f(x)$ 是连续函数知道必然存在 $\lambda\in(0,1)$ 使 $f(\lambda)=0$，与前面推出的结论矛盾.

因此 $f(1)=\det(A^TA+K)>0$.　□

定义 8.4.1　实对称方阵 S 的相合规范形(8.4.2)中对角线上 1 的个数 p 称为 S 的**正惯性指数**(positive index of inertia)，-1 的个数 q 称为**负惯性指数**(negative index of inertia)，正惯性指数与负惯性指数的差 $p-q$ 称为**符号差**(signature).

11. 设 A，B 均为 n 阶实对称阵，其中 A 正定. 证明：当实数 t 充分大后，$tA+B$ 亦正定.

∃可逆矩阵P_1，将A相合为单位阵，$P_1^TAP_1=I$。$B_1=P_1^TBP_1$仍为实对称阵。∃正交方阵将B_1相合为对角阵

$U^TB_1U=D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 且 $U^TIU=I$ ⇒ 取 $P=P_1U$，则P将 $tA+B$ 相合为 $tI+D$。取 $t>\max\{|d_i|\,|\,1\le i\le n\}$

则有 $tI+D$ 正定，于是 $tA+B$ 正定

8.4 1. 设 S 是 n 阶实对称方阵，V_0 是方程 $X^TSX=0$ 的解集. 求证：V_0 是 $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 的子空间⇔$S\geqslant 0$ 或 $S\leqslant 0$. 且当 $S\geqslant 0$ 或 $S\leqslant 0$ 时 $\dim V_0=n-\mathrm{rank}\ S$.

$S\geqslant 0$时存在矩阵A，$S=A^TA$，$\mathrm{rank}A=r=\mathrm{rank}S$。$X^TSX=X^TA^TAX=Y^TY$，$Y=AX$。则 $X^TSX=0 \Leftrightarrow AX=0$。

于是 $\dim V_0=n-\mathrm{rank}A=n-\mathrm{rank}S$。$S\leqslant 0$时，$X^TSX=0\Leftrightarrow X^T(-S)X=0$ 故二者解集相同。由 $-S\geqslant 0$ ⇒ 同理

若 $S\geqslant 0$ 与 $S\leqslant 0$ 都不成立，则S的相合规范形 $P^TSP=\Lambda=\mathrm{diag}(I_{(p)},-I_{(q)},O_{(n-r)})$ 中 $p,q>0$。取 $X_1=P(e_1+e_{p+1})$

$X_2=P(e_1-e_{p+1})$ 则有 $X_i^TSX_i=0$。但 $(X_1+X_2)^TS(X_1+X_2)\neq 0$。加法不封闭，非子空间。证毕

3. 求二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$ 的秩、正惯性指数和符号差.

$S=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Q的秩为 $\mathrm{rank}S=2$。由 $Q=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(x-z)^2$ 半正定 ⇒ 负惯性指数 $q=0$，$p=\mathrm{rank}S-q=2$

$p-q=2$

3. 设 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 是正定实对称方阵. 求证：

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型.

记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，则二次型 $Q(X)=\begin{vmatrix} S & X \\ X^T & 0 \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} I & 0 \\ -X^TS^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} S & X \\ 0 & -X^TS^{-1}X \end{vmatrix}=X^T(-|S|S^{-1})X$　$|S|>0$。

则 $-|S|S^{-1}$ 负定

第九章 内积

知识点&例题

定理 9.1.1(Cauchy-Schwarz 不等式)　对欧氏空间 V 中任意 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$$

由内积的双线性性可以推出：对欧氏空间 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_j$ 和任意实数 x_i，y_j $(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant m)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{m}y_j\boldsymbol{\beta}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$$

特别，取 V 的任意一组基 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 在这组基 M 下的坐标分别是

$$X=(x_1,\cdots,x_n)^T,\quad Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=X^TSY$$

其中 $S=(s_{ij})_{n\times n}$，$s_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$，$\forall 1\leqslant i,j\leqslant n$.

S 是由基 M 中的向量两两的内积组成的矩阵，称为内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$在基 M 下的**度量矩阵**(metric matrix)，也称为 Gram 方阵.

由于内积的对称性，$s_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_i)=s_{ji}$，度量矩阵 S 满足条件 $S^T=S$，是对称方阵.

由于内积的正定性，$X^TSX>0$ 对所有 $X\neq\mathbf{0}$成立，S 是正定对称方阵.

定理 9.2.2　n 维欧氏空间 V 必然存在标准正交基.

Gram-Schimit正交化：将$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$正交化为$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，取$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$\cdots$，$\beta_{k+1}=\alpha_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{(\alpha_{k+1},\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i$

例 2　试求 $\mathbf{R}^4$ 中线性无关的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0),\quad\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1,-1),\quad\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,1)$$

所生成的子空间的一组标准正交基，并扩充为 $\mathbf{R}^4$ 的一组标准正交基.

解　取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}(-1,-2,1,-2)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{2}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{-2}{5/2}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{5}(-2,1,2,1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0),\quad\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-2,1,-2)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,2,1)$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的子空间的一组标准正交基.

我们寻找 $\boldsymbol{\alpha}_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)$与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交从而与 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 都正交. 即

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4)=x_1+x_3=0\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=-x_2+x_3-x_4=0\\(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

解之得　$(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2(0,1,0,-1)$.

取 $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,0,-1)$，$\boldsymbol{\gamma}_4=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_4|}\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 是所求的 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基.　□

定理 9.2.4　同一个内积在两组基 M，M_1 下的度量矩阵 A，B 相合：$B=P^TAP$，其中 P 是基 M 到 M_1 的过渡矩阵.　□

定义 9.2.2　满足条件 $P^TP=PP^T=I$ 即 $P^T=P^{-1}$的实方阵称为**正交方阵**(orhtogonal matrix).　□

命题 9.2.5　欧氏空间中标准正交基之间的过渡矩阵是正交方阵. 如果从标准正交基 M 到另一组基 M_1 的过渡矩阵是正交方阵，则 M_1 也是标准正交基.

命题 9.2.6　P 是正交方阵⇔P 的列向量组是 $\mathbf{R}^{n\times 1}$的标准正交基⇔P 的行向量组是 $\mathbf{R}^{1\times n}$的标准正交基.

定义 9.2.3　设 S_1，S_2 是欧氏空间中的向量组，如果 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 对所有的 $\boldsymbol{\alpha}\in S_1$，$\boldsymbol{\beta}\in S_2$ 成立，就称 S_1 与 S_2 正交，记 $S_1\perp S_2$.

对 V 的任意子集 S，记 $S^{\perp}=\{\boldsymbol{\beta}\in V\,|\,S\perp\boldsymbol{\beta}\}$.　□

定理 9.2.7　(1) 设 S_1，S_2 是欧氏空间 V 的子集，则 $S_1\perp S_2\Leftrightarrow V(S_1)\perp V(S_2)$.

(2) 设 S 是欧氏空间 V 中的向量组，则 $S^{\perp}=V(S)^{\perp}$.

(3) 设 W 是欧氏空间 V 的子空间，则 $V=W\oplus W^{\perp}$.

定义 9.2.4　设 U，V 是欧氏空间. 如果存在实数域上线性空间之间的同构映射 $\sigma:U\to V$，并且 σ 保持向量的内积不变，即

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in U$$

则 σ 称为欧氏空间 U 到 V 的**同构映射**(isomorphism)，欧氏空间 U 与 V 称为**同构的**(isomorphic).　□

定理 9.2.8　欧氏空间 U 与 V 同构⇔$\dim U=\dim V$.

定义 9.3.1　欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如果保持向量的内积不变，也就是

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

对所有的 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立，就称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的**正交变换**(orthogonal transformation).

定理 9.3.1　设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换. 则：

$\mathscr{A}$ 是正交变换⇔$\mathscr{A}$ 保持所有的向量的长度不变，即 $|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})|=|\boldsymbol{\alpha}|$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$.

定理 9.3.2　设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换. 则以下命题等价，两两互为充分必要条件.

(1) $\mathscr{A}$ 是正交变换；

(2) $\mathscr{A}$ 将标准正交基仍变为标准正交基；

(3) $\mathscr{A}$ 在任意一组标准正交基下的矩阵是正交方阵.

命题 9.3.3　同一欧氏空间 V 上的两个正交变换 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 的乘积 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 仍是正交变换，任一正交变换 $\mathscr{A}$ 的逆 $\mathscr{A}^{-1}$仍是正交变换.

命题 9.3.4　(1) 正交变换和正交方阵的行列式等于 ±1；

(2) 正交变换和正交方阵的复特征值 λ_i 的模 $|\lambda_i|=1$，实特征值 $\lambda_i=\pm 1$.

命题 9.3.5　设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的正交变换. 如果 1 与 −1 都是 $\mathscr{A}$ 的特征值，则特征子空间 $V_1\perp V_{-1}$.

定义 9.3.2　设 A，B 是同阶实方阵. 如果存在正交方阵 P　使 $B=P^{-1}AP$，就称 A 与 B **正交相似**(orthogonal similar).　□

引理 9.3.6　设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的正交变换，W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 则 $W^{\perp}$也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

或规范变换

推论 9.3.1 设 W 是正交变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．$\mathscr{A}|_W$ 在 W 的标准正交基 $M_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 下的矩阵是 A_1，将 M_1 扩充为 V 的任意一组标准正交基 $M=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，则 $\mathscr{A}$ 在 M 下的矩阵具有形式 $\mathrm{diag}(A_1,A_2)$，其中 A_2 是 $\mathscr{A}|_{W^\perp}$ 在 $W^\perp$ 的基 $M_2=\{\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的矩阵．

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ O & A_2\end{pmatrix}\text{是正交方阵}\Leftrightarrow B_1=O\text{ 且 }A_1,\ A_2\text{ 是正交方阵．}$$

定理 9.3.7 设 n 阶正交方阵 A 的全部特征值为 $\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k$ $(1\leqslant k\leqslant s)$，$1$（$t$ 重），-1（$n-2s-t$ 重）．则 A 正交相似于如下形式的标准形

$$B=\mathrm{diag}\,(A_1,\cdots,A_s,I_{(t)},\ -I_{(n-2s-t)})\qquad(9.3.5)$$

其中

$$A_k=\begin{pmatrix}\cos\alpha_k & -\sin\alpha_k\\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k\end{pmatrix},\quad\forall\,1\leqslant k\leqslant s$$

9.4
实对称矩阵的正交相似

定理 9.4.1 实对称方阵 S 的特征值全部都是实数．

定理 9.4.2 实对称方阵 S 正交相似于对角矩阵 $D=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，对角元 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 就是 S 的全体特征值．

推论 9.4.1 设 Q 是 n 维欧氏空间 V 上的二次型，则 Q 在 V 的适当的标准正交基 M 下可写成唯一的标准形

$$Q\,(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2\qquad(9.4.1)$$

其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 M 下的坐标，$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 Q 的全部非零特征值，按从大到小的顺序排列：$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r$．□

欧氏空间上的二次型 $Q\,(\boldsymbol{\alpha})$ 在标准正交基下的标准形(9.4.1)称为二次型 $Q\,(\boldsymbol{\alpha})$ 的**主轴形式**(principal axis form)．

推论 9.4.2 设 S 是实对称方阵．则如下命题等价：

(1) S 正定；

(2) S 的特征值全部大于 0；

(3) 存在正定实对称方阵 S_1 使 $S=S_1^2$．

推论 9.4.3 设 S 是实对称方阵．则如下命题等价：

(1) S 半正定；

(2) S 的特征值全部大于或等于 0；

(3) 存在半正定实对称方阵 S_1，$\mathrm{rank}\ S_1=\mathrm{rank}\ S$，使 $S=S_1^2$．□

定义 9.4.1 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换，并且

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta})\ =(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$$

对任意 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立，就称 $\mathscr{A}$ 是**对称变换**(symmetric transformation)．□

定理 9.4.3 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换．则

$\mathscr{A}$ 是对称变换$\Leftrightarrow\mathscr{A}$ 在 V 的任何一组标准正交基下的矩阵 A 是对称方阵．

定理 9.4.4 欧氏空间上 V 上的对称变换 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的特征子空间相互正交．

定理 9.4.5 欧氏空间上的对称变换 $\mathscr{A}$ 在适当的标准正交基下的矩阵是对角矩阵，存在由 $\mathscr{A}$ 的特征向量构成的标准正交基．□

命题 9.5.1 设 V 是欧氏空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换．则存在 V 上唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$，使

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*(\boldsymbol{\beta}))\text{对所有的 }\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V\text{ 成立}$$

如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一组标准正交基 M 下的矩阵是 A，则 $\mathscr{A}^*$ 在 M 下的矩阵是 $A^{\mathrm T}$．

引理 9.5.2 设 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2\in V$，如果

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2)$$

对所有的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立，则 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$．

定义 9.5.1 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换．则命题 9.5.1 中所说的满足条件

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*(\boldsymbol{\beta})),\quad\forall\,\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V$$

的唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的**伴随变换**(adjoint transformation)．□

定义 9.5.2 如果欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足条件 $\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{A}^*$，就称 $\mathscr{A}$ 是**规范变换**(normal transformation)．如果实方阵 A 满足条件 $A^{\mathrm T}A=AA^{\mathrm T}$，就称 A 是**规范方阵**(normal matrix)．□

由命题 9.5.1，有

推论 9.5.1 $\mathscr{A}$ 是规范变换$\Leftrightarrow\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是规范方阵．□

推论 9.5.2 与规范方阵 A 正交相似的方阵 B 仍是规范方阵．

因此，2 阶规范实方阵 A 必然是下面两种矩阵之一：

(1) 对角矩阵．此时 A 有两个实特征值．

(2) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$，其中 $b\neq0$．此时 A 有一对相互共轭的虚根 $a\pm bi$．□

命题 9.5.4 如果实方阵 A 是

准上三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ \mathbf 0 & A_3\end{pmatrix}$或准下三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & \mathbf 0\\ A_2 & A_3\end{pmatrix}$，

其中 A_1，A_3 是方阵．则

A 是规范方阵$\Leftrightarrow A_2=\mathbf 0$，且 A_1，A_3 是规范方阵．

定理 9.5.5 设虚数 $a_1\pm b_1i,\cdots,a_s\pm b_si$（所有的 $b_k>0,\forall\,1\leqslant k\leqslant s$）及实数 $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶实规范方阵 A 的全部特征值，则 A 正交相似于如下的标准形

$$D=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_s & b_s\\ -b_s & a_s\end{pmatrix},\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\right)\qquad(9.5.3)$$

推论 9.5.4 正交方阵正交相似于标准形

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_s & \sin\alpha_s\\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s\end{pmatrix},I_{(t)},-I_{(n-2s-t)}\right)\quad\square$$

由于实对称方阵的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是实数，由定理 9.5.5 得

推论 9.5.5 实对称方阵正交相似于标准形

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).\quad\square$$

易验证与反对称实方阵相合(包括正交相似)的方阵仍是反对称方阵．因此与反对称实方阵正交相似的标准形(9.5.3)中的对角元 a_k $(1\leqslant k\leqslant s)$ 及 λ_j $(2s+1\leqslant j\leqslant n)$ 都等于 0，由此得到

推论 9.5.6 反对称实方阵 A 正交相似于标准形

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & b_1\\ -b_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & b_s\\ -b_s & 0\end{pmatrix},O_{(n-2s)}\right)$$

其中 $b_k>0$ $(\forall\,1\leqslant k\leqslant 2s=\mathrm{rank}\ A)$．

反对称方阵的特征值都是纯虚数或者 0．□

9.6
酉空间

定义 9.6.1 设在复数域 $\mathbf C$ 上线性空间 V 上定义了 2 元复函数，将每一对向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 对应到一个复数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，并且满足如下条件：

(1) (共轭双线性)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$，$(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})=\bar\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})$

$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)$，$(\boldsymbol{\beta},\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)$

对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 和 $\lambda\in F$ 成立；

(2) (共轭对称性)$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$对任意 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立；

(3) (正定性)$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$ 对任意$\mathbf 0\neq\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立．

酉空间的内积的很多性质与欧氏空间类似．但是有以下两点需要注意：

1．将系数 λ 从内积$(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$中的第一个向量中提出来，需要用共轭作用：$(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\bar\lambda\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；而从第二个向量中提出来，则不需要共轭：$(\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$．

2．内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$中的两个向量交换位置，需要用共轭作用：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$．而$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$恰说明$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$是实数．

与欧氏空间类似，有$(\mathbf 0,\boldsymbol{\alpha})=(0\,\mathbf 0,\boldsymbol{\alpha})=0(\mathbf 0,\boldsymbol{\alpha})=0$．特别$(\mathbf 0,\mathbf 0)=0$．因此，内积的正定性也可以叙述为：

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant0$ 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立，其中等号成立仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf 0$．

由内积的正定性可以定义任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$．则$|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant0$，且$|\boldsymbol{\alpha}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf 0$．

长度为 1 的向量称为**单位向量**(unit vector)．对任意 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf 0$，$\boldsymbol{\alpha}_0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同的单位向量．

仍有 Cauchy-Schwarz 不等式，不过要稍加修改：

定理 9.6.1 (Cauchy-Schwarz 不等式)对酉空间 V 中任意 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|^2\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$$

成立，其中的等号仅当 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时成立．

由 Cauchy-Schwarz 不等式得到

推论 9.6.1（三角形不等式） 对欧氏空间 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，有

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|.\quad\square$$

在酉空间中不能像欧氏空间中那样定义任意两个向量的夹角，但可以定义正交：

对酉空间 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，如果$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，就称 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$．

由于内积的共轭对称性，$a_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\overline{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_i)}=\bar a_{ji}$，度量矩阵 A 满足条件 $A^*=A$，满足这样的条件的复方阵称为**Hermite 方阵**(Hermitian matrix)．

一般地，如果对同阶复方阵 A，B 存在可逆复方阵 P 使 $B=P^*AP$ 成立，就称 A，B **共轭相合**(conjunctive matrices)．前面所得的结论就是：

酉空间的同一内积在不同的基下的度量矩阵共轭相合．

如果酉空间的内积在某一组基 $M=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$下的度量矩阵为单位矩阵 I，也就是$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0(\forall\,i\neq j)$且$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=1(\forall\,1\leqslant i\leqslant n)$，就称 M 是标准正交基．

与欧氏空间类似，酉空间中的任意一组基都可以通过 Gram-Schmidt 正交化或者通过度量矩阵的共轭相合改造成一组标准正交基．这样就得到

定理 9.6.2 酉空间存在标准正交基．任一组两两正交的单位向量可以扩充为标准正交基．□

定理 9.6.3 任一正定的 Hermite 方阵 H 可以通过上三角形可逆方阵 T 共轭相合于单位矩阵：

$$T^*HT=I\quad\square$$

定理 9.6.4 酉空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵 P 满足条件 $P^*P=I$．□

定义 9.6.2 如果复方阵 U 满足条件 $U^*U=I$，即 $U^*=U^{-1}$，就称 U 为**酉方阵**(unitary matrix)．□

这样，定理 9.6.4 就可以重新叙述为：

酉空间中标准正交基之间的过渡矩阵是酉方阵．

容易看出：

定理 9.6.5 U 是酉方阵$\Leftrightarrow U$ 的列向量构成 $\mathbf C^{n\times1}$在标准内积下的一组标准正交基$\Leftrightarrow U$ 的行向量构成 $\mathbf C^{1\times n}$在标准内积下的一组标准正交基．□

9.7
酉相似

定义 9.7.1 设 V 是酉空间．$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换．

(1) 如果 $\mathscr{A}$ 保持向量的内积不变，即$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$对任意的 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立，就称 $\mathscr{A}$ 是**酉变换**(unitary transformation)．

(2) 如果$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$对任意的 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立，就称 $\mathscr{A}$ 是 **Hermite 变换**(Hermitian transformation)．□

命题 9.7.1 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上的线性变换，A 是 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 M 下的矩阵．则

(1) $\mathscr{A}$ 是酉变换$\Leftrightarrow A$ 是酉方阵；→ det U=1，特征值模长为1，积与逆均为酉方阵

(2) $\mathscr{A}$ 是 Hermite 变换$\Leftrightarrow A$ 是 Hermite 方阵．→ 特征值均为实数，不同特征值对应的特征向量正交

定义 9.7.2 满足条件 $AA^*=A^*A$ 的复方阵 A 称为**规范方阵**(normal matrix)．□

显然酉方阵与 Hermite 方阵都是规范方阵．

与欧氏空间中类似，酉空间 V 上也可以定义伴随变换和规范变换，并且有：$\mathscr{A}$ 是规范变换$\Leftrightarrow\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是规范方阵．

命题 9.7.2 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上一个线性变换，则存在 V 上唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 使

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*(\boldsymbol{\beta}))$$

对所有的 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立．设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 M 下的矩阵是 A，则 $\mathscr{A}^*$ 就是在同一组基 M 下以 A^* 为矩阵的线性变换．

定义 9.7.3 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上的线性变换．V 上满足条件

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*(\boldsymbol{\beta})),\quad\forall\,\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V$$

的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的**伴随变换**(adjoint transformation)．

如果 $\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{A}^*$ 成立，就称 $\mathscr{A}^*$ 是**规范变换**(normal transformation)．□

规范矩阵的酉相似标准型

命题 9.7.4 与规范方阵 A 酉相似的方阵 B 仍是规范方阵．

命题 9.7.5 上三角形矩阵 T 是规范方阵$\Leftrightarrow T$ 是对角矩阵．

定理 9.7.6 复方阵 A 是规范方阵$\Leftrightarrow A$ 酉相似于对角矩阵．

定义 9.7.3 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上的线性变换. V 上满足条件

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}^*(\boldsymbol{\beta})), \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的**伴随变换**(adjoint transformation).

如果 $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$ 成立, 就称 $\mathscr{A}^*$ 是**规范变换**(normal transformation). □

由酉方阵 A 满足条件 $A^* = A^{-1}$ 知酉变换 $\mathscr{A}$ 满足条件 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$; 由 Hermite 方阵 A 满足条件 $A^* = A$ 知 Hermite 变换 $\mathscr{A}^*$ 满足条件 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. 因此, 酉变换和 Hermite 变换 $\mathscr{A}$ 都与 $\mathscr{A}^*$ 在矩阵乘法下可交换, 都是规范变换. 一般地, 有:

推论 9.7.1 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上的规范变换 $\Leftrightarrow \mathscr{A}$ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵是规范方阵. □

定理 9.7.3 任一复方阵 A 酉相似于上三角形矩阵.

教材习题

9.3 3. 如果 A, B 都是正交方阵, 且 $\det A = -\det B$, 求证: $A + B$ 是奇异方阵.

$\det(A+B) = \det A \cdot \det(I + A^{-1}B)$ $A^{-1}B$ 为正交方阵. $\det A^{-1}B = (\det A)^{-1}\det B = -1 = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是正交方阵 $A^{-1}B$ 的全部不同特征值. $|\lambda_i| = 1$. 由 A 的虚特征值积为 1.
则 -1 是 $A^{-1}B$ 的特征值. 即 $\det(\lambda I - A^{-1}B) = 0$ 的根. $\det(-I - A^{-1}B) = 0 \Rightarrow$ 证毕

9.4 1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 是对角矩阵, .

$\varphi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$. 解 $(A+I)X = 0$. $(A-2I)X = 0$. $(A-5I)X = 0 \Rightarrow X_1 = (2,2,1)^T$. $X_2 = (-2,1,2)^T$. $X_3 = (1,-2,2)^T$
三者为正交基. 则标准化后有 $T = \frac{1}{3}(X_1, X_2, X_3)$ s.t. $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-1,2,5)$

酉方阵的酉相似标准型

命题 9.7.7 (1) 酉方阵的乘积仍是酉方阵. 酉方阵的逆仍是酉方阵. 与酉方阵酉相似的方阵仍是酉方阵;

(2) 与 Hermite 方阵共轭相合的方阵仍是 Hermite 方阵. 与 Hermite 方阵酉相似的方阵仍是 Hermite 方阵.

定理 9.7.8 (1) A 是酉方阵 $\Leftrightarrow A$ 酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $|\lambda_k| = 1$ 即 $\lambda_k = \cos\alpha_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$;

(2) A 是 Hermite 方阵 $\Leftrightarrow A$ 酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数.

推论 9.7.2 酉方阵的特征值的模都等于 1. Hermite 方阵的特征值都是实数.

推论 9.7.3 n 阶 Hermite 方阵 H 共轭相合于实对角矩阵 $\mathrm{diag}(I_{(p)}, -I_{(r-p)}, O_{(n-r)})$, 其中 $r = \mathrm{rank}\, H$.

推论 9.7.4 Hermite 方阵 H 正定 $\Leftrightarrow H$ 的特征值全部是正实数. □

第五章 多项式 (暂略)

知识点&例题

定义 5.1.1 设 F 是任一数域. x 是一个字母(称为不定元), n 是任意非负整数, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$, 则形如

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{5.1.1}$$

的表达式称为域 F 上的一个**多项式**(polynomial). 其中 $a_k x^k$ 称为这个多项式的 k 次项, a_k 称为 k 次项的**系数**(coefficient). (5.1.1)中没有写出次数高于 n 的项, 对于所有的整数 $k > n$, 我们说(5.1.1)中的多项式的 k 次项的系数都等于 0.

定义 5.1.2 如果多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 与 $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ 的同次项的系数相等, 即 $a_k = b_k$ 对所有的非负整数 k 成立, 就称这两个多项式相等, 记为

$$f(x) = g(x)$$

如果多项式 $f(x)$ 不等于 0, 一定可以将它写成 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 的形式使 $a_n \neq 0$, 此时称 n 次项 $a_n x^n$ 为这个多项式 $f(x)$ 的**首项**(leader), 称 a_n 为**首项系数**(leading coefficient), n 称为 $f(x)$ 的**次数**(degree), 记为 $\deg f(x)$. 如果首项系数为 1, 就称这个多项式为**首一多项式**(monic polynomial). □

定理 5.1.1 (带余除法) 设 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$ 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in F[x]$ 同时满足以下两个条件:

(1) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$;

(2) $r(x) = 0$ 或者 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

定理 5.1.1 中由 $f(x)$, $g(x)$ 唯一决定的 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商**(integral quotient), $r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**(remainder).

定义 5.2.1 设 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$. 如果 $h(x) \mid f(x)$ 且 $h(x) \mid g(x)$, 则称 $h(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的**公因式**(common factor). 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式, 并且 $f(x)$, $g(x)$ 的所有的公因式都整除 $d(x)$, 就称 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的**最大公因式**(greatest common factor). □

定理 5.2.1 对任意 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, 在 $F[x]$ 中存在 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$, 且 $d(x)$ 可以表示成为 $f(x)$, $g(x)$ 的倍式之和, 即存在 $u(x)$, $v(x) \in F[x]$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

定义 5.2.2 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**(relatively prime). □

定理 5.2.2 $f(x)$, $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x)$, $v(x) \in F[x]$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

定理 5.2.3 对 $f_1(x), \cdots, f_s(x) \in F[x]$ 的任意一个最大公因式 $d(x)$, 存在 $u_1(x), \cdots, u_s(x) \in F[x]$ 使

$$u_1(x)f_1(x) + \cdots + u_s(x)f_s(x) = d(x) \quad □$$

当 $(f_1(x), \cdots, f_s(x)) = 1$ 时我们同样称 $f_1(x), \cdots, f_s(x)$ 互素. 同样可以证明

定理 5.2.4 $f_k(x) \in F[x] (1 \leqslant k \leqslant s)$ 互素的充分必要条件是: 存在 $F[x]$ 中的一组多项式 $u_k(x) (1 \leqslant k \leqslant s)$ 使

$$u_1(x)f_1(x) + \cdots + u_s(x)f_s(x) = 1 \quad □$$

定义 5.2.3 对任意 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x) \in F[x]$, 如果 $g(x) \mid (f_1(x) - f_2(x))$, 就称 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ **模** $g(x)$ **同余**(congruent modulo $g(x)$), 记为 $f_1(x) \equiv f_2(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$. 当 $g(x) \neq 0$ 时这也就是说 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 被 $g(x)$ 除的余式相等, 像 $f_1(x) \equiv f_2(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$ 这样的表示多项式同余的式子称为**多项式的同余式**(congruence of polynomials). □

容易验证多项式的同余式的如下简单而有用的性质:

命题 5.2.5 对任意 $f_1(x) \equiv h_1(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$ 及 $f_2(x) \equiv h_2(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$, 以下同余式成立.

$$f_1(x) \pm f_2(x) \equiv h_1(x) \pm h_2(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$$

$$f_1(x)f_2(x) \equiv h_1(x)h_2(x) (\mathrm{mod}\ g(x))$$

引理 5.2.6 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$ 互素 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x) \in F[x]$ 使

$$u(x)f(x) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ g(x)) \quad □ \tag{5.2.3}$$

定理 5.2.7 (1) 如果 $f_1(x), \cdots, f_s(x)$ 都与 $g(x)$ 互素, 则它们的乘积 $f_1(x) \cdots f_s(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

(2) 如果 $f_1(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 且 $g(x) \mid (f_1(x)f_2(x))$, 则 $g(x) \mid f_2(x)$.

定理 5.2.8 (中国剩余定理) 设 $g_1(x), \cdots, g_s(x)$ 是数域 F 上任意一组两两互素的多项式, $f_1(x), \cdots, f_s(x)$ 是 $F[x]$ 中任意一组多项式, 则存在 $f(x) \in F[x]$ 使

$$f(x) \equiv f_i(x) (\mathrm{mod}\ g_i(x))$$

对 $1 \leqslant i \leqslant s$ 成立.