线性代数复习

Author: 张景一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

tip: 基础内容在教材复习笔记中已过一遍，现在的主要任务是加强应试能力，针对此方向，询问学长学姐后决定使用应试强化所需的题型的认识，做题方法的积累，故此笔记中基本全为题型积累与精减提炼后的知识点内容，内容有侧重，有些章节已删减。

第一章 线性方程组的解法

精减：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 系数矩阵 $M=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in F^{m\times n}$，增广矩阵 $\tilde{M}=\left(M \;\; \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$ 增广 $\tilde{M} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 阶梯型矩阵。

① 交换 i, j 行 $A \xrightarrow{(i,j)} B$
② i 行乘 $\lambda \neq 0$ $A \xrightarrow{\lambda(i)} B$
③ j 行 $+\lambda$ i 行 $A \xrightarrow{(j)+\lambda(i)} B$

用处：① 计算 det, rank 行列可混用
② 求逆矩阵，只能用行变换

有解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}M=\mathrm{rank}\tilde{M}$

方程数 m < 未知量数 n 时 定有非零解。

题目：解下述线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=b_1, \\ nx_1+x_2+2x_3+\cdots+(n-2)x_{n-1}+(n-1)x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+\cdots+nx_{n-1}+x_n=b_n. \end{cases}$$

系数和一定，则相加。

增广矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & b_1 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & b_n \end{pmatrix}$ 可观察到 $\frac{n(n+1)}{2}(x_1+\cdots+x_n)=\sum_{i=1}^{n}b_i$

①−② 有 $(1-n)x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1-b_2 \Rightarrow x_1$ 可求。

②−③ 同理可求 x_2，同理全部可求。

第二章 行列式

精减：$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 为其中逆序 $(i>j, a_i<a_j)$ 的个数，有 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，特别地，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

如 $\tau(413625)=6$

行列式性质：① $\det A^T=\det A$ ② $A\xrightarrow{(i,j)}B$ $|A|=-|B|$ $A\xrightarrow{\lambda(i)}B$ $|B|=\lambda|A|$ $A\xrightarrow{\lambda(i)+(j)}B$ $|A|=|B|$ ③ $\det(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta,\gamma)=\lambda_1\det(\alpha_1,\beta,\gamma)+\lambda_2\det(\alpha_2,\beta,\gamma)$（灵活运用）

按行(列)展开：$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

P32 6. 设 $n\geqslant 2$，证明：如果 n 级矩阵 A 的元素为 1 或 −1，则 $|A|$ 必为偶数。

完全展开，$|A|$ 共有 $n!$ 项，每一项为 1 或 −1，设 k 项为 1，则 $|A|=k-(n!-k)=2k-n!$ 为偶。

题目：(1) 将第 2, …, n 列均加到第一列（行元素和相同）（列和相同则同理）

7. 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}, y\neq z.$$

不一致

例 2 计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}, (k\neq\lambda).$$

均加在第一列 $\begin{vmatrix} k+(n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ k+(n-1)\lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k+(n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}=(k+(n-1)\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}=(k+(n-1)\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & k-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k-\lambda \end{vmatrix}=(k+(n-1)\lambda)\cdot(k-\lambda)^{n-1}$

分为两行列式，$D_n=\begin{vmatrix} \cdots & 0 \\ & \vdots \\ & x-y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \cdots & y \\ & \vdots \\ & y \end{vmatrix}$

$=(x-y)D_{n-1}+(-1)^{n+1}(z-x)^{n-1}y$

$\Rightarrow D_n=|A^T|=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$

$D_n=|A|=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}$

则 $D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$

(2) 加边法

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。

$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-a_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & -a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} & x_1 & \cdots & x_n \\ & -a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_n \end{vmatrix}$

爪形，去左列

边缘处加边

中间插入

例 13 计算下述 n 阶行列式 $(n\geqslant 2)$：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$

加边后为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\cdot\prod_{1\leq j<k\leq n}(x_k-x_j)$ 其中 y^{n-1} 的系数为 $k=-(x_1+\cdots+x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$

则由 $k=(-1)^{n+(n+1)}D_n \Rightarrow D_n=-k$.

(10) 特别地，有三对角线行列式：

例 7 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中 $a\neq b$。

解 若 $a=0$，则 $D_n=b^n$；若 $b=0$，则 $D_n=a^n$。下面设 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，当 $n\geqslant 3$ 时，按第 1 行展开，得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}+(-1)^{1+2}ab\cdot 1\cdot D_{n-2}$$
$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}. \quad (7)$$

由(7)式得

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2}). \quad (8)$$

于是 $D_2-aD_1, D_3-aD_2, \cdots, D_n-aD_{n-1}$ 是公比为 b 的等比数列，从而

$$D_n-aD_{n-1}=(D_2-aD_1)b^{n-2}. \quad (9)$$

由于 $D_1=|a+b|=a+b$，

$$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2.$$

因此 $D_2-aD_1=b^2$。从而

$$D_n-aD_{n-1}=b^n. \quad (10)$$

由(7)式又可得出

$$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2}). \quad (11)$$

同理可得

$$D_n-bD_{n-1}=a^n. \quad (12)$$

联立(10)、(12)式，解得

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}. \quad (13)$$

当 $n=1,2$ 时，公式(13)也成立。

若三对角，$\alpha+\beta$ 在主对角线，1 与 $\alpha\beta$ 在两侧的行列式：$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ 其中 α,β 为 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 的两个根。

(3) 化三角（每行(列)+(−)上(下)行(列)）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

每一行减上一行 $=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n.$

(4) 归纳法

例 5 计算下列 n 阶行列式 $(n\geqslant 2)$：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$n=2$ 时 $D_2=x^2+a_1x+a_0$，设 $n-1$ 时 $D_{n-1}=x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_0$

对 D_n 按第一行展开，$D_n=x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1)+(-1)^{n+1}a_0\cdot(-1)^{n-1}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，由归纳法，成立。

(7) 按行(列)展开

(5) 递推关系

例 6 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$n=1$ 时 $D_1=2$，由行和相等，所有列加至第 1 列，$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 1 & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}=D_{n-1}+1 \Rightarrow D_n=n+1$

(6) 用 Vandermonde 行列式

例 11 计算下述 n 阶行列式 $(n\geqslant 2)$：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

(8) 拆为多个行列式的和。

拆开，由于成比例者 det 为 0，原式 $=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$

（或减第一列的倍数）

(9) 去除相关项，降低难度。

例 9 设数域 K 上 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$，它的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}。把 A 的每个元素都加上同一个数 t，得到的矩阵记作 $A(t)=(a_{ij}+t)$。证明：

$$|A(t)|=|A|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

证明 $|A(t)|$ 的每一列都是两组数的和，利用行列式的性质 3，可以把 $|A(t)|$ 拆成 2^n 个行列式的和，由于两列相同，行列式的值为 0，因此可能不为 0 的行列式至多只能有 1 列含元素 t，于是

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & t \end{vmatrix}$$

$$=|A|+tA_{11}+tA_{21}+\cdots+tA_{n1}+\cdots+tA_{1n}+tA_{2n}+\cdots+tA_{nn}$$

$$=|A|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

(11). $|I_m-AB|=|I_n-BA|$

例 21 计算下述 n 阶行列式 $(n\geqslant 2)$：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

解 原式 $=\begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & 2a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & na_n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$=\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(1,2,3,\cdots,n)-\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\right|$

$=\left|-\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\right|\left|I_n-(\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\})^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(1,2,3,\cdots,n)\right|$

$=(-1)^na_1a_2\cdots a_n\left|I_1-(1,2,3,\cdots,n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right|$

$=(-1)^na_1a_2\cdots a_n\left(1-\frac{n(n+1)}{2}\right).$

Cramer 法则：解为 $\left(\frac{|B_1|}{|A|},\cdots,\frac{|B_n|}{|A|}\right)$，齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$.

按 k 行(列)展开与代数余子式：$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}A\begin{pmatrix} i_1' & \cdots & i_{n-k}' \\ j_1' & \cdots & j_{n-k}' \end{pmatrix}$

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

每次按第一行与最后一行展开，$D_n=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}(-1)^{1+2n+1+2n}D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=\cdots=(a^2-b^2)^n$

第三章 n 维向量空间 K^n

精减：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}\geq \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$ 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表出，则 $\mathrm{rank}A\leq\mathrm{rank}B$ → A 中 α 能被 (A, B) 中线性表出，同理 B 也是，证毕

$\mathrm{rank}(A,B)\leq\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$

证 rank 不等式：① 用已知不等式 ② 取极大无关 ③ rank 阶子矩阵的规律 ④ 用对角阵

14. 证明：$\mathrm{rank}((A,B))\geqslant\max\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$。

例 9 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 $l\times m$ 矩阵，C 是 $s\times m$ 矩阵。证明：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\geqslant\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

证明 设 $\mathrm{rank}(A)=r$，$\mathrm{rank}(B)=t$，则 A 有一个 r 级子矩阵 A_1，使得 $|A_1|\neq 0$；B 有一个 t 级子矩阵 B_1，使得 $|B_1|\neq 0$。从而 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有一个 $(r+t)$ 阶子式：

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix}=|A_1||B_1|\neq 0.$$

因此

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\geqslant r+t=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

题目：例 5 证明：在 n 维向量空间 K^n 中，n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当 K^n 中任一向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。

必要性：在 K^n 中 n+1 个向量一定相关，则 $\forall\beta\in K^n$，$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Rightarrow \beta$ 能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。

充分性：则 $e_1,\cdots,e_n$ 能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出 $\Rightarrow \mathrm{rank}(e_1,\cdots,e_n)\leq\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\leq n \Rightarrow \mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=n$，则线性无关

例 11 设数域 K 上的 n 级矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证明：A 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩等于 n。

(主对角占优矩阵)

即证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。若线性相关，∃$k_1,\cdots,k_n$ 不全为0，s.t. $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$。

设 $|k_l|=\max\{|k_1|,\cdots,|k_n|\}$，第 l 个分量有 $k_1a_{l1}+\cdots+k_na_{ln}=0 \Rightarrow a_{ll}=-\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}\frac{k_i}{k_l}a_{li} \Rightarrow |a_{ll}|\le\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}|a_{li}|$ 矛盾！

于是线性无关。

—通过条件与要证的差距看

4. 证明：数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

对任何 $\boldsymbol{\beta}\in K^n$ 都有解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A|\neq 0$。

充分性：若 $|A|=0$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 相关，取极大线性无关组 A_0，扩充为 n 元线性无关组 A，取 $\beta\in A\backslash A_0$，一定不存在不全为0的系数使之成立，否则相关矛盾。

必要性：由 Cramer 法则显然成立 —线性方程组要想 Cramer 法则。

8. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$。

证明：$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$。

—已有 β 被 α 线性表出，只需再证 α 被 β 线性表出。

例 3 设 K^n 中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\a_{3n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$。证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 K^n 的一个基。

—要证明是基，只需证线性无关 + dim=n.

有关向量组秩的问题

通常取极大线性无关组

例 6 证明：如果 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，那么它的任何 s 行组成的子矩阵 A_1 的秩大于或等于 $r+s-m$。

证明 设矩阵 A 的行向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$。任取 A 的 s 行组成子矩阵 A_1。设 A_1 的秩为 l。取 A_1 的行向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1},\boldsymbol{\gamma}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_l}$。把它扩充成 A 的行向量组的极大线性无关组 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_l},\boldsymbol{\gamma}_{i_{l+1}},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_r}$。显然 $\boldsymbol{\gamma}_{i_{l+1}},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_r}$ 不是 A_1 的行向量。因此

$$r-l\le m-s$$

由此得出

$$l\ge r+s-m.\qquad ■$$

例 1 计算下述矩阵的秩，并且求它的列向量组的一个极大线性无关组：

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&2&-1\\1&1&-2&4\\-2&1&0&3\\0&5&-4&2\end{pmatrix}.$$

解法一 用初等行变换把 A 化成阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}-3&0&2&-1\\1&1&-2&4\\-2&1&0&3\\0&5&-4&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\-3&0&2&-1\\-2&1&0&3\\0&5&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&3&-4&11\\0&3&-4&11\\0&5&-4&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&3&-4&11\\0&0&0&0\\0&-1&4&-20\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&-1&4&-20\\0&0&8&-49\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从最后这个阶梯形矩阵看出，$\operatorname{rank}(A)=3$，A 的第 1,2,3 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组。

求极大线性无关组：化阶梯矩阵

求 rank：①化阶梯矩阵

②最高阶非零子式的阶

6. 证明：矩阵 A 的任意一个子矩阵的秩不会超过 A 的秩。

设 $\operatorname{rank}A_1=r$，则 A_1 有一个 r 阶非零子式。

其也是 A 的子式，即 $\operatorname{rank}A\ge r=\operatorname{rank}A_1$。

10. 设 A,B 分别是数域 K 上的 $s\times n$，$m\times n$ 矩阵。用 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 表示在 A 的下方添写上 B 得到的 $(s+m)\times n$ 矩阵。证明：

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_s\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix}$ 即证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的极大线性无关组的向量个数 ≤ A 的极大数 + B 的极大数，易证。

精减：对齐次方程组的解空间 W，$\dim W=n-\operatorname{rank}A$；非齐次线性方程组：特解 + [illegible]的通解，求解：[illegible]为阶梯型

例 3 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于 0，并且 A 的 (k,l) 元的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$。证明：

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}A_{k1}\\A_{k2}\\\vdots\\A_{kn}\end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

先算 dim，再求解

证明 由于 $A_{kl}\neq 0$，因此 A 有一个 $n-1$ 阶子式不为 0。又由于 $|A|=0$，因此 $\operatorname{rank}(A)=n-1$。从而这个齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W=n-\operatorname{rank}(A)=n-(n-1)=1.$$

考虑这个齐次线性方程组的第 i 个方程：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0.$$

当 $i\neq k$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0;$$

当 $i=k$ 时，有

$$a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=|A|=0.$$

因此 $\boldsymbol{\eta}=(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})'$ 是这个齐次线性方程组的一个解。由于 $A_{kl}\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 线性无关。由于 $\dim W=1$，因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是 W 的一个基，即 $\boldsymbol{\eta}$ 是这个齐次线性方程组的一个基础解系。■

5. 证明：方程个数比未知量个数大 1 的线性方程组有解的必要条件是它的增广矩阵的行列式等于零；如果系数矩阵的秩等于未知量的个数，那么这一条件也是充分条件。

—有解：$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\tilde{A}$

① 有解：$\operatorname{rank}\tilde{A}=\operatorname{rank}A=n$，故 $|\tilde{A}|=0$，$\tilde{A}$ 为 $n+1$ 阶方阵。

② $\operatorname{rank}A=n$，$\det\tilde{A}=0\Rightarrow\operatorname{rank}\tilde{A}=n=\operatorname{rank}A\Rightarrow$ 有解。

1. 设 $A=(a_{ij})$ 是实数域上的 n 级矩阵，证明：如果

$$a_{ii}>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

那么

$$|A|>0.$$

—已有主对角占优阵的 rank=n.

令 $B(t)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}t&\cdots&a_{1n}t\\a_{21}t&a_{22}&\cdots&a_{2n}t\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}t&a_{n2}t&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\Rightarrow|B(t)|$ 为关于 t 的连续函数，有 $|B(0)|>0$，又 $|B(t)|\neq0\Rightarrow|B(1)|>0$ 即 $|A|>0$。

第四章 矩阵的运算

精减：有结合律 $(AB)C=A(BC)$，无交换律，无消去律。

题目：

结合方程的解空间。

例 9 设 A 是数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵，证明：如果对于 K^n 中任一列向量 $\boldsymbol{\eta}$，都有 $A\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$，那么 $A=0$。

证明 假设 $A\neq 0$，由已知条件得，K^n 中任一列向量 $\boldsymbol{\eta}$ 都是 n 元齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解。从而齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间 $W=K^n$。由于 $\dim W=n-\operatorname{rank}(A)$，因此

$$n=n-\operatorname{rank}(A).$$

由此推出 $\operatorname{rank}(A)=0$，从而 $A=0$，矛盾。■

点评：

在讲了本章 4.5 节矩阵的分块后，例 9 还可以按如下方式证明：

$$A=AI=A(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(A\boldsymbol{\varepsilon}_1,A\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,A\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=0.$$

—常规法，构造出0.

基本矩阵 E_{ij}：第 (i,j) 元为1，其余为0。

$E_{ij}\cdot A$：将 A 第 j 行移至第 i 行，其余为0。$A\cdot E_{ij}$：将 A 第 i 列移至第 j 列，其余为0。

与所有 n 级矩阵都可交换的矩阵一定是数量矩阵（取 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 即证）

斜对称矩阵的 rank 为偶数，若为奇数，则奇数阶斜对称矩阵行列式为0矛盾。

标准型为 $\operatorname{diag}\left(0,0,\cdots,0,\begin{pmatrix}0&a_1\\-a_1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&a_s\\-a_s&0\end{pmatrix}\right)$

例 11 设 n 级矩阵 A,B 的元素都是非负实数。证明：如果 AB 中有一行的元素全为 0，那么 A 或 B 中有一行元素全为 0。

证明 设 AB 的第 i 行元素全为 0，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=0,\quad j=1,2,\cdots,n\tag{4}$$

—矩阵乘法元素的表示：$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

若 A 的第 i 行元素全为 0，则命题为真。如果 A 的第 i 行元素不全为 0，那么对某个 l，$a_{il}\neq 0$。由于 A,B 的元素均为非负实数，因此从 (4) 式得

$$b_{lj}=0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

于是 B 的第 l 行的元素全为 0。

5. 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵。证明：如果 $AA'=0$，那么 $A=0$。

$0=(AA')(i,i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{ik}\Rightarrow a_{ik}=0\ \forall i,k\Rightarrow A=0.$

12. 设 A 是实数域上的 n 级上三角矩阵，证明：如果 A 与 A' 可交换，那么 A 是对角矩阵。

—针对 A 与 A' 的乘积问题，从第 i,i 元下手。

$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2$，对 $i=1\Rightarrow a_{11}^2$ 约为0，即 $a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$，同理 $\Rightarrow a_{23}=\cdots=0$，递推，有 A 为对角阵。

精减：$\operatorname{rank}AB\le\min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}$，$\operatorname{rank}A^TA=\operatorname{rank}A$（用 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解来证），若 $AB=0$，则 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\le n$。

题目：

例 8 在数域 K 中，设

$$u_j=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i^j,\quad 1\le j<2n.$$

令

$$A=\begin{pmatrix}u_1&u_2&\cdots&u_n\\u_2&u_3&\cdots&u_{n+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\u_n&u_{n+1}&\cdots&u_{2n-1}\end{pmatrix}$$

证明：对任意 $\boldsymbol{\beta}\in K^n$，线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解的充分必要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不

—元素为和形式，分解为 Vandermonde 的乘积。

(分解乘积)

11. 计算下述 $n+1$ 级矩阵 A 的行列式：

$$A=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\cdots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\cdots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\cdots&(a_n+b_n)^n\end{pmatrix}.$$

等，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 全不为 0。

证明

$$|A| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_2 & u_3 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i a_i & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^n & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 a_1 & c_2 a_2 & \cdots & c_n a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 a_1^{n-1} & c_2 a_2^{n-1} & \cdots & c_n a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 a_1 & c_2 a_2 & \cdots & c_n a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 a_1^{n-1} & c_2 a_2^{n-1} & \cdots & c_n a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= c_1 c_2 \cdots c_n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} c_i \cdot a_i \cdot \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)^2$$

于是线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 有唯一解的充分必要条件是：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不等，且 $c_1, c_2, \cdots, c_n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全不为 0。 ■

12. 计算下述 n 级矩阵 A 的行列式：

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \varphi_1) & \cos(\theta_1 - \varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_1 - \varphi_n) \\ \cos(\theta_2 - \varphi_1) & \cos(\theta_2 - \varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_2 - \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\theta_n - \varphi_1) & \cos(\theta_n - \varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_n - \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cos\varphi_1 \\ & \vdots \\ \cos\theta_n & \cos\varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta_1 & \cdots & \sin\theta_n \\ \sin\varphi_1 & \cdots & \sin\varphi_n \end{pmatrix} \right|$$

$n>2$ 时 rank$=2<n$. $\det A=0$.

$n=2$ 时 $|A|=\sin(\theta_2-\theta_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)$

$n=1$ 时 $|A|=\cos(\theta_1-\varphi_1)$

16. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：如果存在正整数 m，使得 $\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+1})$，那么对一切正整数 k，有

$$\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+k}).$$

有结论：rankAB=rank$B$ 时 rankABC=rankBC. 代入可证.

18. 设 $A=(a_{ij})$ 是实数域上的 n 级对称矩阵，$|A| \neq 0$，且对某个固定的指标 $k<n$，当 $|i-j| \geqslant k$ 时 $a_{ij}=0$。设 $B'B=A$，其中 $B=(b_{ij})$ 是上三角矩阵，证明：当 $j-i \geqslant k$ 时有 $b_{ij}=0$。

不能直接看出时，先分析条件.

有 $|B|\neq 0$. 又 B 上三角 $\Rightarrow b_{ii}\neq 0\ \forall 1\leq i\leq n$. $|i-j|\geq k$ 时 $a_{ij}=\sum_{s=1}^{n} b'_{is}b_{sj}=\sum_{s=1}^{n} b_{si}b_{sj}=0$.

$i>j$ 时 $b_{ij}=0$.

其中 $i\geq k+j$ 时 $b_{ij}=0$. 显然成立

$j-i\geq k$ 时 $0=b_{1i}b_{1j}+\cdots+b_{ni}b_{nj}$

$i=1$ 时 $0=b_{11}b_{1j}\Rightarrow b_{1j}=0$

$i=2$ 时 $0=\underbrace{b_{12}b_{1j}}_{0}+b_{22}b_{2j}\Rightarrow b_{2j}=0$

$b_{ij}=0$ 均成立.证毕.

循环矩阵的行列式. 难

例 7 设 A 是复数域上的 n 级循环矩阵，它的第一行为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，求 $|A|$。

解法二 令 $w=e^{\frac{2\pi}{n}i}$，设 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$，令

通法.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

则

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} f(1) & f(w) & f(w^2) & \cdots & f(w^{n-1}) \\ f(1) & wf(w) & w^2f(w^2) & \cdots & w^{n-1}f(w^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(1) & w^{n-1}f(w) & w^{2(n-1)}f(w^2) & \cdots & w^{(n-1)(n-1)}f(w^{n-1}) \end{vmatrix}$$

$$= f(1)f(w)f(w^2)\cdots f(w^{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} f(w^i)\, |B|.$$

又由于 $|AB|=|A||B|$，且 $|B|\neq 0$，因此

$$|A| = \prod_{i=0}^{n-1} f(w^i).$$

精髓：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 特别地,二阶矩阵的逆：$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 主交换,副变号.

不是 $(A_{11}\ A_{12} \cdots)$!!!

题目：

例 2 证明：如果 A 是幂零矩阵，它的幂零指数为 l，那么 $I-A$ 可逆；并且求 $(I-A)^{-1}$。

证明 由于 $A^l=0$，因此

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{l-1}) = I-A^l = I.$$

从而 $I-A$ 可逆，并且

$$(I-A)^{-1} = I+A+A^2+\cdots+A^{l-1}.$$ ■

运用已知公式：如 $(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=x^n-1$

Taylor公式：$f(A)=f(0)+f'(0)A+\frac{f''(0)}{2!}A^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}A^n$

例 9 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ 0 & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

求逆矩阵不一定只用初等变换：$(A\ I)\to(I\ A^{-1})$

也可以观察A的性质

解 令

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

据本章 4.1 节的典型例题的例 8 的结论，得

$$A = I+bH+b^2H^2+\cdots+b^{n-1}H^{n-1},$$
$$H^n=0.$$

于是

$$A(I-bH) = I-b^nH^n = I.$$

从而

$$A^{-1} = I-bH = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

初等变换不一定一步步做,麻烦时可直接解方程

例 11 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵（$n\geqslant 2$）：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

解 先解线性方程组

$$AX = \boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)'$。将这 n 个方程相加，得

$$\frac{1}{2}n(n+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$，由上式得

$$y = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

从第 1 个方程减去第 2 个方程，得

$$(1-n)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = b_1-b_2,$$

由此得出

$$y-nx_1 = b_1-b_2.$$

从而

$$x_1 = \frac{1}{n}(y-b_1+b_2) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j\right)-b_1+b_2\right].$$

类似地，从第 i 个方程减去第 $i+1$ 个方程（$i=2,\cdots,n-1$），可求出

$$x_i = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j\right)-b_i+b_{i+1}\right], \quad i=2,\cdots,n-1.$$

从第 n 个方程减去第 1 个方程，可求出

$$x_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j\right)-b_n+b_1\right].$$

记 $s=\frac{2}{n(n+1)}$，分别令 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$，得

$$A^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} s-1 & s+1 & s & \cdots & s \\ s & s-1 & s+1 & \cdots & s \\ s & s & s-1 & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s & s & s & \cdots & s+1 \\ s+1 & s & s & \cdots & s-1 \end{pmatrix}.$$

例 13 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：对任意正整数 k，有

$$\operatorname{rank}(A^{n+k}) = \operatorname{rank}(A^n).$$

rank的关系.

证明 如果 A 可逆，那么 A^{n+k}，A^n 都可逆。从而 $\operatorname{rank}(A^{n+k})=n=\operatorname{rank}(A^n)$。

下面设 A 不可逆，则 $\operatorname{rank}(A)<n$。由于

$$\operatorname{rank}(A) \geqslant \operatorname{rank}(A^2) \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{rank}(A^n) \geqslant \operatorname{rank}(A^{n+1}),$$

并且小于 n 的自然数只有 n 个，因此上述 n 个"$\geqslant$"中至少有一个取"="。即存在正整数 $m \leqslant n$，使得

$$\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+1}).$$

据习题 4.3 第 16 题的结论得，对一切正整数 k，有

$$\operatorname{rank}(A^m) = \operatorname{rank}(A^{m+k}).$$

由于 $m \leqslant n$，因此有

$$\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+k}).$$ ■

11. 设 $a\neq 0$，H 与例 9 中的 H 相同，求 $(aI+H)^{-1}$。 D^{-1}

$(I-aH)(I+aH+a^2H^2+\cdots+a^{n-1}H^{n-1})=I-a^nH^n=I$. 视 aH 为整体☆

$a(I-(-a^{-1})H)\underbrace{(I+(-a^{-1}H)+(-a^{-1}H)^2+\cdots+(-a^{-1}H)^{n-1})}_{A}=a\cdot(I-(-a^{-1}H)^n)=aI$

$\Rightarrow DA=aI\Rightarrow D^{-1}=a^{-1}A$

例 12 证明：如果 n 级可逆矩阵 A 的每一行元素的和都等于 a，那么 $a\neq 0$，且 A^{-1} 的每一行元素的和都等于 a^{-1}。

将条件用表达式写出后双边同乘得到结果

证明 用 $\mathbf{1}_n$ 表示元素全为 1 的 n 维列向量，则

$$A\mathbf{1}_n = a\mathbf{1}_n$$

两边左乘 A^{-1}，得

$$\mathbf{1}_n = aA^{-1}\mathbf{1}_n.$$

由此得出，$a\neq 0$，且 $A^{-1}\mathbf{1}_n=a^{-1}\mathbf{1}_n$。

因此 A^{-1} 的每一行的元素的和都等于 a^{-1}。 ■

13. 设 n 级矩阵 A，B 满足

$$A+B=AB,$$

证明：$I-A$，$I-B$ 都可逆，并且 $AB=BA$。

证明可逆：① rank=n ② 乘矩阵后为可逆.

相乘为I.凑等

精彩：$|I_m-AB|=|I_n-BA|$

实在无思路，化为标准型☆

$AX=B\Rightarrow(A.B)\to(G.D)$ 来求解，因为 A 不一定可逆.

证rank不等式：④构造对角阵

例 2 证明 Sylvester 秩不等式：设 A、B 分别是 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n.$$

证法一 只要证 $n+\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$。

据第 3 章 3.5 节的典型例题的例 8 的结论，有

$$n+\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}.$$

作分块矩阵的初等行（列）变换：

$$\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}\xrightarrow{②+A\cdot①}\begin{pmatrix}I_n&0\\A&AB\end{pmatrix}\xrightarrow[②+①\cdot(-B)]{}\begin{pmatrix}I_n&-B\\A&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[②\cdot(-I_m)]{}\begin{pmatrix}I_n&B\\A&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(①,②)]{}\begin{pmatrix}B&I_n\\0&A\end{pmatrix}.$$

根据分块矩阵的初等行（列）变换不改变矩阵的秩，以及 3.5 节的例 9，得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B&I_n\\0&A\end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(A).$$

因此 $\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n.$

例 13 解下述数域 K 上的矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&-3&3\\1&3&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&9&7\\1&11&7\\7&5&7\end{bmatrix}.$$

解

$$\begin{bmatrix}3&-1&2&3&9&7\\4&-3&3&1&11&7\\1&3&0&7&5&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&7&5&7\\4&-3&3&1&11&7\\3&-1&2&3&9&7\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&7&5&7\\0&-15&3&-27&-9&-21\\0&-10&2&-18&-6&-14\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&7&5&7\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{9}{5}&\frac{3}{5}&\frac{7}{5}\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{9}{5}&\frac{3}{5}&\frac{7}{5}\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{5}&\frac{8}{5}&\frac{16}{5}&\frac{14}{5}\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{9}{5}&\frac{3}{5}&\frac{7}{5}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $AY=\boldsymbol{\beta}_1$，$AY=\boldsymbol{\beta}_2$，$AY=\boldsymbol{\beta}_3$ 的一般解分别为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}x_3+\frac{8}{5},\\x_2=\frac{1}{5}x_3+\frac{9}{5};\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}x_3+\frac{16}{5},\\x_2=\frac{1}{5}x_3+\frac{3}{5};\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}x_3+\frac{14}{5},\\x_2=\frac{1}{5}x_3+\frac{7}{5}.\end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量。由此得出

$$X=\begin{bmatrix}-3c_1+\frac{8}{5}&-3c_2+\frac{16}{5}&-3c_3+\frac{14}{5}\\c_1+\frac{9}{5}&c_2+\frac{3}{5}&c_3+\frac{7}{5}\\5c_1&5c_2&5c_3\end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2,c_3 是 K 中的任意数。

练习：9. 解下述数域 K 上的矩阵方程：

$$X\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\9&18\end{bmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix}2&9\\4&18\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&4&2&9\\6&8&4&18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4/3&2/3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

对 β_1：$x_1=-\frac{4}{3}x_2+\frac{2}{3}$. 对 β_2：$x_1=-\frac{4}{3}x_2+3$.

故 $X^T=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}c_1+\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}c_2+3\\c_1&c_2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-4c_1+\frac{2}{3}&3c_1\\-4c_2+3&3c_2\end{pmatrix}$

c_1 变成 $3c_1$ 不是整体 $-\frac{4}{3}c_1+\frac{2}{3}$ 乘 3 !!!

☆一定注意取值的合理性

例 3 如果数域 K 上的 n 级矩阵 A 满足 $A^2=A$，那么称 A 是幂等矩阵。证明：数域 K 上 n 级矩阵 A 是幂等矩阵当且仅当

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n.$$

证法一 n 级矩阵 A 是幂等矩阵 $\Leftrightarrow$ $A^2=A$ $\Leftrightarrow$ $A-A^2=0$
$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A-A^2)=0$。

由于

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&I-A\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①}\begin{pmatrix}A&0\\A&I-A\end{pmatrix}\xrightarrow[②+①]{}\begin{pmatrix}A&A\\A&I\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{①+(-A)\cdot②}\begin{pmatrix}A-A^2&0\\A&I\end{pmatrix}\xrightarrow[①+②\cdot(-A)]{}\begin{pmatrix}A-A^2&0\\0&I\end{pmatrix}.$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&I-A\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A-A^2&0\\0&I\end{pmatrix}.$$

从而 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=\operatorname{rank}(A-A^2)+n.$

例 4 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，证明：对于任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^s$，线性方程组 $A'AX=A'\boldsymbol{\beta}$ 一定有解。

方程组有解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\tilde{A}$

证明 只要证增广矩阵 $(A'A,A'\boldsymbol{\beta})$ 与系数矩阵 $A'A$ 的秩相等。由于 A 是实数域上的矩阵，因此 $\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A')$。从而

$$\operatorname{rank}(A'A,A'\boldsymbol{\beta})=\operatorname{rank}(A'(A,\boldsymbol{\beta}))\leqslant\operatorname{rank}(A')=\operatorname{rank}(A'A).$$

又由于 $\operatorname{rank}(A'A)\leqslant\operatorname{rank}(A'A,A'\boldsymbol{\beta})$，因此

$$\operatorname{rank}(A'A,A'\boldsymbol{\beta})=\operatorname{rank}(A'A).$$

从而线性方程组 $A'AX=A'\boldsymbol{\beta}$ 有解。 ■

例 17 设 A，B，C，D 都是数域 K 上的 n 级矩阵，且 $AC=CA$。证明：

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

重要结论.

证明 当 $|A|\neq 0$ 时，可以作下述分块矩阵的初等行变换：

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow{②+(-CA^{-1})\cdot①}\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}I&0\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

两边取行列式，得

$$|I||I|\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|.$$

于是

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|A(D-CA^{-1}B)|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CB|.$$

当 $|A|=0$ 时，令

$$A(t)=A-tI,$$

则 $|A(t)|=|A-tI|$ 是 t 的 n 次多项式，记作 $f(t)$。显然有 $f(0)=|A|=0$。因为 n 次多项式 $f(t)$ 在数域 K 中的根至多有 n 个，所以存在 $\delta>0$，使得 $\forall t\in(0-\delta,0+\delta)$ 且 $t\neq 0$，都有 $f(t)\neq 0$，即 $|A(t)|\neq 0$。由于 $AC=CA$，因此

$$A(t)C=(A-tI)C=AC-tC=CA-tC=C(A-tI)$$
$$=CA(t).$$

由上一段刚证得的结果得，当 $t\in(0-\delta,0+\delta)$ 且 $t\neq 0$ 时，有

$$\begin{vmatrix}A(t)&B\\C&D\end{vmatrix}=|A(t)D-CB|$$

令 $t\to 0$，在上式两边取极限，得

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

不能化为标准型

则用初等变换

例 25 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，证明：

（1）A 是列满秩矩阵当且仅当存在 s 级可逆矩阵 P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix};$$

（2）A 是行满秩矩阵当且仅当存在 n 级可逆矩阵 Q，使得

$$A=(I_s,0)Q.$$

证明 （1）由于 $\operatorname{rank}(A)=n$，因此 A 经过初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵 $G=\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}$。从而存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$，使得

$$P_t\cdots P_2P_1A=\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}.$$

从而

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_t^{-1}\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}$$

令 $P=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_t^{-1}$，则 P 是 s 级可逆矩阵，且

$$A=P\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}.$$

（2）由于 A 是行满秩矩阵，因此 A' 是列满秩矩阵。利用第（1）题结论，存在 n 级可逆矩阵 P，使

$$A'=P\begin{pmatrix}I_s\\0\end{pmatrix}.$$

从而

$$A=(I_s,0)P'.$$

令 $Q=P'$，即得 $A=(I_s,0)Q$。 ■

见 $BC=0$. 想到 $\mathrm{rank}B+\mathrm{rank}C\le n$.

2. 设 B 为 n 级矩阵。C 为 $n\times m$ 行满秩矩阵，证明：$n=\dim$ 解空间 $=n-\mathrm{rank}B$ （$\mathrm{rank}\,C=n$）

（1）如果 $BC=0$，那么 $B=0$； (1). $\mathrm{rank}B\le n-n=0$. $B=0$.

（2）如果 $BC=C$，那么 $B=I$。 (2). $(B-I)C=0\Rightarrow \mathrm{rank}(B-I)=0$. $B=I$.

矩阵分块求逆更简单

11. 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵（$n\geq 2$）：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

$A=\begin{pmatrix}0 & B\\ a_n & 0\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & a_n^{-1}\\ B^{-1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & a_n^{-1}\\ a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} & \end{pmatrix}$

$|I_m-AB|=|I_n-BA|$ 的应用.

15. 计算下述 n 阶行列式（$n\geq 2$）：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&\ddots\\&&&&n\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}(1\,2\,3\cdots n)-\mathrm{diag}(1,\cdots,n)\right|=\left|-\mathrm{diag}(1,\cdots,n)\left(I_n-(\mathrm{diag}(\ ))^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}(1\,2\cdots n)\right)\right|$$

$$=(-1)^n n!\left|I_n-\begin{pmatrix}1\\1/2\\ \vdots\\1/n\end{pmatrix}(1\,2\cdots n)\right|=(-1)^n n!\,(1-n)$$

证明只有0解：① $|A|\neq 0$

② $\dim W=n-\mathrm{rank}A=0$.

即 $\mathrm{rank}A$ 与未知量个数相等.

20. 证明：如果 B 是数域 K 上的 $s\times r$ 列满秩矩阵，那么矩阵方程 $BX=0_{s\times m}$ 只有零解。

$\dim\mathrm{Ker}=r-r$.

24. 设 α,β 都是 n 维列向量，证明：如果 $\alpha'\beta=-1$，那么矩阵 $I_n+\beta\alpha'$ 的秩等于 $n-1$。

$|I_n+\beta\alpha'|=1-(-\alpha'\beta)=0\Rightarrow \mathrm{rank}<n$. 只需找非零 $n-1$ 阶子式. α,β 同去掉第 i 分量 $\Rightarrow$ 若 $\forall i$. $\alpha_i=\beta_i=0$. 则 $\alpha'\beta=0\neq -1$. 矛盾 $\Rightarrow$

$\exists i$. $\alpha_i,\beta_i\neq 0$. $\Rightarrow$ 去掉后的 $\alpha_i'\beta_i\neq -1\Rightarrow I_{n-1}+\beta_i\alpha_i'$ 为非0子式

（正交矩阵） 精减：正交矩阵：$A^T=A^{-1}$. $A^TA=I$. 酉矩阵：$A^H=A^{-1}$. A^H 为 A 的共轭转置 $\bar{A}^T$

Gram-Schmidt 正交化：

定理 1 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中一个线性无关的向量组，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_s=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j,$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是正交向量组，并且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价。

分解：$A\in\mathbb{R}^n$. A 可逆. 则 $A=$ 正交矩阵 $T\cdot$ 上三角阵 B. B 的对角元为正.

本质是 Schmidt 正交化.

写上三角阵与正交

例 4 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

把 A 分解成正交矩阵 T 与主对角元为正数的上三角矩阵 B 的乘积。

解 设 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{3}{3}\beta_1=\alpha_2-\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$
$$=\alpha_3-\frac{2}{3}\beta_1-\frac{-1}{2}\beta_2=\alpha_3-\frac{2}{3}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

于是 $|\beta_1|=\sqrt{3}$，$|\beta_2|=\sqrt{2}$，$|\beta_3|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_1+\beta_2,\quad \alpha_3=\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2+\beta_3.$$

令

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\sqrt{6}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

从而

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$
$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}|\beta_1|&0&0\\0&|\beta_2|&0\\0&0&|\beta_3|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&\frac{2}{3}\sqrt{3}\\0&\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$
$$=TB.$$

Q-R 分解：设 A 是实数域上的 $m\times n$ 矩阵，其中 $m>n$。证明：如果 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，那么 A 可以唯一分解成

$$A=QR,$$

其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵，R 是主对角元都为正数的 n 级上三角矩阵，这称为 QR—分解。

原因：Schmitz 正交化中 $\beta_n=\alpha_n-\cdots$ 中 α_n 系数为正.

正交补空间 **例 17** 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，如果向量 α 与 U 中每一个向量正交，那么称 α 与 U **正交**，记作 $\alpha\perp U$。令

$$U^{\perp}\xlongequal{\text{def}}\{\alpha\in\mathbf{R}^n\mid\alpha\perp U\}.$$

称 $U^{\perp}$ 是 U 的**正交补**。证明：$U^{\perp}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。

证定间：加法.数乘封闭

正交投影 **例 18** 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。令

$$P_U:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$$
$$\alpha\longmapsto\alpha_1,$$

其中 $\alpha_1\in U$，并且 $\alpha-\alpha_1\in U^{\perp}$，则称 P_U 是 $\mathbf{R}^n$ 在 U 上的**正交投影**，把 α_1 称为向量 α 在 U 上的**正交投影**。证明：对于 $\alpha\in\mathbf{R}^n$，$\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上的正交投影当且仅当

$$|\alpha-\alpha_1|\leqslant|\alpha-\gamma|,\ \forall\gamma\in U.$$

$\mathcal{A}$ 为单射 $\Leftrightarrow\mathrm{Ker}\mathcal{A}=\{0\}$.

题目：

例 6 设数域 K 上的 3×4 矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\3&1&4&7\\-1&1&0&3\end{pmatrix}.$$

令

$$\mathbf{A}(\alpha)=A\alpha,\quad\forall\alpha\in K^4.$$

分别求 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ 的一个基和维数。

$\mathrm{Im}A$ 与 A 的关系（此题为 $\mathcal{A}(\alpha)=A\alpha$. 若 $\mathcal{A}(\alpha)=\alpha A$. 关心行向量组（不用背））

解 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ 等于 A 的列空间，因此求 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ 的一个基和维数就是求矩阵 A 的列向量组的一个极大线性无关组和秩。$\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ 等于 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间，同此求 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ 的一个基就是求 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系。这些都可以通过对矩阵 A 作初等行变换化成简化行阶梯形来求得：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&4\\0&1&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此看出，A 的第 1、2 列是 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ 的一个基，$\dim\mathrm{Im}\mathbf{A}=2$。

由公式(4)得。$\dim\mathrm{Ker}\mathbf{A}=4-2=2$。

$AX=\mathbf{0}$ 的一般解是

$$\begin{cases}x_1=-x_3-x_4,\\x_2=-x_3-4x_4,\end{cases}$$

其中 x_3,x_4 是自由未知量。由此得出，$AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系是

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\eta_2=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

于是 η_1,η_2 是 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ 的一个基。

24. 设 H 是实数域上的 n 级矩阵，它的元素为 1 或 -1。如果 $HH'=nI$，那么称 H 是 n 级 **Hadamard 矩阵**。证明：元素为 1 或 -1 的 n 级矩阵 H 是 Hadamard 矩阵当且仅当 H 的任意两行都正交。

α 为行向量

$HH'=nI\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n')=\begin{pmatrix}n&&\\&n&\\&&\ddots\\&&&n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}i\neq j\text{ 时 }\alpha_i\alpha_j'=0.\\ i=j\text{ 时 }\alpha_i\alpha_j'=n\end{cases}$ $(\alpha_i,\alpha_j)=0$. $i\neq j$. 证毕.

显然的

31. 证明：如果 A 和 B 都是 n 级正交矩阵，且 $|A|+|B|=0$，那么 $A+B$ 不可逆。— 正交矩阵：$C^TC=C^{-1}C=I$. $C+I=C(C^T+I)$

$|A+B|=|A|\cdot|I+A^{-1}B|$ 记 $C=A^{-1}B$ 则 $\det C=|A|^{-1}|B|=-1$. 只需证 $|I+C|=0$. 而 $|I+C|=|C(C^T+I)|=|C||I+C|=-|C+I|\Rightarrow|C+I|=0$. 证毕

第五章 矩阵的相抵与相似

（相抵）精减：A 与 B 相抵 $\Rightarrow\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$. $\exists P.Q$ 为可逆矩阵. $A=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q$.

题目：

例 4 设 B_1 和 B_2 都是数域 K 上的 $s\times r$ 列满秩矩阵，证明：存在数域 K 上 s 级可逆矩阵 P，使得

$$B_2 = PB_1.$$

—— 化为标准形后计算简单

证明 由于 B_1 是 $s\times r$ 列满秩矩阵，因此

行满秩则要列变换.

行变换 $$B_1 \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而存在 s 级可逆矩阵 P_1，使得

$$P_1B_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

同理，存在 s 级可逆矩阵 P_2，使得

$$P_2B_2 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $$P_1B_1 = P_2B_2.$$

于是 $$B_1 = (P_1^{-1}P_2)B_2.$$

令 $P=P_1^{-1}P_2$，则 P 是 s 级可逆矩阵，使得 $B_1=PB_2$。■

例 9 设 A、B 分别是数域 K 上的 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程 $ABX=A$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A).$$

—— 若 $r(AB)=r(A)$, $\exists X$. $ABX=A$.

证明 设 A 的列向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$AB$ 的列向量组是 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m$。在 4.3 节的定理 1 已证 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。据 4.5 节的典型例题的例 10 的结论得

矩阵方程 $ABX=A$ 有解

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(AB,A)$

类 $Ax=\beta$, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\tilde{A}$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$

$\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m\}\cong\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可以由 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m\}$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m\}$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AB)$。 $(AA^-A=A)$

(广义逆) 精减：方程 $AXA=A$ 的每个解都称为 A 的一个广义逆. 若 $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q$. $A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}$

$Ax=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\beta=AA^-\beta$

题目：

例 6 设 A、B 分别是数域 K 上的 $s\times n$、$n\times s$ 矩阵。证明：

$$\operatorname{rank}(A-ABA) = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$

证明 据 4.5 节的例 2 的 Sylvester 秩不等式得 —— $\operatorname{rank}(AB)\geq \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n$.

$$\operatorname{rank}(A-ABA) = \operatorname{rank}[A(I_n-BA)] \geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$

剩下只要证：$\operatorname{rank}(A-ABA)+n\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)$。

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{pmatrix} \xrightarrow{②+B\cdot①} \begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & I_n-BA \end{pmatrix} \xrightarrow[②+①]{} \begin{pmatrix} A & A \\ BA & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{①+(-A)\cdot②} \begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I_n \end{pmatrix}$$
$$\geq \operatorname{rank}(A-ABA)+\operatorname{rank}(I_n)$$
$$= \operatorname{rank}(A-ABA)+n.$$

因此 $$\operatorname{rank}(A-ABA) = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$ ■

3. 求下列数域 K 上矩阵的广义逆：

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$；

思路：$A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q$

$\Downarrow$

$A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}$

$B.C.D$ 不定项.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 12 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+①\cdot 3 \\ ③+①\cdot(-2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$P(2,1(4))AP(1,2(3))P(1,3(-2)) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而

$$A = P(2,1(-4))\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P(1,3(2))P(1,2(-3)).$$

令

$$P = P(2,1(-4)),\quad Q = P(1,3(2))P(1,2(-3)),$$

则

$$A^- = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_1 & H \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1} = P(1,2(3))P(1,3(-2))\begin{pmatrix} I_1 & H \\ C & D \end{pmatrix}P(2,1(4))$$
$$= P(1,2(3))P(1,3(-2))\begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}P(2,1(4))$$
$$= \begin{bmatrix} 1-2c_2+3c_1 & h_1-2d_2+3d_1 \\ c_1 & d_1 \\ c_2 & d_1 \end{bmatrix}P(2,1(4))$$
$$= \begin{bmatrix} 1-2c_2+3c_1+4h_1-8d_2+12d_1 & h_1-2d_2+3d_1 \\ c_1+4d_1 & d_1 \\ c_2+4d_1 & d_2 \end{bmatrix},$$

其中 h_1、c_1、c_2、d_1、d_2 是 K 中的任意数。

证为广义逆即证 $AXA=A$.

10. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是数域 K 上的 n 级矩阵，令 $D=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$，$E=(\underbrace{I_n,I_n,\cdots,I_n}_{s\text{个}})$。证明：$A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是幂等矩阵且 $A_iA_j=0$（当 $i\neq j$）的充分必要条件为 $E'E$ 是 D 的一个广义逆。

$G=\begin{pmatrix} A_1^2 & A_1A_2 & \cdots & A_1A_n \\ A_2A_1 & A_2^2 & \cdots & A_2A_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_nA_1 & A_nA_2 & \cdots & A_n^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}(A_1\cdots A_n)=D\begin{pmatrix} I_n \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}(I_n\cdots I_n)D=DE'ED$. 于是题干条件 $\Leftrightarrow G=D \Leftrightarrow DE'ED=D \Leftrightarrow E'E$ 为 D 的广义逆

(相似) 精减：A 与 B 相似：$\exists P$ 为可逆方阵. $P^{-1}AP=B$

J（全 1 矩阵）的特征值为 n, 0($n-1$ 重)

$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$. 注意：不是任意排列都等价成立. 如 $\operatorname{tr}(ABC)$ 不一定与 $\operatorname{tr}(ACB)$ 相等.

证明用 AB 与 BA 非零特征值相等即可.

对循环排列成立. 即 $\operatorname{tr}(A_1A_2\cdots A_n)=\operatorname{tr}(A_2\cdots A_nA_1)=\operatorname{tr}(A_3\cdots A_nA_1A_2)=\cdots$

相似不变量：λ, $\varphi(x)$, $\det$, tr.

tr 不变

例 12 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A、B 满足 $AB-BA=A$，那么 A 不可逆。

证明 假如 A 可逆，则在 $AB-BA=A$ 两边左乘 A^{-1}，得

$$B-A^{-1}BA = I.$$

于是 $\operatorname{tr}(B-A^{-1}BA)=\operatorname{tr}(I)=n$。又有

$$\operatorname{tr}(B-A^{-1}BA) = \operatorname{tr}(B)-\operatorname{tr}(A^{-1}BA) = \operatorname{tr}(B)-\operatorname{tr}(B) = 0,$$

矛盾。因此 A 不可逆。

可对角化：矩阵相似于对角阵. 其中幂等矩阵($A^2=A$)可对角化, $A\sim\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $r=\operatorname{rank}A$.

题目:

例 16 证明:如果实数域上的 n 级矩阵 A 与 B 不相似,那么把它们看成复数域上的矩阵后仍然不相似。

证明 假如把 A 与 B 看成复数域上的矩阵后它们相似,则存在复数域上的 n 级可逆矩阵 U,使得 $U^{-1}AU=B$。设 $U=P+\mathrm{i}Q$,其中 P、Q 都是实数域上的矩阵。想构造一个实数域上的 n 级可逆矩阵。为此任给实数 t,考虑行列式 $|P+tQ|$,它是 t 的至多 n 次的多项式。由于数域 K 上的 n 次多项式在 K 中至多有 n 个根(见《高等代数》(第 2 版,下册)第 7 章 7.6 节的定理 4),因此存在实数 t_0,使得 $|P+t_0Q|\neq 0$。令 $S=P+t_0Q$,则 S 是实数域上的 n 级可逆矩阵。

$\mathbb{R}$上相似:$P\in\mathbb{R}^n$
$\mathbb{C}$上相似:$Q\in\mathbb{C}^n$. 不可混用!

由于 $U^{-1}AU=B$,因此 $AU=UB$。从而

$$A(P+\mathrm{i}Q)=(P+\mathrm{i}Q)B.$$

由此得出,$AP=PB$,$AQ=QB$。因此

$$AS=A(P+t_0Q)=AP+t_0AQ=PB+t_0QB=SB.$$

于是 $S^{-1}AS=B$。这表明实矩阵 A 与 B 相似,与已知条件矛盾。■

$trAB=trBA$

10. 设 A、B 都是数域 K 上的 n 级矩阵,证明:如果 $AB-BA=A$,那么对一切正整数 k,有

$$\mathrm{tr}(A^k)=0.$$

$k=1$时 $trA=trAB-trBA=0$. $k\geq 2$时 $A^k=AB\cdot A^{k-1}-BA\cdot A^{k-1}$. $trA^k=tr(A(BA^{k-1}))-tr((BA^{k-1})A)=0$.

证明A的特别性时.如证$A^2=A$.$A^2=I$等.
可对A的各个元素计算以简化步骤

12. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数,且 $\sum_{i=1}^{n}b_i=1$。设 $A=(a_{ij})$,其中

(提示:A幂等)

$$a_{ij}=\begin{cases}1-b_i, & 当\ i=j\\ -\sqrt{b_ib_j}, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

求矩阵 A 的秩;A 能否对角化?若 A 可对角化,写出与 A 相似的对角矩阵。

解:

12. 先证 A 是幂等矩阵。

$$A^2(i;i)=\sum_{k=1}^{n}A(i;k)A(k;i)=A(i;i)A(i;i)+\sum_{k\neq i}A(i;k)A(k;i)$$
$$=(1-b_i)^2+\sum_{k\neq i}(-\sqrt{b_ib_k})(-\sqrt{b_kb_i})$$
$$=(1-b_i)^2+b_i\sum_{k\neq i}b_k=(1-b_i)^2+b_i(1-b_i)=(1-b_i)$$
$$=A(i;i),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

当 $i\neq j$ 时

$$A^2(i;j)=\sum_{k=1}^{n}A(i;k)A(k;j)$$
$$=A(i;i)A(i;j)+A(i;j)A(j;j)+\sum_{k\neq i,j}A(i;k)A(k;j)$$
$$=(1-b_i)(-\sqrt{b_ib_j})+(-\sqrt{b_ib_j})(1-b_j)+\sqrt{b_ib_j}(1-b_i-b_j)$$
$$=-\sqrt{b_ib_j}=A(i;j).$$

因此 $A^2=A$。从而

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)=n-1.$$

于是

$$A\sim\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

用E_{ji}提取A的各个元素

14. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵。证明:如果对于数域 K 上的任一 n 级矩阵 X 都有 $\mathrm{tr}(AX)=0$,那么 $A=0$。

$tr(AE_{ji})=a_{ij}$ 易证.

精减:$\varphi_A(\lambda)=|\lambda I-A|$.特征值:$\varphi_A(\lambda)=0$的根. 特征向量:$(\lambda_iI-A)X=0$的一个基础解系. $trA=\sum\lambda_i$ $detA=\prod\lambda_i$

命题 1 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵,则 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 是一个 n 次多项式,λ^n 的系数是 1,λ^{n-1} 的系数等于 $-\mathrm{tr}(A)$,常数项为 $(-1)^n|A|$,λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 阶主子式的和乘以 $(-1)^k$,$1\leqslant k<n$。

↳ 特别地,对二阶方阵有 $|\lambda I-A|=\lambda^2-tr(A)\cdot\lambda+|A|=0$.

λ_1 几何重数:$(\lambda_1I-A)X=0$的解空间维数
λ_1 代数重数:$|\lambda I-A|$中根λ_1的重数

例 2 设 A 是复数域上的 n 级矩阵,并且 A 的元素全是实数。证明:如果虚数 λ_0 是 A 的一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量,那么 $\bar{\lambda}_0$ 也是 A 的一个特征值,且 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}_0$ 的一个特征向量。

证明 在 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 两边取共轭复数得,$\bar{A}\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\bar{\lambda}_0\bar{\boldsymbol{\alpha}}$。由于 A 的元素都是实数,因此 $A\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\bar{\lambda}_0\bar{\boldsymbol{\alpha}}$。这表明 $\bar{\lambda}_0$ 也是 A 的一个特征值,$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}_0$ 的一个特征向量。■

应用

例 3 下述矩阵 A 如果看成实数域上的矩阵,它有没有特征值?如果看成复数域上的矩阵,求它的全部特征值和特征向量:

$$A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix},\ a\ 是实数,且\ a\neq 0.$$

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-a\\a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2.$

由于 a 是非零实数,因此 λ^2+a^2 没有实根。从而实数域上的矩阵 A 没有特征值。

如果把 A 看成复矩阵,那么 A 有特征值 $a\mathrm{i}$,$-a\mathrm{i}$。

对于特征值 $a\mathrm{i}$,解齐次线性方程组 $(a\mathrm{i}I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix}a\mathrm{i}&-a\\a&a\mathrm{i}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a&a\mathrm{i}\\0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}\\0&0\end{pmatrix}.$$

它的一般解是:$x_1=-\mathrm{i}x_2$,其中 x_2 是自由未知量。于是它的一个基础解系是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

因此 A 的属于 $a\mathrm{i}$ 的所有特征向量组成的集合是

$$\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1\mid k_1\in\mathbf{C}\ 且\ k_1\neq 0\}.$$

A 的属于 $-a\mathrm{i}$ 的所有特征向量组成的集合是

$$\{k_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1\mid k_2\in\mathbf{C}\ 且\ k_2\neq 0\}.$$

题目:

例 7 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵,证明:如果 λ_0 是 A 的 l 重特征值,那么 λ_0^2 是 A^2 的至少 l 重特征值。

证明 设 λ_0 是 A 的 l 重特征值,则

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^lg(\lambda),\tag{3}$$

其中 $g(\lambda)$ 是 $n-l$ 次多项式,且 $g(\lambda)$ 不含因式 $(\lambda-\lambda_0)$。

把 $g(\lambda)$ 在复数域中因式分解,则(3)式成为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^l(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{l_m},\tag{4}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是两两不等的复数,且它们都不等于 λ_0,$l_1+\cdots+l_m=n-l$。

λ 用 $-\lambda$ 代入,把(4)式左端展开成 λ 的多项式后,从(4)式得

$$|-\lambda I-A|=(-\lambda-\lambda_0)^l(-\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(-\lambda-\lambda_m)^{l_m},$$

用$|\lambda I-A|$凑$|\lambda I-A^2|$

于是有

$$|\lambda I+A|=(\lambda+\lambda_0)^l(\lambda+\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda+\lambda_m)^{l_m}.\tag{5}$$

从已知条件出发凑要求的结果

把(4)式与(5)式相乘,得

$$|\lambda^2I-A^2|=(\lambda^2-\lambda_0^2)^l(\lambda^2-\lambda_1^2)^{l_1}\cdots(\lambda^2-\lambda_m^2)^{l_m}\tag{6}$$

λ^2 用 λ 代入,把(6)式左端展开成 λ 的多项式后,从(6)式得

$$|\lambda I-A^2|=(\lambda-\lambda_0^2)^l(\lambda-\lambda_1^2)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_m^2)^{l_m}\tag{7}$$

从(7)式看出,λ_0^2 是 A^2 的特征多项式 $|\lambda I-A^2|$ 的至少 l 重根,从而 λ_0^2 是 A^2 的至少 l 重特征值。■

15. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，$n\geqslant 2$。证明：若 A 的秩为 1 且 $A^2\neq 0$，则 A 有一个非零特征值 $\mathrm{tr}(A)$，且 0 是 A 的 $n-1$ 重特征值。

15. 由于 $\mathrm{rank}(A)=1$，因此 $|\lambda I-A|=\lambda^n-\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-\mathrm{tr}(A))$。于是 A 的全部特征值是 $\mathrm{tr}(A)$，0（至少 $n-1$ 重）。又有 $A=\boldsymbol{\alpha\beta}'$，从而 $A^2=(\boldsymbol{\alpha\beta}')(\boldsymbol{\alpha\beta}')=(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})A$。由于 $A^2\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\neq 0$。从而 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\beta}')=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})\neq 0$。于是 0 是 A 的 $n-1$ 重特征值。

$\varphi(\lambda)=\lambda^n-\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$

λ^{n-k}的系数为$(-1)^k\Sigma$（k阶主子式）

14. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：若 A 的秩为 r，则 A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-r}\lambda^{n-r},$$

其中 b_{n-k} 等于 $(-1)^k$ 乘 A 的所有 k 阶主子式的和，$k=1,\cdots,r$。

结论：A的不同特征值对应的特征向量线性无关

A可对角化 $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ A有n个不同特征值 $\Leftrightarrow$ A的不同特征值的特征空间维数和为n.

题目：

例 1 证明：幂等矩阵一定可对角化，并且如果 n 级幂等矩阵 A 的秩为 $r(r>0)$，那么

$$A\sim\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

证明 若 $r=n$，则 A 可逆。从 $A^2=A$ 得出，$A=I$，结论显然成立。若 $r=0$，则 $A=0$，结论也成立。下面设 $0<r<n$。

从 5.5 节的典型例题的例 5 的证明过程中看出，当 $0<r<n$ 时，幂等矩阵 A 的全部特征值是 0，1。

对于特征值 0，齐次线性方程组 $(0I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 W_0 的维数等于 $n-\mathrm{rank}(-A)=n-r$。

由于 A 是幂等矩阵，因此 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)=n$。从而 $\mathrm{rank}(I-A)=n-r$。

对于特征值 1，齐次线性方程组 $(I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 W_1 的维数等于 $n-\mathrm{rank}(I-A)=n-(n-r)=r$。因此

$$\dim W_0+\dim W_1=(n-r)+r=n.$$

从而 A 可对角化。A 的相似标准形中，特征值 1 在主对角线上出现的次数等于 W_1 的维数 r，特征值 0 在主对角线上出现的次数等于 W_0 的维数 $n-r$。因此

$$A\sim\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$ ■

结论.

例 8 证明：如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 级矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 不是 A 的特征向量。

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 分别是 A 的属于 λ_1、λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$。如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 A 的特征向量，那么它必属于 A 的某个特征值 λ_3。于是 $A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$。又有

$$A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=A\boldsymbol{\alpha}+A\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}.$$

从而 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}+\lambda_3\boldsymbol{\beta}$。即

$$(\lambda_1-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}+(\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.$$

由于 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。从而由上式得

$$\lambda_1-\lambda_3=0,\quad \lambda_2-\lambda_3=0.$$

由此推出，$\lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$。矛盾。因此 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 不是 A 的特征向量。■

n个线性无关向量⇒A对角

例 9 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，那么 A 一定是数量矩阵。

证明 如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，那么据例 8 的结论得，A 没有不同的特征值。即 A 有且只有一个特征值 λ_1，又由于 A 有 n 个线性无关的特征向量，因此 A 可对角化。于是存在 K 上 n 级可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_1\}=\lambda_1 I$。从而

$$A=P(\lambda_1 I)P^{-1}=\lambda_1 I.$$ ■

例 14 设 A、B 分别是数域 K 上的 n 级、m 级矩阵，它们分别有 n 个、m 个不同的特征值。设 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，且 $f(B)$ 是可逆矩阵。证明：对任意 $n\times m$ 矩阵 C，都有矩阵

$$G=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

可对角化。

可逆矩阵的特征值非0.

一步步拆条件.

证明

$$|\lambda I-G|=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A & -C\\ 0 & \lambda I_m-B\end{vmatrix}=|\lambda I_n-A|\,|\lambda I_m-B|,$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\cdots(\lambda-\mu_m).$$

由已知条件知道，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不等，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$ 两两不等。由于 μ_j 是 B 的特征值，因此 $f(\mu_j)$ 是 $f(B)$ 的特征值，$j=1,2,\cdots,m$。由于 $f(B)$ 是可逆矩阵，因此 $f(\mu_j)\neq 0$，$j=1,2,\cdots,m$。从而 $\mu_j(j=1,2,\cdots,m)$ 不是 A 的特征值。于是 $(n+m)$ 级矩阵 G 有 $n+m$ 个不同的特征值。从而 G 可对角化。■

AB阶数高时考虑用其余方法算出特征值.

8. 设复数域上的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

问：AB 是否可对角化？如果 AB 可对角化，求出一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}ABP$ 为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。

8. AB 与 BA 有相同的非零特征值，且重数相同。

注意非零的

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$|\lambda I-BA|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & 2\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2).$$

BA 的全部特征值是 $-1,-2$。

对于特征值 -1，求齐次线性方程组 $(-I-BA)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：$\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$；→$BA\alpha=-\alpha$

对于特征值 -2，求 $(-2I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$。

则AB的特征向量：$AB(A\alpha)=-A\alpha$

于是 AB 的全部非零特征值是 -1（一重），-2（一重）。

AB 的属于 -1 的一个特征向量是

$$A\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ -3\\ -6\end{bmatrix}.$$

AB 的属于 -2 的一个特征向量是

$$A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -2\\ -2\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathrm{rank}(AB)\leqslant\mathrm{rank}(B)=2$，因此 $|AB|=0$。

从而 0 是 AB 的一个特征值。解齐次线性方程组 $(AB)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$：

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 4 & 2\\ -7 & -1 & -6 & -4\\ 2 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 2\\ 0 & -8 & 8 & -4\\ 0 & 4 & -4 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

一般解为

$$\begin{cases}x_1=-x_3-\dfrac{1}{2}x_4,\\ x_2=x_3-\dfrac{1}{2}x_4,\end{cases}$$

其中 x_3，x_4 是自由未知量。于是得到一个基础解系为

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}.$$

由于 A 有 4 个线性无关的特征向量，因此 A 可对角化。

令

$$P=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -1 & 1\\ -3 & -2 & -1 & 0\\ -6 & -2 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

则 $P^{-1}(AB)P=\mathrm{diag}\{-1,-2,0,0\}$。

注：此题也可直接求 $|\lambda I-AB|$，求出 AB 的全部特征值，然后求出特征向量。

13. 设 A 是实数域上的 2 级矩阵，证明：如果 $|A|<0$，那么 A 可对角化。

始终注意特殊情况

有 $\varphi(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+|A|$ 有 $\Delta>0.\Rightarrow$ 二根不同，能对角化。

15. 求数域 K 上 2 级可逆矩阵 P 组成的集合 Ω_1，P 使得对于数域 K 上任意一个可逆对角矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1,d_2\}$ 都有 $P^{-1}\mathrm{diag}\{d_1,d_2\}P$ 为对角矩阵。

始终注意相似矩阵的特征值相同。

为 $\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} & a \\ b & \end{pmatrix}$

(实对称阵) 精减：实对称矩阵正交相似于对角阵。(即对 A 为实对称，$\exists U$ 为正交方阵，$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$)

正交相似于对角阵的实矩阵一定是实对称矩阵

考试中见实对称，首先想到正交相似于对角阵。

见实矩阵，可考虑 AA^T 为实对称

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

①由相似，想到找特征向量 ②由正交，将同特征值的特征向量进行Schmidt正交化。不同特征值对应的特征向量自然正交，只需单位化。

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^3(\lambda-7).$$

因此 A 的全部特征值是 3(三重)，7。

对于特征值 3，求得 $(3I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别单位化，得

因为 $\lambda=3$ 的特征向量

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

对于特征值 7，求得 $(7I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

令 $T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)$，则 T 是正交矩阵，且

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}\{3,3,3,7\}.$$

结论☆ 对于n的命题常用数学归纳法

例 6 证明：任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。

证明 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法。$n=1$ 时，显然命题为真，假设 $n-1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。现在来看 n 级复矩阵 A。设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是属于 λ_1 的一个特征向量。把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成 $\mathbf{C}^n$ 的一个基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$。令 $P_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 P_1 是 n 级可逆矩阵，且

$$P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_n)=(P_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_n).$$

由于 $P_1^{-1}P_1=I$，因此 $P_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$。从而

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & B\end{pmatrix}.$$

对 $n-1$ 级复矩阵 B 用归纳假设，有 $n-1$ 级可逆矩阵 P_2，使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵。令

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & P_2\end{pmatrix},$$

则 P 是 n 级可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & P_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}P_2\\ \boldsymbol{0} & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理，对一切正整数 n，此命题为真。■

☆结论！ 证纯虚数，即证 $\bar{\lambda}=-\lambda$

例 7 证明：实数域上斜对称矩阵的特征多项式在复数域中的根是 0 或纯虚数。

证明 设 A 是实数域上的 n 级斜对称矩阵。λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 在复数域中的一个根。把 A 看成复矩阵，则 λ_0 是 A 的一个特征值。从而存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，使 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$。

由于 A 是实矩阵，因此从上式两边取共轭复数得，$A\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\bar{\lambda}_0\bar{\boldsymbol{\alpha}}$。两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}'$，得

$$\boldsymbol{\alpha}'A\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\bar{\lambda}_0\boldsymbol{\alpha}'\bar{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{5}$$

在 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 两边取转置，得 $\boldsymbol{\alpha}'A'=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'$。由于 A 是斜对称矩阵，因此 $A'=-A$。从而 $\boldsymbol{\alpha}'A=-\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'$。两边右乘 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$，得

$$\boldsymbol{\alpha}'A\bar{\boldsymbol{\alpha}}=-\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'\bar{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{6}$$

从(5)式和(6)式，得 $(\bar{\lambda}_0+\lambda_0)\boldsymbol{\alpha}'\bar{\boldsymbol{\alpha}}=0$。由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{\alpha}'\bar{\boldsymbol{\alpha}}\neq 0$。从而 $\bar{\lambda}_0=-\lambda_0$。所以 λ_0 等于 0 或 λ_0 是纯虚数。

例 8 设 A 是实数域上的 n 级斜对称矩阵。证明：

$$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}\geqslant 2^{2n}$$

等号成立当且仅当 $A=0$。

见斜对称，所用的点：①用 $A^T=-A$ ②A的特征值为0或纯虚数

证明 由于 $(2I_n)A=A(2I_n)$，因此根据第 4 章 4.5 节的例 17 得

若 $AC=CA$，则 $\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-BC|$ 均在第1列

$$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}=|(2I_n)(2I_n)-A^2|=2^n\cdot 2^n\left|I_n-\frac{1}{4}A^2\right|.$$

由于 $(A^2)'=A'A'=(-A)(-A)=A^2$，因此 A^2 是实对称矩阵。据例 7 的结论，可设 A 的特征多项式在复数域中的全部根为 $b_1\mathrm{i},b_2\mathrm{i},\cdots,b_n\mathrm{i}$，其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是实数。于是 A^2 的全部特征值为 $-b_1^2,-b_2^2,\cdots,-b_n^2$。从而 $I_n-\frac{1}{4}A^2$ 的全部特征值是 $1+\frac{1}{4}b_1^2,1+\frac{1}{4}b_2^2,\cdots,1+\frac{1}{4}b_n^2$。

由于 $I_n-\frac{1}{4}A^2$ 是实对称矩阵，因此

$$I_n-\frac{1}{4}A^2\sim\mathrm{diag}\left\{1+\frac{1}{4}b_1^2,1+\frac{1}{4}b_2^2,\cdots,1+\frac{1}{4}b_n^2\right\}.$$

从而

$$\left|I_n-\frac{1}{4}A^2\right|=\left(1+\frac{1}{4}b_1^2\right)\left(1+\frac{1}{4}b_2^2\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4}b_n^2\right)\geqslant 1. \tag{7}$$

因此

$$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}\geqslant 2^{2n}. \tag{8}$$

从(7)式看出，(8)式的等号成立当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$。于是如果等号成立，那么实对称矩阵 A^2 相似于 $\mathrm{diag}\{0,0,\cdots,0\}$。从而 $A^2=0$。由于 A 是实数域上的斜对称矩阵，因此 $A=0$。反之，若 $A=0$，则显然(5)式的等号成立。因此(5)式的等号成立当且仅当 $A=0$。■

例 9 设 A 是 n 级实矩阵，证明：如果 A 的特征多项式在复数域中的根都是非负实数，且 A 的主对角元都是 1，那么 $|A|\leqslant 1$。

见对角元考虑 tr.det

$|A|=a_1\cdots a_n\leq\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n=1$

4. 设 A 是 n 级实矩阵，证明：如果 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，且 A 的一阶主子式之和与二阶主子式之和都等于零，那么 A 是幂零矩阵。

明显想到 $\lambda^{n-1},\lambda^{n-2}$ 项系数为0

$\exists P$ 为可逆矩阵，$P^{-1}AP=B$ 为上三角阵。B 主对角元为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 也为 A 特征值。$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

又 $\lambda^{n-1},\lambda^{n-2}$ 系数为0：$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$，$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n=0\Rightarrow\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2=(\sum\lambda_i)^2-2(\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n)=0$。

则 B 主对角元全为0。则 B 幂零。则 A 幂零。

结论：1. 5. 证明：n 级正交矩阵一定正交相似于下述形式的矩阵：

$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m\\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $\lambda_i=1$ 或 -1，$i=1,2,\cdots,r$；$0<\theta_j<\pi$，$j=1,2,\cdots,m$；称它为 n 级正交矩阵的相似标准形。

2. 10. 证明：n 级酉矩阵 A 一定酉相似于一个对角矩阵。即，存在 n 级酉矩阵 U，使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵。

因为将 $\mathbb{C}$ 为虚数放在对角上。

3. 7. 设 A 是 n 级复矩阵，如果 $A^*=A$，那么称 A 是 **Hermite 矩阵**，或**自伴矩阵**（这里 $A^*=\overline{A}'$）。证明：Hermite 矩阵的特征值是实数。

4. 8. 设 A 是 n 级复矩阵，如果 $A^*=-A$，那么称 A 是**斜 Hermite 矩阵**。证明：斜 Hermite矩阵的特征值是 0 或纯虚数。

AB与BA有相同特征值。重数也相同。

$\lambda^s|\lambda I_n-AB|=\lambda^n|\lambda I_s-BA|$

22. 设 A、B 都是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：$AB+A$ 与 $BA+A$ 有相同的特征值。

$A(B+I)=(B+I)A$. 证毕

23. 设 A、B 都是数域 K 上的 n 级矩阵（$n\geqslant 2$）。A^*、B^* 分别是 A、B 的伴随矩阵，证明：如果 $A\sim B$，那么 $A^*\sim B^*$。由 $(AB)^*=B^*A^*$ 可证

24. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：如果 A 可对角化，那么 A 的伴随矩阵 A^* 也可对角化。

25. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式在复数域中的全部根。求 A 的伴随矩阵 A^* 的特征多项式在复数域中的全部根。

第六章 二次型 & 矩阵的合同

①：即相合

精髓：矩阵相合：$A=P^TBP$ P 为可逆矩阵。　相合求法：$\begin{pmatrix}A\\ I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}D\\ P\end{pmatrix}$ D 为对角阵，则 $P^TAP=D$。

只含平方项的二次型称为标准型　斜对角阵合同于 $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right)$　直角坐标变换

二次型 X^TAX 的秩为 rank$A$

题目：**例 1** 用正交替换把下述实二次型化成标准形：

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz.$$

正交替换用特征向量

解 这个实二次型的矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1).$$

A 的全部特征值是 $2,5,-1$。

对特征值 2，求出 $(2I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)'$。

对特征值 5，求出 $(5I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 单位化得，$\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$。

对特征值 -1，求出 $(-I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得，$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)'$。

令

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

则 T 是正交矩阵，且 $T^{-1}AT=\operatorname{diag}\{2,5,-1\}$。

令

$X_{旧}=TX_{新}$ ✿ 不是新=T旧 ✿

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix},$$

则

$$f(x,y,z)=2x^{*2}+5y^{*2}-z^{*2}.$$

两矩阵相合,即二者对应的二次型等价

例 5 证明:数域 K 上的 n 级矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & 0 \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

其中,$i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列。

证明 **证法一** 考虑二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

它的矩阵是

$$A = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

由于 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,因此

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_{i_1} x_{i_1}^2 + \lambda_{i_2} x_{i_2}^2 + \cdots + \lambda_{i_n} x_{i_n}^2$$

令

$$\begin{cases} x_{i_1} = y_1, \\ x_{i_2} = y_2, \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{i_n} = y_n \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_{i_1} y_1^2 + \lambda_{i_2} y_2^2 + \cdots + \lambda_{i_n} y_n^2.$$

新二次型的矩阵为

$$B = \mathrm{diag}\{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n}\}.$$

因此 $A \simeq B.$

直接化标准形

例 11 设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值按大小顺序排成:$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$。证明:对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,都有

$$\lambda_n \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} \leqslant \lambda_1. \tag{30}$$

证明 因为 A 是 n 级实对称矩阵,所以有 n 级正交矩阵 T,使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$。任取 $\mathbf{R}^n$ 中一个非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,设 $(T'\boldsymbol{\alpha})' = (b_1,b_2,\cdots,b_n)$。则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}' T \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\} T^{-1} \boldsymbol{\alpha} \\ &= (T'\boldsymbol{\alpha})' \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\} (T'\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \cdots + \lambda_n b_n^2 \\ &\leqslant \lambda_1 (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ &= \lambda_1 |T'\boldsymbol{\alpha}|^2 = \lambda_1 |\boldsymbol{\alpha}|^2. \end{aligned}$$

同理

$$\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} = \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \cdots + \lambda_n b_n^2 \geqslant \lambda_n |\boldsymbol{\alpha}|^2.$$

因此

$$\lambda_n \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} \leqslant \lambda_1. \qquad \blacksquare$$

精戒:二次型的规范形:$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$. 正惯性指数 p:系数为1的二次项个数. 负惯性指数 q:系数为-1的二次项个数

符号差:$p-q$.

命题 1 两个 n 元实二次型等价
$\Leftrightarrow$ 它们的规范形相同
$\Leftrightarrow$ 它们的秩相等,并且正惯性指数也相等。

复二次型的规范形:$z_1^2+\cdots+z_r^2$. $A \simeq \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $r=\mathrm{rank}A$

推论 2 两个 n 级实对称矩阵合同。
$\Leftrightarrow$ 它们的秩相等,并且正惯性指数也相等。

相合不变量:p. q. $p-q$(符号差)

实对称除正交相似于对角阵外
也可考虑相合的相关内容

例 7 设 A 为一个 n 级实对称矩阵,证明:如果 $|A|<0$,那么在 $\mathbf{R}^n$ 中有非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} < 0$。

证明 由于 $|A|<0$,因此 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的秩为 n,且负惯性指数为奇数。于是作非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=C\boldsymbol{Y}$,有

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X} = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2,$$

由于 $n-p$ 是奇数,因此可以让 $\boldsymbol{Y}$ 取下述列向量:

$$\boldsymbol{\beta} = (0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)'.$$

令 $\boldsymbol{\alpha} = C\boldsymbol{\beta}$,则

$$\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} = -1^2 = -1 < 0. \qquad \blacksquare$$

4. 设 A 是 n 级可逆实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个列向量,令 $B = A - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$。用 $s(A)$、$s(B)$ 分别表示 A、B 的符号差。证明:

$$s(A) = \begin{cases} s(B)+2, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha}' A^{-1} \boldsymbol{\alpha} > 1; \\ s(B), & \text{当 } \boldsymbol{\alpha}' A^{-1} \boldsymbol{\alpha} < 1. \end{cases}$$

想办法让条件直接参与符号的计算

有 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A-\alpha\alpha' \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha' \\ \alpha & A \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A-\alpha\alpha' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \alpha' \\ \alpha & A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & \alpha' \\ \alpha & A \end{pmatrix} \xrightarrow[②+(-A^{-1}\alpha)①]{①+(-\alpha'A^{-1})②} \begin{pmatrix} 1-\alpha'A^{-1}\alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 则易证

证正定:①
②与正定合同.
③ $x^T A x > 0$ $(x \neq 0)$

精戒:实二次型正定:$p=n$;顺序主子式全>0.;主子式全>0;∃可逆C. $A=C^TC$.;∃可逆对称C. $A=C^2$. 且C有唯一性 ($A=B^2=C^2$ 则 $B=C$)

半正定:$A=C^2$.(正交为 $T^{-1}\mathrm{diag}(\ )T$. C取 $T^{-1}\sqrt{\mathrm{diag}(\ )}\,T$ 即可)

※正定矩阵一定是对称的.

题目:

例 5 证明:n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的必要条件是,它的 n 个平方项的系数全是正的。举例说明这个条件不是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的充分条件。

证明 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 A。由于这个实二次型正定,因此 A 是 n 级正定矩阵。从而存在 n 级实可逆矩阵 C,使得 $A=C'IC=C'C$。于是对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$\begin{aligned} A(i;i) = C'C(i;i) &= \sum_{k=1}^{n} C'(i;k)C(k;i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [C(k;i)]^2. \end{aligned}$$

用矩阵乘法定义进行单个元的计算

由于 C 的第 i 列元素不能全为 0(否则,$|C|=0$,矛盾),因此

$$A(i;i) = \sum_{k=1}^{n} [C(k;i)]^2 > 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 个平方项的系数全是正的。

设 $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3$,则 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

因此 $g(x_1,x_2,x_3)$ 不是正定的。这说明平方项的系数全为正数不是实二次型正定的充分条件。 $\blacksquare$

定理 6 实对称矩阵 A 负定的充分必要条件是:它的奇数阶顺序主子式全小于零,偶数阶顺序主子式全大于零。

各类对角化,方便简化问题

例 10 证明:如果 A 是 n 级正定矩阵,B 是 n 级实对称矩阵,则存在一个 n 级实可逆矩阵 C,使得 $C'AC$ 与 $C'BC$ 都是对角矩阵。

证明 由于 A 是 n 级正定矩阵。因此 $A\simeq I$。从而存在 n 级实可逆矩阵 C_1,使得 $C_1'AC_1=I$。

由于 $(C_1'BC_1)'=C_1'B'C_1=C_1'BC_1$,因此,$C_1'BC_1$ 是 n 级实对称矩阵。于是存在 n 级正交矩阵 T,使得

$$T'(C_1'BC_1)T=T^{-1}(C_1'BC_1)T=\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}.$$

令 $C=C_1T$,则 C 是实可逆矩阵,且使得

$$C'AC=(C_1T)'A(C_1T)=T'(C_1'AC_1)T=T'IT=I,$$

$$C'BC=T'(C_1'BC_1)T=\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}. \qquad ■$$

简化应用

例 15 证明:如果 A 是 n 级正定矩阵,B 是 n 级半正定矩阵且 $B\neq 0$,那么

$$|A+B|>\max\{|A|,|B|\}. \qquad (10)$$

见正定和实对称⇒想对角化.

证明 据例 10 的证明过程可知,存在一个 n 级实可逆矩阵 C,使得

$$C'AC=I,\qquad C'BC=\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}=D.$$

由于 B 半正定,因此 $\mu_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$。由于 $B\neq 0$,因此 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 不全为 0。

$$|A+B|=|(C')^{-1}IC^{-1}+(C')^{-1}DC^{-1}|=|(C')^{-1}(I+D)C^{-1}|$$
$$=|(C')^{-1}||C^{-1}||I+D|$$
$$=|C^{-1}|^2(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n).$$
$$|A|=|(C')^{-1}IC^{-1}|=|C^{-1}|^2,$$
$$|B|=|(C')^{-1}DC^{-1}|=|C^{-1}|^2\mu_1\mu_2\cdots\mu_n.$$

由于 $(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)>1,$

$(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)>\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,$

因此 $|A+B|>|A|,\ |A+B|>|B|.$ ■

例 17 设

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ B' & D\end{pmatrix}$$

是 n 级正定矩阵,其中 A 是 r 级矩阵。证明

$$|M|\leqslant|A||D|, \qquad (11)$$

并且等号成立当且仅当 $B=0$。

证明 从 6.1 节的例 9 得

$$|M|=|A||D-B'A^{-1}B|.$$

记 $H=D-B'A^{-1}B$。由例 16 的结论知道,A,D,H 都是正定矩阵,从而 A^{-1} 也是正定矩阵,于是对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}'(B'A^{-1}B)\boldsymbol{\alpha}=(B\boldsymbol{\alpha})'A^{-1}(B\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0.$$

因此 $B'A^{-1}B$ 半正定,据例 15 的结论,得

$$|D|=|H+B'A^{-1}B|\geqslant|H|,$$

等号成立当且仅当 $B'A^{-1}B=0$,即 $B=0$(假如 $B\neq 0$,则 B 有一个列向量 $\boldsymbol{\beta}_j\neq\mathbf{0}$ 于是

$$(B'A^{-1}B)(j;j)=\boldsymbol{\varepsilon}_j'(B'A^{-1}B)\boldsymbol{\varepsilon}_j=(B\boldsymbol{\varepsilon}_j)'A^{-1}(B\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\beta}_j'A^{-1}\boldsymbol{\beta}_j>0,$$

这与 $B'A^{-1}B=0$ 矛盾。因此 $B=0$)。故

$$|M|\leqslant|A||D|,$$

等号成立当且仅当 $B=0$。 ■

例 18 证明:如果 $A=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵,那么

$$|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (12)$$

证明 对正定矩阵的级数 n 作数学归纳法。

$n=1$ 时,$|(a)|=a$,命题为真。

假设对于 $n-1$ 级正定矩阵命题为真,现在来看 n 级正定矩阵 $A=(a_{ij})$,把 A 写成分块矩阵形式:

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

据例 17 的结论,得

$$|A|\leqslant|A_{n-1}|a_{nn}.$$

据例 16 的结论得,A_{n-1} 正定。于是由归纳假设,得

$$|A_{n-1}|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}.$$

据例 5 的结论得,$a_{11},a_{22}\cdots a_{n-1,n-1},a_{nn}$ 全为正数。

因此 $|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$. 由归纳法成立.

例 19 证明:如果 $C=(c_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵,那么

$$|C|^2\leqslant\prod_{j=1}^{n}(c_{1j}^2+c_{2j}^2+\cdots+c_{nj}^2)$$

证明 令 $A=C'C$,则 A 正定。

$$A(i;i)=C'C(i;i)=\sum_{k=1}^{n}C'(i;k)C(k;i)=\sum_{k=1}^{n}[C(k;i)]^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}^2.$$

据例 18 的结论,得

$$|C|^2=|C'C|=|A|\leqslant\prod_{i=1}^{n}A(i;i)=\prod_{i=1}^{n}(c_{1i}^2+c_{2i}^2+\cdots+c_{ni}^2).$$

点评:

例 19 的(13)式称为 **Hadamard 不等式**。

由已知推未知.

观察相同点

$(A=C^TC)$

8. 证明:n 级实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是,有 $m\times n$ 列满秩实矩阵 P,使得 $A=P'P$。

8. 必要性。由于 A 正定,因此存在 n 级实可逆矩阵 C,使得 $A=C'C$。令 $P=\begin{pmatrix}C\\0\end{pmatrix}_{m\times n}$,

则 P 是 $m\times n$ 列满秩矩阵,且 $P'P=(C'\quad 0)\begin{pmatrix}C\\0\end{pmatrix}=C'C=A$。

充分性。由于 $\operatorname{rank}(P)=n$,因此 n 元齐次线性方程组 $P\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间 W 的维数为 $\dim W=n-\operatorname{rank}(P)=0$。从而 $P\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解。因此对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,有 $P\boldsymbol{\alpha}\neq 0$。从而

$$\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'P'P\boldsymbol{\alpha}=(P\boldsymbol{\alpha})'(P\boldsymbol{\alpha})=(P\boldsymbol{\alpha},P\boldsymbol{\alpha})>0.$$

因此 A 正定。

注:充分性的证明也可去证 A 的所有顺序主子式全大于 0。

OK 13. 证明:如果 A,B 是正定矩阵,$A=BC$,其中 C 是正交矩阵,那么 $C=I$。

13. 由于 $A=BC$,且 A,B 是正定矩阵,因此 $C=B^{-1}A$。由于 C 是正交矩阵,因此

$$C'=C^{-1}=(B^{-1}A)^{-1}=A^{-1}B.$$

从而

$$C=(C')'=(A^{-1}B)'=B'(A^{-1})'=BA^{-1}.$$

于是 $B^{-1}A=BA^{-1}$,由此得出,$A^2=B^2$。由于 A,B 是正定矩阵,因此 A^2,B^2 都是正定矩阵。又由于 $A^2=B^2$,因此根据本节例 8 得,$A=B$。从而 $C=B^{-1}A=B^{-1}B=I$。

$A=B^2$. B是唯一的.

15. 设 A 是 n 级正定矩阵,B 是 n 级实对称矩阵。证明 AB 的特征多项式的复根都是实数。

$A=C^2\Rightarrow C^{-1}A=C$. $(C^{-1}ABC)^T=(CBC)^T=C^TB^TC^T=CB^TC=CBC=C^{-1}ABC$. $C^{-1}ABC$实对称⇒其λ为实.又AB与之相似.证毕

11. 设 A 是元素为 0 或 1 的 $n\times m$ 矩阵，且

$$\underbrace{AA'}_{\text{正定}} = \begin{pmatrix} r_1-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & r_n-\lambda \end{pmatrix}+\lambda J = \begin{pmatrix} r_1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r_2 & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r_n \end{pmatrix},$$

正定阵一定满秩.

AA^T 正定 $\Leftrightarrow$ A 行满秩.

其中 $r_i>\lambda>0, i=1,2,\cdots,n$。证明：$n\leqslant m$。 rank $AA'=n$. 则 $n\leq n$

5. 设 A 是数域 K 上的 n 级对称矩阵，证明：如果 B 是 K 上主对角元全为 1 的 n 级上三角矩阵，那么 $B'AB$ 与 A 的 k 阶顺序主子式相等，$k=1,2,\cdots,n$。

5. 证明 记 $G=B'AB$。把 G 写成分块矩阵形式： ——复杂则分块

$$G=\begin{pmatrix} G_k & H_1 \\ H_1' & H_2 \end{pmatrix},$$

其中 G_k 是 k 级矩阵，$k=1,2,\cdots,n-1$。

$$(I_k \quad 0)G\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}=(I_k \quad 0)\begin{pmatrix} G_k & H_1 \\ H_1' & H_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}=G_k. \qquad (3)$$

分别把 A,B 写成分块矩阵的形式：

$$A=\begin{pmatrix} A_k & F_1 \\ F_1' & F_2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_k & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

其中 A_k,B_k 都是 k 级矩阵。

$$(I_k \quad 0)B'AB\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}=\left[B\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}\right]'AB\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=(B_k' \quad 0)\begin{pmatrix} A_k & F_1 \\ F_1' & F_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_k \\ 0 \end{pmatrix}=B_k'A_kB_k. \qquad (4)$$

由于 $G=B'AB$，因此从(3)式和(4)式得

$$G_k=B_k'A_kB_k. \qquad (5)$$

由于 B_k 是主对角元全为 1 的 k 级上三角矩阵，因此 $|B_k|=1$，在(5)式两边取行列式得

$$|G_k|=|B_k'||A_k||B_k|=|A_k|, \qquad (6)$$

其中 $k=1,2,\cdots,n-1$。显然 $|G|=|B'||A||B|=|A|$。因此 $B'AB$ 与 A 的 k 阶顺序主子式相等，$k=1,2,\cdots,n$。

第八章 线性空间

(线性空间) 精减：基变换与坐标变换：V 的两个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，向量 δ 在这两基下的坐标为 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$.

A 为从基 $\{\alpha_i\}$ 到基 $\{\beta_i\}$ 的一个过渡矩阵. 即 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$. 有 $X=AY$

证为线性空间：加法，数乘封闭，八条运算法则

注意 A 的位置与 X,Y 的对应关系 (不要错记为 $Y=AX$!)

题目：

例 11 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\in C^{(n-1)}[a,b]$，令

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad (31)$$

称 $W(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的 Wronsky(朗斯基)行列式。证明：如果存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $W(x_0)\neq0$，那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关。

非必要条件 即若线性无关，不一定 $\exists x_0$ s.t. $W(x_0)\neq0$.

证明 设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0. \qquad (32)$$

在(32)式两边分别求 1 阶，2 阶，$\cdots$，$n-1$ 阶导数，得

$$\begin{cases} k_1f_1'(x)+k_2f_2'(x)+\cdots+k_nf_n'(x)=0, \\ k_1f_1''(x)+k_2f_2''(x)+\cdots+k_nf_n''(x)=0, \\ \cdots \\ k_1f_1^{(n-1)}(x)+k_2f_2^{(n-1)}(x)+\cdots+k_nf_n^{(n-1)}(x)=0. \end{cases} \qquad (33)$$

让 x 取值 x_0，从(32)和(33)式得到

$$\begin{cases} k_1f_1(x_0)+k_2f_2(x_0)+\cdots+k_nf_n(x_0)=0, \\ k_1f_1'(x_0)+k_2f_2'(x_0)+\cdots+k_nf_n'(x_0)=0, \\ k_1f_1''(x_0)+k_2f_2''(x_0)+\cdots+k_nf_n''(x_0)=0, \\ \cdots \\ k_1f_1^{(n-1)}(x_0)+k_2f_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+k_nf_n^{(n-1)}(x_0)=0. \end{cases} \qquad (34)$$

n 元齐次线性方程组(34)的系数行列式正好是 $W(x_0)$。由已知条件，$W(x_0)\neq0$，从而方程组(34)只有零解。即

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$$

因此 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关。 ■

应用

例 14 在实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 中，$e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\cdots,e^{\lambda_nx}$ 是否线性无关？其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是两两不等的实数。

解 $e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\cdots,e^{\lambda_nx}$ 的 Wronsky 行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & e^{\lambda_2x} & \cdots & e^{\lambda_nx} \\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \lambda_2e^{\lambda_2x} & \cdots & \lambda_ne^{\lambda_nx} \\ \lambda_1^2e^{\lambda_1x} & \lambda_2^2e^{\lambda_2x} & \cdots & \lambda_n^2e^{\lambda_nx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2x} & \cdots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_nx} \end{vmatrix}.$$

让 x 取值 0，得

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不等，因此范德蒙行列式 $W(0)\neq0$。从而 $e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\cdots,e^{\lambda_nx}$ 线性无关。

则：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V, \forall k,l\in F$，有

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ （加法交换律）；

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ （加法结合律）；

3° V 中有一个元素，记作 0，它使得

$$\alpha+0=\alpha,\quad \forall\alpha\in V,$$

具有这个性质的元素 0 称为 V 的零元；

4° 对于 $\alpha\in V$，存在 $\beta\in V$，使得

$$\alpha+\beta=0,$$

具有这个性质的元素 β 称为 α 的负元；

5° $1\alpha=\alpha$，其中 1 是 F 的单位元；

6° $(kl)\alpha=k(l\alpha)$；

7° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

8° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，

那么称 V 是域 F 上的一个线性空间。

7. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间，把 K 与 V 的数量乘法改成：若 $k\neq0$，则 $k\circ\alpha=k^{-1}\alpha$；若 $k=0$，则 $k\circ\alpha=0$。试问：V 对于原来的加法与现在定义的数量乘法是否构成数域 K 上的一个线性空间？

不构成. $(1+2)\alpha=\frac{\alpha}{3}$. $(1+2)\alpha=\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}\alpha$ 不等.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)'$, $\quad\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,1)'$,

$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)'$, $\quad\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,3,1)'$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)'$, $\quad\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,0,0)'$,

$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)'$, $\quad\boldsymbol{\beta}_4=(0,1,-1,-1)'$,

$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0,-1)'$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标。

——基变换相关问题.

$(\beta_1,\cdots,\beta_4)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)A\Rightarrow A$ 可求. 在 α 下为坐标 X. β 下为 Y. 有 $X=AY$.

(子空间) 精减：证为子空间：加法，数乘封闭

题目：

例 15 设 V_1,V_2 是域 F 上线性空间 V 的两个真子空间（即 $V_i\neq V, i=1,2$），证明：$V_1\cup V_2\neq V$。 ——用已知条件向下进行

证明 由于 $V_1\neq V$，因此存在 $\alpha\notin V_1$。若 $\alpha\notin V_2$，则 $\alpha\notin V_1\cup V_2$。若 $\alpha\in V_2$，由于 $V_2\neq V$，因此存在 $\beta\notin V_2$。若 $\beta\notin V_1$，则 $\beta\notin V_1\cup V_2$。若 $\beta\in V_1$，则我们断言 $\alpha+\beta\notin V_1\cup V_2$。这是因为假如 $\alpha+\beta\in V_1\cup V_2$，当 $\alpha+\beta\in V_1$ 时，有 $(\alpha+\beta)-\beta\in V_1$，即 $\alpha\in V_1$，矛盾；当 $\alpha+\beta\in V_2$ 时，有 $(\alpha+\beta)-\alpha\in V_2$，即 $\beta\in V_2$，矛盾。所以 $\alpha+\beta\notin V_1\cup V_2$，于是 $V_1\cup V_2\neq V$。 ■

例 8 用 $M_n^0(F)$ 表示域 F 上所有迹为 0 的 n 级矩阵组成的集合。

(1) 证明：$M_n^0(F)$ 是 $M_n(F)$ 的一个子空间；

(2) 求 $M_n^0(F)$ 的一个基和维数。

——基础问题

(1) **证明** 显然 $0\in M_n^0(F)$，因此 $M_n^0(F)$ 非空集。任取 $A,B\in M_n^0(F)$，则 $\mathrm{tr}(A)=0$，$\mathrm{tr}(B)=0$。从而

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)=0,$$
$$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)=0,\forall k\in F.$$

因此 $M_n^0(F)$ 对于矩阵的加法和纯量乘法封闭，于是 $M_n^0(F)$ 是 $M_n(F)$ 的一个子空间。■

(2) **解** $X=(x_{ij})\in M_n^0(F)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}=0\\ &\Leftrightarrow\quad X=x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+\cdots+x_{1n}E_{1n}\\ &\qquad\quad +x_{21}E_{11}+x_{22}E_{22}+\cdots+x_{2n}E_{2n}\\ &\qquad\quad +\cdots\\ &\qquad\quad +x_{n1}E_{n1}+x_{n2}E_{n2}+\cdots-(x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{n-1,n-1})E_{nn}\\ &\Leftrightarrow\quad X=x_{11}(E_{11}-E_{nn})+x_{12}E_{12}+\cdots+x_{1n}E_{1n}\\ &\qquad\quad +x_{21}E_{21}+x_{22}(E_{22}-E_{nn})+\cdots+x_{2n}E_{2n}\\ &\qquad\quad +\cdots\\ &\qquad\quad +x_{n1}E_{n1}+x_{n2}E_{n2}+\cdots+x_{n,n-1}E_{n,n-1}.\end{aligned}$$

又容易验证 $E_{11}-E_{nn},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22}-E_{nn},E_{23},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n-1,1},\cdots,E_{n-1,n-1}-E_{nn}$，$E_{n-1,n},E_{n1},E_{n2},\cdots,E_{n,n-1}$ 线性无关。因此它们就是 $M_n^0(F)$ 的一个基，从而

$$\dim M_n^0(F)=n^2-1.$$

例 18 在 K^4 中，$V_1=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$，$V_2=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\rangle$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-5\end{pmatrix}.$$

分别求 $V_1+V_2,V_1\cap V_2$ 的一个基和维数。

解 $V_1+V_2=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\rangle$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\1&1&2&2&-2&3\\0&-1&1&0&2&1\\2&3&-2&-6&4&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&10&2\\0&1&0&0&-6&-1\\0&0&1&0&-4&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}.\qquad(24)$$

从(24)式的简化行阶梯形矩阵看出：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 是 V_1+V_2 的一个基，从而 $\dim(V_1+V_2)=4$。

从(24)式的简化行阶梯形矩阵的前 3 列看出，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V_1 的一个基，从而 $\dim V_1=3$。从后 3 列看出，它的第 2,3,4 行组成的 3 阶子式不为 0，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关。于是 $\dim V_2=3$。从而 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=3+3-4=2$。

从(24)式的简化行阶梯形矩阵的第 1,2,3,4,5 列与第 1,2,3,4,6 列分别看出

$$\boldsymbol{\beta}_2=10\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_1.$$

于是

$$10\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\in V_1\cap V_2,$$
$$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3\in V_1\cap V_2.$$

计算

$$-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(0,-4,2,10)'.$$
$$-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1,1)'.$$

显然 $(0,-4,2,10)',(1,1,1,1)'$ 线性无关，因此它就是 $V_1\cap V_2$ 的一个基。

求 $V_1\cap V_2$ 的基的方法

$V_1\cap V_2$ 的基.

点评 从例 17 的解题过程看到，在 K^n 中，分别求子空间 $V_1=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\rangle$ 与 $V_2=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\rangle$ 的和与交的一个基和维数时，先令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，把 A 经过一系列的初等行变换，化成简化行阶梯形矩阵 G。再从 G 的主元所在列的序号可以找出 V_1+V_2 的一个基，从而得出 V_1+V_2 的维数。从 G 的前 s 列还可找出 V_1 的一个基；从 G 的后 t 列（找出最高阶非 0 子式）可找出 V_2 的一个基。于是通过子空间的维数公式可求出 $V_1\cap V_2$ 的维数。利用已经求出的 V_1+V_2 的一个基，可以把 V_2 中不是 V_1+V_2 的这个基里的向量表示成 V_1+V_2 的这个基的线性组合，其系数从 G 里给的相应的列可以找到，由线性组合的表达式可求出 $V_1\cap V_2$ 的向量。当找到了 $\dim(V_1\cap V_2)$ 个线性无关的向量时，便求出了 $V_1\cap V_2$ 的一个基。

证明 $V_1+V_2=V$ 为直和：①V_1+V_2 中零向量表示方法唯一 ②$V_1\cap V_2=\{0\}$ ③基合起来为 V 的基 ④$\dim V_1+\dim V_2=\dim V$

①：**例 26** 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是域 F 上线性空间 V 的子空间，证明：和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和的充分必要条件是 V 中有一个向量 α 可以唯一地表示成

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s.\qquad(30)$$

证明 必要性。设和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和，则和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 中每个向量 α 都能唯一地表示成(30)式，因此必要性显然成立。

充分性。设 V 中有一个向量 α 可以唯一地表示成(30)式。假如零向量在和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 中的表法不唯一，则它还有一种方式表示成

$$0=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_s,\delta_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s,$$

其中至少有一个 $\delta_j\neq0$。由于

$$\alpha=\alpha+0=(\alpha_1+\delta_1)+(\alpha_2+\delta_2)+\cdots+(\alpha_s+\delta_s),$$

且 $\alpha_j+\delta_j\neq\alpha_j$，因此 α 表示成 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 中向量的方式不唯一，与已知条件矛盾。所以零向量在和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 中的表法唯一，从而和 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和。■

例 20 在 K^n 中，V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组

②！

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，证明：$K^n=V_1\oplus V_2$。

证明 第一步，证明 $K^n=V_1+V_2$。任取 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'\in K^n$，想把 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$。由于 V_2 是齐次线性方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，因此 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的各个分量应相等，又由于 V_1 是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的各个分量的和应等于 0。设 $\boldsymbol{\alpha}_2=(b,b,\cdots,b)'$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2=(a_1-b,a_2-b,\cdots,a_n-b)'$，它应满足

$$(a_1-b)+(a_2-b)+\cdots+(a_n-b)=0.$$

由此得到，$b=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。这样取的 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$。因此 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2$。从而 $K^n\subseteq V_1+V_2$。于是 $K^n=V_1+V_2$。

第二步，证明和 V_1+V_2 是直和。只要证 $V_1\cap V_2=0$。任取 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'\in V_1\cap V_2$，则

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=0,b_1=b_2=\cdots=b_n.$$

由此得出，$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$。即 $\boldsymbol{\beta}=0$，从而 $V_1\cap V_2=0$。

综上所述，$K^n=V_1\oplus V_2$。■

17. 设 U,W_1,W_2 都是域 F 上线性空间 V 的子空间，证明：$(U+W_1)\cap(U+W_2)=U+(U+W_1)\cap W_2$。

17. 任取 $\alpha\in(U+W_1)\cap(U+W_2)$，则

$$\alpha=\gamma_1+\delta_1=\gamma_2+\delta_2,\gamma_1,\gamma_2\in U,\delta_1\in W_1,\delta_2\in W_2.$$

经典证明集合相等的方法：双包含.

于是 $\delta_2=(\gamma_1-\gamma_2)+\delta_1\in(U+W_1)\cap W_2$，因此 $\alpha\in U+(U+W_1)\cap W_2$。由此得出，

$$(U+W_1)\cap(U+W_2)\subseteq U+(U+W_1)\cap W_2.$$

任取 $\beta\in U+(U+W_1)\cap W_2$，则 $\beta=\gamma+\delta$，其中 $\delta\in(U+W_1)\cap W_2$。于是 $\delta=\gamma_1+\delta_1$，$\gamma_1\in U,\delta_1\in W_1$，因此 $\beta=\gamma+\gamma_1+\delta_1\in U+W_1$，且 $\beta=\gamma+\delta\in U+W_2$。于是 $\beta\in(U+W_1)\cap(U+W_2)$，由此得出，$U+(U+W_1)\cap W_2\subseteq(U+W_1)\cap(U+W_2)$。综上所述得，

$$(U+W_1)\cap(U+W_2)=U+(U+W_1)\cap W_2.$$

③：3. 由域 F 上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{m\times n}(F)$ 是域 F 上的一个线性空间。令

$$V_i=\{AE_{ii}\mid A\in M_{m\times n}(F)\},\qquad(2)$$

其中 E_{ii} 表示 (i,i) 元为 1，其余元为 0 的 n 级矩阵，$i=1,2,\cdots,n$。证明：

(1) V_i 是 $M_{m\times n}(F)$ 的子空间，$i=1,2,\cdots,n$；求 V_i 的一个基和维数。

(2) $M_{m\times n}(F)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$。

答案：3. **证明** (1) 显然 V_i 非空集，任取 $A,B\in M_{m\times n}(F)$，任取 $k\in F$，有

$$AE_{ii}+BE_{ii}=(A+B)E_{ii},k(AE_{ii})=(kA)E_{ii}.$$

这表明 V_i 对矩阵的加法和纯量乘法封闭，因此 V_i 是 $M_{m\times n}(F)$ 的子空间，$i=1,2,\cdots,n$。

在 $M_{m\times n}(F)$ 中任取 $A=(a_{ij})$，有

$$AE_{ii}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_{1i}&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&a_{2i}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&a_{mi}&0&\cdots&0\end{pmatrix}=a_{1i}E_{1i}+a_{2i}E_{2i}+\cdots+a_{mi}E_{mi}.$$

又 $E_{1i},E_{2i},\cdots,E_{mi}$ 线性无关，因此它是 V_i 的一个基，从而 $\dim V_i=m$。

(2) 由于 V_1 的一个基 $E_{11},E_{21},\cdots,E_{m1}$，$V_2$ 的一个基 $E_{12},E_{22},\cdots,E_{m2}$，$\cdots$，$V_n$ 的一个基 $E_{1n},E_{2n},\cdots,E_{mn}$ 合起来是 $M_{m\times n}(F)$ 的一个基，因此 $M_{m\times n}(F)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$。■

12. 求数域 K 上的 4 元齐次线性方程组，使得它的解空间为 $U=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,1)',\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,-1,1)'.$$

$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为极大线性无关组. $\begin{cases}a_1-a_3+a_4=0\\a_1+a_2-a_3+a_4=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ 则方程 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1-x_4=0\end{cases}$ 的解空间为 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle=U$.

11. 设 A,B 分别是域 F 上 $s\times n,m\times n$ 矩阵。证明：n 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解集 W_1 与 $B\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解集 W_2 相等当且仅当 A 的行向量组与 B 的行向量组等价。

11. 设 A 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；$B$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$。用 W 表示 n 元齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间。

必要性。设 $W_1=W_2$。对于 $\boldsymbol{\eta}\in F^n$，有

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}A\boldsymbol{\eta}\\B\boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\quad\Leftrightarrow\quad A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}\text{ 且 }B\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0},$$

因此 $W\subseteq W_1$。又已知 $W_1=W_2$，因此从 $A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$ 可推出 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$。于是 $W_1\subseteq W$。从而 $W_1=W$。由此得出，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$。于是

$$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表出，因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$。从而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$。

充分性。设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$。从而 $\dim W_1=\dim W_2$。任取 $\boldsymbol{\eta}\in W_1$，则 $A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$。即 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$。于是 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\eta}=0,i=1,2,\cdots,s$。由于 $\boldsymbol{\beta}_j=k_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{js}\boldsymbol{\alpha}_s$，因此

$$\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{\eta}=k_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\eta}+\cdots+k_{js}\boldsymbol{\alpha}_s\boldsymbol{\eta}=0,j=1,2,\cdots,m,$$

从而 $B\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\eta}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$。于是 $\boldsymbol{\eta}\in W_2$，因此 $W_1\subseteq W_2$。又 $\dim W_1=\dim W_2$，所以 $W_1=W_2$。

注：在证明必要性时，为了找出 A 的行向量组与 B 的行向量组之间的关系，因此考虑齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$。这一步是关键的想法。在证明充分性时，关键是去证明 $W_1\subseteq W_2$，在这里，用矩阵的分块乘法使证明变得简捷。

总结

(同构) 精减：域 F 上的两个维数有限的子空间一定同构

例 7 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 的一个基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 V 的一个向量组，并且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A. \tag{9}$$

证明：$\dim\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle=\operatorname{rank}(A)$.

证明 由于 $\dim V=n$，因此 $V\cong F^n$。映射

$$\sigma:\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\longmapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$$

取自坐标的同构映射

是 V 到 F^n 的一个同构映射。从(9)式得出，β_j 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是矩阵 A 的第 j 列 A_j。因此 $\sigma(\beta_j)=A_j$，$j=1,2,\cdots,s$。从而 $\sigma\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle=\langle A_1,A_2,\cdots,A_s\rangle$。于是

$$\begin{aligned}\dim\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle&=\dim\sigma\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle\\&=\dim\langle A_1,A_2,\cdots,A_s\rangle\\&=\operatorname{rank}(A).\end{aligned}$$

■

点评 例 7 就是 8.2 节典型例题例 11。现在利用 V 到 F^n 的一个同构映射 σ 简捷地证出了结论。这说明多掌握一些深刻的理论就能站得更高一些，看得更透彻一些，从而解题可以更简捷。

* **例 10** 设 A,B 都是数域 K 上的 n 级对称矩阵。证明：如果存在 K^n 到自身的一个同构映射 σ，使得

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))'B(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in K^n,$$

同构映射将基映为基.

那么 $A\simeq B$。

证明 在 K^n 中取标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$。由于 σ 是 K^n 到自身的一个同构映射，因此 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 也是 K^n 的一个基。设 $(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)P$，则 P 是可逆矩阵。

任取 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in K^n$。则

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha})&=\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\boldsymbol{\alpha}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)P\boldsymbol{\alpha}=IP\boldsymbol{\alpha}=P\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}=P^{-1}\sigma(\boldsymbol{\alpha})$。由于 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))'B(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}$，因此二次型 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}$ 与 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))'B(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))$ 等价。又由于 A,B 都是对称矩阵，因此 $A\simeq B$，且 $B=(P^{-1})'A(P^{-1})$。 ■

例 11 设 A,B 都是域 F 上的 $s\times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$。用 U,W 分别表示 n 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，$B\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，证明：

(1) $U\cong W$；

(2) 存在域 F 上的一个 n 级矩阵 H，使得 $\sigma(\boldsymbol{\eta})=H\boldsymbol{\eta}$（$\forall\,\boldsymbol{\eta}\in U$）是 U 到 W 的一个同构映射。

证单射：① $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\{0\}$

② $x\to Ax$ 中 A 可逆.

证明 (1) 由于 $\dim U=n-\operatorname{rank}(A)=n-\operatorname{rank}(B)=\dim W$，因此 $U\cong W$。

(2) 由于 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$，因此 A 与 B 相抵，从而存在 s 级可逆矩阵 P 与 n 级可逆矩阵 Q，使得 $B=PAQ$。任取 $\boldsymbol{\eta}\in U$，则 $A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，从而 $P^{-1}BQ^{-1}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$。于是 $B(Q^{-1}\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{0}$。因此 $Q^{-1}\boldsymbol{\eta}\in W$。记 $H=Q^{-1}$，则 $H\boldsymbol{\eta}\in W$，从而 $\sigma(\boldsymbol{\eta})=H\boldsymbol{\eta}$ 是 U 到 W 的一个映射。单：由于 H 可逆，因此 σ 是单射。任取 $\boldsymbol{\delta}\in W$，令 $\boldsymbol{\eta}=H^{-1}\boldsymbol{\delta}$。由于

满：$$PA\boldsymbol{\eta}=PA(H^{-1}\boldsymbol{\delta})=PA(Q\boldsymbol{\delta})=B\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0},$$

因此 $A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{\eta}\in U$。由于

$$\sigma(\boldsymbol{\eta})=\sigma(H^{-1}\boldsymbol{\delta})=H(H^{-1}\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{\delta},$$

因此 σ 是满射，显然 σ 保持加法和纯量乘法运算，因此 σ 是 U 到 W 的一个同构映射。 ■

7. 设 A,B 都是 n 级实对称矩阵，证明：如果 A 与 B 有相同的特征多项式，那么存在 $\mathbf{R}^n$ 到自身的一个同构映射 σ，使得

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))'B(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n.$$

由 A.B 实对称，且相似，知 A.B 正交相似，∃U 为正交阵，$U^{-1}AU=B$

设 $\sigma(\alpha)=U^{-1}\alpha$，则 $(\sigma(\alpha))'B(\sigma(\alpha))=\alpha'UBU^{-1}\alpha=\alpha'A\alpha$，同构是明显的。

(8.4 商空间略)

1. 设 V 是域 F 上的线性空间，S 是 V 的任一子集。V 中包含 S 的所有子空间的交称为**由 S 生成的子空间**，记作 $\langle S\rangle$，即

$$\langle S\rangle=\bigcap W, \tag{1}$$

其中 W 取遍 V 中包含 S 的所有子空间。

(1) 证明：$S\subseteq\langle S\rangle$；

(2) 用 T 表示由 S 里的任意有限多个向量的所有线性组合组成的集合，证明：$\langle S\rangle=T$；

(1) $\forall\,\alpha\in S$，则 $\alpha\in W$，其中 W 为包含 S 的子空间 $\Rightarrow\alpha\in\cap W$，则 $S\subseteq\cap W$.

(2) 在 S 中任取 $\alpha_1\cdots\alpha_m$，由(1)知 $\alpha_i\in S\Rightarrow T\subseteq\langle S\rangle$

由 T 非空，关于 V 的加法与数乘封闭 $\Rightarrow T$ 为 V 的子空间，由 T 定义知 $S\subseteq T$，则 $\langle S\rangle\subseteq T$. } $T=\langle S\rangle$，证毕

5. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，用 U 表示 A 的列空间，用 W 表示 AA' 的列空间，证明：$U=W$。

5. **证明** 设 $A=(a_{ij})$ 的列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。则

$$U=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle,$$

$$\begin{aligned}AA'&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\\&=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n,\cdots,a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n).\end{aligned}$$

☆ $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}AA^T$（证明同解空间一致）

对 ∀ 实矩阵恒成立.

从而 $W=\langle a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n,\cdots,a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n\rangle$，于是 $W\subseteq U$。又由于 A 是实矩阵，因此 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA')$。从而

$$\dim U=\dim W.$$

因此 $W=U$。 ■

6. 设 A 是域 F 上的 n 级可逆矩阵，把 A 和 A^{-1} 如下分块：

$$A=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc}k&n-k\end{array}&\\\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}&\begin{array}{l}l\\n-l\end{array}\end{array},\qquad A^{-1}=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc}l&n-l\end{array}&\\\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}&\begin{array}{l}k\\n-k\end{array}\end{array}, \tag{3}$$

其中 k 和 l 都是小于 n 的正整数，用 W 表示 $A_{12}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，用 U 表示 $B_{12}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $(n-k)\times1$，$(n-l)\times1$ 未知列向量。证明：

(1) $W\cong U$； (2) $\dim W=\dim U$。

6. **证明** (1) 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in W$，则 $A_{12}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。从而

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=A^{-1}A\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{l\times1}\\ A_{22}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{l\times1}\\ A_{22}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{12}A_{22}\boldsymbol{\alpha}\\ B_{22}A_{22}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\begin{matrix}k\\ n-k\end{matrix}.$$

由此得出，$B_{12}A_{22}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，于是 $A_{22}\boldsymbol{\alpha}\in U$。令

$$\sigma: W\longrightarrow U$$
$$\boldsymbol{\alpha}\longmapsto A_{22}\boldsymbol{\alpha},$$

则 σ 是 W 到 U 的一个映射。设 $\boldsymbol{\beta}\in W$，如果 $A_{22}\boldsymbol{\alpha}=A_{22}\boldsymbol{\beta}$，那么 $A_{22}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$。又由于 $A_{12}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$A_{12}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，因此 $A_{12}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=0$。从而

$$\begin{bmatrix}A_{12}\\A_{22}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}A_{12}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\A_{22}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ \mathbf{0}_{(n-k)\times1}\end{bmatrix}.$$

由于 A 可逆，因此 $\begin{bmatrix}A_{12}\\A_{22}\end{bmatrix}$ 的列向量组线性无关。于是由上式推出 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$。这证明了 σ 是单射。

任给 $\boldsymbol{\gamma}\in U$，则 $B_{12}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}_{k\times1}$ 从而

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{l\times1}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=AA^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{l\times1}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=A\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{l\times1}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ B_{22}\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k\times1}\\ B_{22}\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{12}B_{22}\boldsymbol{\gamma}\\ A_{22}B_{22}\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}\begin{matrix}l\\ n-l\end{matrix}.$$

由此推出，$A_{12}B_{22}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，$A_{22}B_{22}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}$。于是 $B_{22}\boldsymbol{\gamma}\in W$，且 $\sigma(B_{22}\boldsymbol{\gamma})=A_{22}(B_{22}\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\gamma}$。因此 σ 是满射。从而 σ 是双射。

显然 σ 保持加法和纯量乘法运算，因此 σ 是 W 到 U 的一个同构映射。于是 $W\cong U$。

(2) 由于 $W\cong U$，因此 $\dim W=\dim U$。 ■

点评 第 6 题中的 W 是 F^{n-k} 的一个子空间，U 是 F^{n-l} 的一个子空间，我们证明了 $W\cong U$，$\dim W=\dim U$。证明的关键有两点：第一点是利用 $A^{-1}A=I$，通过用 $A^{-1}A$ 左乘分块矩阵 $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$ 推导出 $B_{12}A_{22}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，从而 $A_{22}\boldsymbol{\alpha}\in U$。这启发我们考虑映射 $\sigma:\boldsymbol{\alpha}\longmapsto A_{22}\boldsymbol{\alpha}$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$。第二点是利用 $AA^{-1}=I$，通过用 AA^{-1} 左乘 $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}$ 推导出 $A_{12}B_{22}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 且 $A_{22}B_{22}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}$，由此证明 σ 是满射。进而证明 σ 是同构映射。由 $W\cong U$ 推出 $\dim W=\dim U$。这个结论在直观上不容易猜出，需要经过探索和逻辑推理才能得出，这个结论是有趣的：把 n 级可逆矩阵 A 和它的逆矩阵 A^{-1} 如(3)式那样分块，使得 A 的列(行)的分法与 A^{-1} 的行(列)的分法一致，则 $A_{12}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间 W 与 $B_{12}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 的解空间 U 的维数相等。类似地可以证明：$A_{21}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间与 $B_{21}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数相等。类似地，还可以证明：$A'_{11}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间与 $B'_{22}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数相等。对 A^{-1} 用这个结论(注意 $(A^{-1})^{-1}=A$)立即得到：$A'_{22}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间与 $B'_{11}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数相等。

第九章 线性映射

精减：

定理 2 设 V 是域 F 上的一个线性空间，U 和 W 是 V 的两个子空间，且

$$V=U\oplus W \tag{7}$$

任取 $\alpha\in V$，设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in U$，$\alpha_2\in W$。令

$$\boldsymbol{P}_U: V\longrightarrow V$$
$$\alpha\longmapsto\alpha_1. \tag{8}$$

则 $\boldsymbol{P}_U$ 是 V 上的一个线性变换，称 $\boldsymbol{P}_U$ 是平行于 W 在 U 上的**投影**，它满足

$$\boldsymbol{P}_U(\alpha)=\begin{cases}\alpha & 当\ \alpha\in U,\\ 0 & 当\ \alpha\in W;\end{cases} \tag{9}$$

满足(9)式的 V 上的线性变换是唯一的。

类似地定义 P_W。有 $P_UP_W=P_WP_U=0$ 即两投影是正交的

命题 2 设 V 是域 F 上的线性空间，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 V 上正交的幂等变换，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$。则 $\boldsymbol{A}$ 是平行于 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{B}$ 在 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$ 上的投影，$\boldsymbol{B}$ 是平行于 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$ 在 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{B}$ 上的投影。 ■

题目：

例 10 设 A 是数域 K 上的 3 级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&3&1\\0&3&-1\end{bmatrix}.$$

用 W,W_1,W_2 分别表示 3 元齐次线性方程组

$$(A^2-I)\boldsymbol{X}=0,\ (A+I)\boldsymbol{X}=0,\ (A-I)\boldsymbol{X}=0$$

的解空间。

(1) 证明：$W=W_1\oplus W_2$；

(2) 求 $(A^2-I)\boldsymbol{X}=0$ 的一个基础解系；

(3) 求 $(A^2-I)\boldsymbol{X}=0$ 的上述基础解系中每一个解向量在投影 $\boldsymbol{P}_{W_1}$ 下的象，以及在投影 $\boldsymbol{P}_{W_2}$ 下的象。

求投影的方法

(1) **证明** 令 $f(x)=x^2-1$，$f_1(x)=x+1$，$f_2(x)=x-1$。则 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，据 8.2 节典型例题的例 24 得，$W=W_1\oplus W_2$。 ■

(2) **解**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-3&0\\-8&12&4\\-6&6&4\end{bmatrix},$$

$$A^2-I=\begin{bmatrix}0&-3&0\\-8&11&4\\-6&6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$(A^2-I)\boldsymbol{X}=0$ 的一个基础解系是

$$\boldsymbol{\eta}=(1,0,2)'.$$

(3) **解** 由于

$$\frac{1}{2}(A+I)-\frac{1}{2}(A-I)=I,$$

因此 $$\boldsymbol{\eta}=I\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{2}(A+I)\boldsymbol{\eta}-\frac{1}{2}(A-I)\boldsymbol{\eta}.$$

令 $$\boldsymbol{\eta}_1=-\frac{1}{2}(A-I)\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}(A+I)\boldsymbol{\eta}.$$

则 $$(A+I)\boldsymbol{\eta}_1=-\frac{1}{2}(A^2-I)\boldsymbol{\eta}=0,\ (A-I)\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}(A^2-I)\boldsymbol{\eta}=0.$$

因此 $$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_1\in W_1,\ \boldsymbol{\eta}_2\in W_2.$$

从而 $$\boldsymbol{P}_{W_1}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}_1=-\frac{1}{2}(A-I)\boldsymbol{\eta}=(1,0,2)',$$

$$\boldsymbol{P}_{W_2}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}(A+I)\boldsymbol{\eta}=(0,0,0)',$$

即 $$\boldsymbol{P}_{W_1}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{P}_{W_2}(\boldsymbol{\eta})=0.$$

点评 例 10 主要是想说明求向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在投影 $\boldsymbol{P}_{W_1}$ 下的象的一般方法。至于这道题中的 A 由于满足 $|A-I|\neq0$，因此 $(A-I)\boldsymbol{X}=0$ 只有零解，从而 $W_2=0$。于是 $W=W_1+0$。因此 $\boldsymbol{P}_{W_1}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}$。

求投影

即 $\sigma(x)=Ax$ 同构

例 12 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基。

证明 必要性。设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射，于是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基可得出，$\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基。

充分性。设 $\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基，令

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{A}\alpha_i.$$

则 σ 是 V 到自身的一个同构映射(据 8.3 节定理 1 的证明)。由于 $\sigma(\alpha_i)=\boldsymbol{A}\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基，因此 $\sigma=\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射，于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆。 ■

已给出直和分解，则直接用分解

例 16 设 V 是域 F 上的线性空间，$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是 V 的子空间，且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$，用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示平行于 $\sum\limits_{j\neq i}V_j$ 在 V_i 上的投影(即，设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，其中 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2,\cdots,\alpha_s\in V_s$，则 $\boldsymbol{P}_i(\alpha)=\alpha_i$)。证明：$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 是两两正交的幂等变换，且

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\cdots+\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{I}.$$

证明 任取 $\alpha\in V$，设

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\ \alpha_1\in V_1,\ \alpha_2\in V_2,\cdots,\alpha_s\in V_s,$$

则 $\boldsymbol{P}_i(\alpha)=\alpha_i$。由于 $\alpha_i=0+\cdots+0+\alpha_i+0+\cdots+0$，因此 $\boldsymbol{P}_i(\alpha_i)=\alpha_i$。从而

$$\boldsymbol{P}_i^2(\alpha)=\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{P}_i(\alpha))=\boldsymbol{P}_i(\alpha_i)=\alpha_i=\boldsymbol{P}_i(\alpha).$$

因此 $\boldsymbol{P}_i^2=\boldsymbol{P}_i$，即 $\boldsymbol{P}_i$ 是幂等变换($i=1,2,\cdots,s$)。当 $j\neq i$ 时，$\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{P}_i(\alpha)=\boldsymbol{P}_j(\alpha_i)=0$。因此 $\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{P}_i=\mathbf{0}$。同理 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j=\mathbf{0}$。即 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 两两正交，由于

$$(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\cdots+\boldsymbol{P}_s)(\alpha)=\boldsymbol{P}_1(\alpha)+\boldsymbol{P}_2(\alpha)+\cdots+\boldsymbol{P}_s(\alpha)$$
$$=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=\alpha,$$

因此 $$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\cdots+\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{I}.$$ ■

例 18 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明下述两个命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是可逆变换；

(2) 如果 V 能分解成它的子空间 V_1 与 V_2 的直和，那么 $V=\boldsymbol{A}(V_1)\oplus\boldsymbol{A}(V_2)$。

(1)⇒(2). 若 A 可逆，则 $\mathcal{A}$ 为 $V\to V$ 的同构。有 $V=V_1\oplus V_2$，则 $\mathcal{A}(V_1)$，$\mathcal{A}(V_2)$ 为 V 的子空间。
对 $\alpha\in V$，分解为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$。对 $\forall\beta\in V$，$\exists\gamma\in V$，$\beta=\mathcal{A}(\gamma)=\mathcal{A}(\gamma_1)+\mathcal{A}(\gamma_2)\in\mathcal{A}(V_1)+\mathcal{A}(V_2)$
即有 $V=\mathcal{A}(V_1)+\mathcal{A}(V_2)$。取 $\delta\in\mathcal{A}(V_1)\cap\mathcal{A}(V_2)$，$\exists s_1\in V_1$，$\delta=\mathcal{A}(s_1)$，同理 $\exists s_2\in V_2$，$\delta=\mathcal{A}(s_2)$，则 $\mathcal{A}(s_1)=\mathcal{A}(s_2)$
均可逆：$s_1=s_2$，又 $V_1\cap V_2=\{0\}\Rightarrow s_1=s_2=0\Rightarrow\delta=0$，则 $V=\mathcal{A}(V_1)\oplus\mathcal{A}(V_2)$

(2)⇒(1). 即证 A 为双射。对 $\alpha\in V$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，若 $\mathcal{A}(\alpha)=0$，则 $\mathcal{A}(\alpha_1)+\mathcal{A}(\alpha_2)=0$。若 $\mathcal{A}(\alpha_1)\neq0\Rightarrow\mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2)=0$
$\alpha_1+\alpha_2\in V_1\cap V_2\Rightarrow\alpha_1=-\alpha_2\Rightarrow\alpha_2\in V_1$ 矛盾！$\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$，则 $\alpha=0$。故 $\mathcal{A}$ 为单射。
有 $\mathcal{A}(V)=\mathcal{A}(V_1)+\mathcal{A}(V_2)$，又 $\mathcal{A}(V_1)\cap\mathcal{A}(V_2)=\{0\}\Rightarrow\mathcal{A}(V)=\mathcal{A}(V_1)\oplus\mathcal{A}(V_2)=V\Rightarrow\mathcal{A}$ 满射，证毕

9. 设 δ,γ 是几何空间 V 的两个向量，用 $\boldsymbol{P}_\delta$ 表示在过原点 O 且方向为 δ 的直线上的正投影，$\boldsymbol{P}_\gamma$ 的定义类似。证明：δ 与 γ 互相垂直的充分必要条件为 $\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma=\boldsymbol{0}$。

9. 如图 9-7 所示，不妨设 δ,γ 都是单位向量。任取 $\alpha\in V$，有

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{P}_\delta(\alpha)&=(\alpha,\delta)\delta,\\ \boldsymbol{P}_\gamma(\alpha)&=(\alpha,\gamma)\gamma,\end{aligned}}$$

→若非单位向量，则 $P_\delta(\alpha)=\frac{(\alpha,\delta)}{(\delta,\delta)}\delta$.

于是

$$\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma(\alpha)=\boldsymbol{P}_\delta(\alpha,\gamma)\gamma=(\alpha,\gamma)\boldsymbol{P}_\delta(\gamma)=(\alpha,\gamma)(\gamma,\delta)\delta.$$

必要性。设 δ 与 γ 垂直，则 $(\gamma,\delta)=0$，从而 $\forall\alpha\in V$ 有

$$\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma(\alpha)=(\alpha,\gamma)(\gamma,\delta)\delta=0,$$

因此 $\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma=\boldsymbol{0}$。

充分性。设 $\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma=\boldsymbol{0}$。选取 α 使得 α 与 γ 不垂直。则 $(\alpha,\gamma)\neq0$。由于

$$0=\boldsymbol{0}(\alpha)=\boldsymbol{P}_\delta\boldsymbol{P}_\gamma(\alpha)=(\alpha,\gamma)(\gamma,\delta)\delta,$$

因此 $(\gamma,\delta)=0$，于是 $\delta\perp\gamma$。

精减：

命题 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射。则

(i) $\boldsymbol{A}$ 是单射当且仅当 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=0$；

(ii) $\boldsymbol{A}$ 是满射当且仅当 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}=V'$。

线性映射的核与象之间有什么联系？下面的两个定理回答了这个问题。

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射，则

$$V/\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\cong\operatorname{Im}\boldsymbol{A}.$$

$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}+\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}=\dim V$

定理 3 设 V 和 V' 都是域 F 上 n 维线性空间，且 $\boldsymbol{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射，则 $\boldsymbol{A}$ 是单射当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是满射。$\dim\operatorname{Im}=n$.

$\dim\operatorname{Ker}=0$

推论 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 是单射当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是满射。■

$\operatorname{Im}A$ 对应 A 的列空间　　对 $\mathscr{A}$: $x\to Ax$. 有 $\operatorname{rank}\mathscr{A}=\operatorname{rank}A$

$(\operatorname{rank}\mathscr{A}=\operatorname{rank}\operatorname{Im}\mathscr{A}=\operatorname{rank}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=\operatorname{rank}A)$

推论 2 设 $V=U\oplus W$，用 $\boldsymbol{P}_U$ 表示平行于 W 在 U 上的投影。则

$$U=\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_U,\ W=\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_U.$$

题目：

例 2 设 V,U,W 都是域 F 上的线性空间，并且 V 是有限维的。设 $\boldsymbol{A}\in\operatorname{Hom}(V,U)$，$\boldsymbol{B}\in\operatorname{Hom}(U,W)$。证明：

$$\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{BA})\leqslant\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{A})+\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}).\tag{14}$$

证明 $\boldsymbol{BA}\in\operatorname{Hom}(V,W)$，$(\boldsymbol{BA})V=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}V)=\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}V)$，$\operatorname{Ker}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}V)\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$。据线性映射的核与象的维数公式得

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{BA})&=\dim V-\dim((\boldsymbol{BA})V)\\&=\dim V-\dim(\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}V))\\&=\dim V-[\dim(\boldsymbol{A}V)-\dim(\operatorname{Ker}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}V))]\\&=\dim V-\dim(\boldsymbol{A}V)+\dim(\operatorname{Ker}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}V))\\&\leqslant\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{A})+\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

■

—基本方法牢记。

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是域 F 上线性空间 V 上的幂等变换。证明：

→幂等变换为投影

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的象当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的核当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$。

命题 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换。如果 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的幂等变换，那么

$$V=\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\oplus\operatorname{Ker}\boldsymbol{A},\tag{12}$$

并且 $\boldsymbol{A}$ 是平行于 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$ 在 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 上的投影。

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 V 上的幂等变换，因此据本节命题 3 得，$\boldsymbol{A}$ 是平行于 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$ 在 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 上的投影，$\boldsymbol{B}$ 是平行于 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$ 在 $\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$ 上的投影。

必要性。设 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}=\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$。任取 $\alpha\in V$，有 $\boldsymbol{B}\alpha\in\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$，由已知条件得，$\boldsymbol{B}\alpha\in\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$。据投影的性质(9.1 节的定理 2)得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\alpha)=\boldsymbol{B}\alpha.$$

由此得出，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$。由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的地位对称，因此也有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$。

充分性。设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$。任取 $\gamma\in\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$。由投影的性质得，$\boldsymbol{A}\gamma=\gamma$，由已知条件得，$(\boldsymbol{BA})\gamma=\boldsymbol{A}\gamma=\gamma$。从而 $\boldsymbol{B}\gamma=\gamma$。于是 $\gamma\in\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$。因此 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\subseteq\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$。同理可证，$\operatorname{Im}\boldsymbol{B}\subseteq\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$。于是 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}=\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$。

(2) 必要性。设 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$。任取 $\alpha\in V$，由于 $V=\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\oplus\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$，因此有

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in\operatorname{Im}\boldsymbol{A},\alpha_2\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}.$$

于是 $\alpha-\alpha_1\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$。由已知条件得，$\alpha-\alpha_1\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$。于是 $\boldsymbol{B}(\alpha-\alpha_1)=0$。即 $\boldsymbol{B}\alpha=\boldsymbol{B}\alpha_1$。由于 $\boldsymbol{A}$ 是平行于 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$ 在 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 上的投影，因此 $\boldsymbol{A}\alpha=\alpha_1$。从而

$$(\boldsymbol{BA})\alpha=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\alpha)=\boldsymbol{B}\alpha_1=\boldsymbol{B}\alpha.$$

由此得出，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$。由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的地位对称，因此也有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$。

充分性。设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$。任取 $\delta\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}\delta=0$，从而 $\boldsymbol{BA}\delta=0$。由于 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{B}\delta=0$。从而 $\delta\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$，于是 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$。同理可证 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$。因此 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=\operatorname{Ker}\boldsymbol{B}$。■

例 13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。证明：如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，那么对于 V 上的任意线性变换 $\boldsymbol{C}$，都有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$。

—特别地，有 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A^2$

则 $\forall n$. $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+n}$

考虑 $\mathscr{A}|BV$ 有 $\underbrace{\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}|BV}_{\operatorname{Im}\mathscr{A}|BV=\mathscr{A}BV}+\underbrace{\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}|BV}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}|BV=\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap BV}=\dim BV$.

由 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}\mathscr{A}$: $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap BV=\{0\}$

$\Downarrow$

$\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap BCV=\{0\}$

考虑 $\mathscr{A}|BCV$, 有 $\underbrace{\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}|BCV}_{\operatorname{rank}ABC}+\underbrace{\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}|BCV}_{0}=\underbrace{\dim BCV}_{\operatorname{rank}BC}$ 证毕

1. 判断下面定义的 K^4 到 K^5 的映射 $\boldsymbol{A}$ 是不是线性映射。如果是，求 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$，$\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$，$\operatorname{Coker}\boldsymbol{A}$。

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-3x_2+x_3-2x_4\\2x_1+x_2-x_3+3x_4\\-x_1+10x_2-4x_3+9x_4\\3x_1-2x_2+x_4\\4x_1+9x_2-5x_3+13x_4\end{bmatrix}.$$

←最基础题型。

☆ $\operatorname{Im}A$ 为 A 的列空间。

1. $$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\2&1&-1&3\\-1&10&-4&9\\3&-2&0&1\\4&9&-5&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是 K^4 到 K^5 的一个线性映射。用 A 表示上式右端的 5×4 矩阵，$\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$ 等于 $AX=0$ 的解空间，$\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 等于矩阵 A 的列空间，把 A 经过初等行变换化成简化行阶梯形。

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&7&-3&7\\0&7&-3&7\\0&7&-3&7\\0&21&-9&21\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&1\\0&1&-\frac{3}{7}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

于是 $AX=0$ 的一个基础解系是

$$\eta_1=(2,3,7,0)',\eta_2=(1,1,0,-1)',$$

列空间☆

从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=\langle(2,3,7,0)',(1,1,0,-1)'\rangle$。

A 的列向量组的一个极大线性无关组为

$$\alpha_1=(1,2,-1,3,4)',\alpha_2=(-3,1,10,-2,9)',$$

因此 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}=\langle(1,2,-1,3,4)',(-3,1,10,-2,9)'\rangle$。

把 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 的一个基 α_1,α_2，扩充成 K^5 的一个基：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-3\\1\\10\\-2\\9\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

则 $\beta_1+\operatorname{Im}\boldsymbol{A},\beta_2+\operatorname{Im}\boldsymbol{A},\beta_3+\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 是 $K^5/\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ 的一个基，从而

$$\operatorname{Coker}\boldsymbol{A}=\langle(1,0,0,0,0)'+\operatorname{Im}\boldsymbol{A},(0,1,0,0,0)'+\operatorname{Im}\boldsymbol{A},(0,0,1,0,0)'+\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\rangle.$$

7. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间，$\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换，W 是 V 的一个子空间，用 $\mathbf{A}^{-1}W$ 表示 W 在 $\mathbf{A}$ 下的原象集。证明：

$\mathscr{A}|_W$ ← (1) $\dim W-\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A})\leqslant\dim(\mathbf{A}W)\leqslant\dim W$；

$\mathscr{A}|_{\mathscr{A}^{-1}W}$ ← (2) $\mathbf{A}^{-1}W$ 是 V 的一个子空间，且

$$\dim(\mathbf{A}^{-1}W)\leqslant\dim W+\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A});$$

(3) 若 $W\subseteq\operatorname{Im}\mathbf{A}$，则

$$\dim(\mathbf{A}^{-1}W)\geqslant\dim W.$$

☆注意：$\mathscr{A}|_{\mathscr{A}^{-1}W}:\mathscr{A}^{-1}W\to W$ 不能说明 $\operatorname{Im}\mathscr{A}=W$ ☆

(线性映射矩阵表示) 精减：$V\to V'$：$\mathscr{A}$ 在 V 的基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 V' 的基 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 下的矩阵：$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_s)A$

$V\to V$：基一致时，$\mathscr{A}$ 在 V 的基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下的矩阵：$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$.

有 $\operatorname{rank}\mathscr{A}=\operatorname{rank}A$

若 α 在 V 中坐标为 X，则 $\mathscr{A}\alpha$ 在 V' 中坐标为 AX

线性变换在不同基下矩阵间的关系：V 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下矩阵为 A，在基 $\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$ 下矩阵为 B，$\{\alpha_i\}$ 到 $\{\eta_i\}$ 的过渡矩阵为 S，则 $B=S^{-1}AS$

$\mathscr{A}$ 在基 M 下矩阵为 A，$\mathscr{B}$ 在基 M 下矩阵为 B，则 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在 M 下矩阵为 AB.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "\sigma"'] & V' \arrow[d, "\tau"] \\ F^n \arrow[r, "\tilde{\mathscr{A}}"'] & F^s \end{tikzcd}$$

$V:\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ $V'\{\eta_1,\cdots,\eta_s\}$

$\tilde{\mathscr{A}}(X)=AX$. $\sigma:\alpha\mapsto\alpha$ 在 $\{\alpha_i\}$ 下坐标 有 $\tau\mathscr{A}=\tilde{\mathscr{A}}\sigma$ (可交换)

$\tau:\mathscr{A}\alpha\mapsto\mathscr{A}\alpha$ 在 $\{\eta_i\}$ 下坐标

题目：

例 18 设 $A_i\in M_n(K)$，$i=1,2,\cdots,s$，其中 K 是数域。令 $A=A_1+A_2+\cdots+A_s$。证明：$A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵，当且仅当 A 是幂等矩阵，并且

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A_1)+\operatorname{rank}(A_2)+\cdots+\operatorname{rank}(A_s).$$

(注：两个 n 级矩阵 A,B，如果满足 $AB=BA=0$，那么称 A 与 B 是**正交的**。)

证明 必要性。设 $A_1,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵，则

$$A^2=(A_1+A_2+\cdots+A_s)^2=A_1^2+A_2^2+\cdots+A_s^2=A_1+A_2+\cdots+A_s=A.$$

因此 A 是幂等矩阵。由于数域 K 上幂等矩阵的秩等于它的迹，因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)&=\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A_1+\cdots+A_s)=\operatorname{tr}(A_1)+\cdots+\operatorname{tr}(A_s)\\&=\operatorname{rank}(A_1)+\cdots+\operatorname{rank}(A_s).\end{aligned}$$

充分性。设 $A=A_1+\cdots+A_s$ 是幂等矩阵，并且

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A_1)+\cdots+\operatorname{rank}(A_s).$$

则根据例 17 得

$$AM_n(K)=A_1M_n(K)\oplus\cdots\oplus A_sM_n(K). \tag{46}$$

于是对于任给 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$，有

$$A_i=A_iI\in A_iM_n(K)\subseteq AM_n(K).$$

从而存在 $B_i\in M_n(K)$ 使得 $A_i=AB_i$。由于 A 是幂等矩阵，因此

$$\begin{aligned}A_i&=AB_i=A^2B_i=A(AB_i)=AA_i=(A_1+\cdots+A_s)A_i\\&=A_1A_i+\cdots+A_{i-1}A_i+A_i^2+A_{i+1}A_i+\cdots+A_sA_i.\end{aligned} \tag{47}$$

又有

$$A_i=0+\cdots+0+A_i+0+\cdots+0. \tag{48}$$

由于(45)式是 $AM_n(K)$ 的直和分解，因此 A_i 的表法唯一。从而由(46)和(47)式得

$$A_i^2=A_i,A_jA_i=0,\text{当 } j\neq i.$$

由此得出，$A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵。■

例 13 设 V 和 V' 分别是域 F 上 n 维、s 维线性空间，$\mathbf{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射。证明：存在 V 的一个基和 V' 的一个基，使得 $\mathbf{A}$ 在这一对基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix},$$

其中 $r=\operatorname{rank}(\mathbf{A})$。

不好：Im 与 Ker 分解.

(也麻烦!) 给出简单方法

证明 由于 $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ 是 V 的一个子空间，因此它在 V 中有补空间 W，即 $V=W\oplus\operatorname{Ker}\mathbf{A}$。在 W 中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，在 $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ 中取一个基 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，则

$$\operatorname{Im}\mathbf{A}=\langle\mathbf{A}\alpha_1,\cdots,\mathbf{A}\alpha_r,\mathbf{A}\alpha_{r+1},\cdots,\mathbf{A}\alpha_n\rangle=\langle\mathbf{A}\alpha_1,\cdots,\mathbf{A}\alpha_r\rangle.$$

由于 $\dim(\operatorname{Im}\mathbf{A})=\dim V-\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A})=n-(n-r)=r$，因此 $\mathbf{A}\alpha_1,\cdots,\mathbf{A}\alpha_r$ 是 $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ 的一个基。由于 $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ 是 V' 的一个子空间，因此它在 V' 中有补空间 N，即

$$V'=\operatorname{Im}\mathbf{A}\oplus N.$$

$\dim N=\dim V'-\dim(\operatorname{Im}\mathbf{A})=s-r$。在 N 中取一个基 $\eta_1,\cdots,\eta_{s-r}$，则 $\mathbf{A}\alpha_1,\cdots,\mathbf{A}\alpha_r,\eta_1,\cdots,\eta_{s-r}$ 是 V' 的一个基，于是 $\mathbf{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 和 V' 的基 $\mathbf{A}\alpha_1,\cdots,\mathbf{A}\alpha_r,\eta_1,\cdots,\eta_{s-r}$ 下的矩阵为

$$=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

V 的基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$V'$ 的基 $\{\eta_1,\cdots,\eta_s\}$，$\mathscr{A}$ 在 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\eta_i\}$ 下矩阵为 A

有 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(\mathscr{A})=r$，$\exists P,Q$ 可逆，$QAP=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$

令 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$ 则在 $\{\beta_i\}$ 与 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵为 $(Q^{-1})^{-1}AP=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$

$(\delta_1,\cdots,\delta_s)=(\eta_1,\cdots,\eta_s)Q^{-1}$

$\mathscr{A}((\beta_i))=\mathscr{A}((\alpha_i))P=(\eta_i)\cdot AP=(\delta_i)QAP=(\delta_i)\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$

$\mathbf{A}$ 可逆当且仅当有一个常数项不为 0 的多项式 $f(x)$，使得 $f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。

(3) 由第(1)小题得，在 $F[x]$ 中存在一个次数 $m\leqslant n^2$ 的非零多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，使得 $f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。

充分性。设 $a_0\neq0$。则从 $f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ 得

$$a_0^{-1}a_1\mathbf{A}+a_0^{-1}a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_0^{-1}a_m\mathbf{A}^m=-\mathbf{I}.$$

由此得出 $$\mathbf{A}(-a_0^{-1}a_1\mathbf{I}-a_0^{-1}a_2\mathbf{A}-\cdots-a_0^{-1}a_m\mathbf{A}^{m-1})=\mathbf{I},$$

因此 $\mathbf{A}$ 可逆。

必要性。设 $\mathbf{A}$ 可逆，在 $F[x]$ 中取一个次数最低的非零多项式 $m(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_rx^r$ 使得 $m(\mathbf{A})=\mathbf{0}$，其中 $c_r\neq0$。假如 $c_0=0$，则

$$\mathbf{A}(c_1\mathbf{I}+c_2\mathbf{A}+\cdots+c_r\mathbf{A}^{r-1})=\mathbf{0}.$$

两边左乘 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $c_1\mathbf{I}+c_2\mathbf{A}+\cdots+c_r\mathbf{A}^{r-1}=\mathbf{0}$。令

$$g(x)=c_1+c_2x+\cdots+c_rx^{r-1},$$

则 $g(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。但是 $\deg g(x)\leqslant r-1<\deg m(x)$，这与 $m(x)$ 的取法矛盾，因此 $c_0\neq0$。■

例 23 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是数域 K 上 4 维线性空间 V 的一个基，V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 在此基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix},$$

—基础题型.

(1) 求 $\mathbf{A}$ 在基 $\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4,\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4,\eta_3=\alpha_3+\alpha_4,\eta_4=2\alpha_4$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的核与值域；

(3) 在 Ker $\boldsymbol{A}$ 中选一个基，把它扩充成 V 的一个基，并且求 $\boldsymbol{A}$ 在这个基下的矩阵；

(4) 在 Im $\boldsymbol{A}$ 中选一个基，把它扩充成 V 的一个基，并且求 $\boldsymbol{A}$ 在这个基下的矩阵。

解 (1)

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}.$$

记上式右端的 4 级矩阵为 S，计算得

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵 B 为

$$B=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}2&-3&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{16}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\0&1&-7&-8\end{pmatrix}.$$

(2) 令 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})=A\boldsymbol{X}$，则 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是 K^4 上的一个线性变换，据例 20 得，$\alpha\in$ Ker $\boldsymbol{A}$ 当且仅当 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标 $\boldsymbol{X}\in$ Ker $\tilde{\boldsymbol{A}}$；$\gamma\in$ Im $\boldsymbol{A}$ 当且仅当 γ 的坐标属于 Im $\tilde{\boldsymbol{A}}$。在 9.2 节内容精华中已指出，Ker $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 等于齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，Im $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 等于矩阵 A 的列空间，为此把 A 经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

从而 Ker $\tilde{\boldsymbol{A}}=\langle\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\rangle$。于是

$$\text{Ker }\boldsymbol{A}=\langle 4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4\rangle.$$

↳ 不要忘记坐标要乘基α.

A 的列向量组的一个极大线性无关组是

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

从而 Im $\tilde{\boldsymbol{A}}=\langle\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2\rangle$。于是

$$\text{Im }\boldsymbol{A}=\langle\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4\rangle.$$

(3) 先把 Ker $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的一个基 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 扩充成 K^4 的一个基：

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是第(2)小题中 Ker $\boldsymbol{A}$ 的一个基扩充成 V 的一个基如下：

$$4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4,\alpha_2,\alpha_1.$$

V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到上述这个基的过渡矩阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}4&1&0&1\\3&2&1&0\\-2&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 在基 $4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵 C 为

$$C=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&2&-2\\0&0&1&\frac{9}{2}\\0&0&2&5\end{pmatrix}.$$

(4) 先把 Im $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的一个基扩充成 K^4 的一个基：

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Y}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Y}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是第(2)小题中 Im $\boldsymbol{A}$ 的一个基扩充成 V 的一个基如下：

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4,\alpha_2,\alpha_1.$$

V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到上述这个基的过渡矩阵 Q 为

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&2&1&0\\1&2&0&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵 D 为

$$D=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}5&2&0&1\\\frac{9}{2}&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

10. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的线性变换 $\boldsymbol{X}$ 组成的集合 U 是域 F 上的一个线性空间，并且求 U 的维数。

U为线性空间：$0\in U$，对加法与数乘封闭.

取V的一组基，设$\mathscr{A}$, $\mathscr{X}$在此基下的矩阵为A, X，则 $X\in U \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{X}=0 \Leftrightarrow AX=0$

令 $\mathscr{A}: M_n(K)\to AM_n(K)$, $X\mapsto AX$，则 $\dim\text{Ker}\mathscr{A}=n^2-\dim\text{Im}\mathscr{A}=n^2-rn=n(n-r)$ 即 $\dim U=n(n-r)$

例 28 设 A,B 都是域 F 上的 $s\times n$ 矩阵。证明：n 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 和 $B\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解当且仅当存在域 F 上的 s 级可逆矩阵 C，使得 $B=CA$。 好难.

证明 充分性是显然的。下面证必要性。定义 F^n 到 F^s 的映射 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别如下：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})=B\boldsymbol{\alpha},\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in F^n.$$

则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 F^n 到 F^s 的线性映射，且 Ker $\boldsymbol{A}$ 等于 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，Ker $\boldsymbol{B}$ 等于 $B\boldsymbol{X}=0$ 的解空间，由于 Ker $\boldsymbol{A}$ 是 F^n 的一个子空间，因此有 $F^n=$ Ker $\boldsymbol{A}\oplus W$。已知 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{X}=0$ 同解，因此 Ker $\boldsymbol{A}=$ Ker $\boldsymbol{B}$。从而 $F^n=$ Ker $\boldsymbol{B}\oplus W$。设 rank$(A)=r$，则 dim(Ker $\boldsymbol{A}$)$=n-r$。从而 dim $W=n-(n-r)=r$。在 W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，在 Ker $\boldsymbol{A}$ 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$。则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 F^n 的一个基，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 Im $\boldsymbol{A}$ 的一个基，由于 Ker $\boldsymbol{B}=$ Ker $\boldsymbol{A}$，因此 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 Im $\boldsymbol{B}$ 的一个基，把它们分别扩充成 F^s 的一个基：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{s-r};$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_{s-r}.$$

定义 F^s 上的一个线性变换 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\cdots,r;$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\gamma}_j)=\boldsymbol{\delta}_j,j=1,2,\cdots,s-r.$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 把基映成基，因此据 9.1 节例 12 得，$\boldsymbol{C}$ 是可逆的，从而 $\boldsymbol{C}$ 在 F^s 的标准基 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$ 下的矩阵 C 是 s 级可逆矩阵。

从 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义看出，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在 F^n 的标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 F^s 的标准基 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$ 下的矩阵分别为 A,B。于是据例 27 得，$\boldsymbol{CA}$ 在 F^n 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 F^s 的基 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$ 下的矩阵为 CA。由于

$$(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\cdots,r;$$
$$(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{C}(0)=0=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_j,j=r+1,\cdots,n.$$

因此 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$。由此得出，$CA=B$。■

(特征值、向量、变换能对角化的条件)精减：

对于域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$，设它在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是 $\boldsymbol{X}$，设 $\lambda_0\in F$，则据 9.3 节(19)式得

$$\boldsymbol{A}\xi=\lambda_0\xi\quad\Leftrightarrow\quad A\boldsymbol{X}=\lambda_0\boldsymbol{X}.\tag{3}$$

由此得出下述结论：

(1) λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是 A 的一个特征值；

(2) ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量

$\Leftrightarrow$ ξ 的坐标 $\boldsymbol{X}$ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

推论 1 域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 V 中存在由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量组成的一个基。■

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换，λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，令

$$V_{\lambda_0}\overset{\text{def}}{=}\{\alpha\in V\mid\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha\}.\tag{5}$$

易验证 V_{λ_0} 是 V 的一个子空间，称 V_{λ_0} 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的**特征子空间**。V_{λ_0} 中全部非零向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量。由于

$$\alpha\in V_{\lambda_0}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha\quad\Leftrightarrow\quad(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\alpha=0\quad\Leftrightarrow\quad\alpha\in\text{Ker}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

因此

$$V_{\lambda_0}=\text{Ker}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}).\tag{6}$$

即线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间等于线性变换 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的核。

可对角化 $\overset{1.}{\Leftrightarrow}$ V中有对应特征向量组成的基

$\overset{2.}{\Leftrightarrow}$ 特征子空间维数和为 $\dim V$

$\dim\text{Ker}(\lambda I-A)$

$\overset{3.}{\Leftrightarrow}$ 有n个线性无关特征向量

$\overset{4.}{\Leftrightarrow}$ $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus V_{\lambda_3}\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

题风.

例 9 设 V 和 V' 都是域 F 上的线性空间(都可以是无限维的)，设 $\boldsymbol{A}\in\text{Hom}(V,V')$，$\boldsymbol{B}\in\text{Hom}(V',V)$。证明：

(1) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特征值；

(2) 如果 ξ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的属于非零特征值 λ_0 的一个特征向量，那么 $\boldsymbol{B}\xi$ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。

证明 (1) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个非零特征值，则在 V' 中存在 $\xi\neq0$，使得 $(\boldsymbol{AB})\xi=\lambda_0\xi$。两边用 $\boldsymbol{B}$ 作用，得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\xi=\boldsymbol{B}(\lambda_0\xi).$$

由此得出

$$(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{B}\xi)=\lambda_0(\boldsymbol{B}\xi).$$

注意证特征向量时一定要证其非0!!!

假如 $\boldsymbol{B}\xi=0$，则 $\lambda_0\xi=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\xi)=\boldsymbol{A}(0)=0$。由于 $\xi\neq0$，因此 $\lambda_0=0$。矛盾。所以 $\boldsymbol{B}\xi\neq0$。于是 λ_0 是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{B}\xi$ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的地位对称，因此 $\boldsymbol{BA}$ 的每一个非零特征值也是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值。

(2) 第(1)小题的证明过程也同时证明了第(2)小题的结论。■

例 10 设 V 是域 F 上 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是幂零指数 $l>1$ 的幂零变换，那么 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化；不可对角化 $\Leftrightarrow$ 特征子空间维数和 $\neq \dim V$.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是幂等变换，那么 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，且写出它的标准形。

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数 $l>1$，因此 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$。从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\subsetneqq V$。据例 8 的第(1)小题，幂零变换 $\boldsymbol{A}$ 有特征值，且特征值是 0，于是 $\boldsymbol{A}$ 有且只有一个特征子空间 V_0。由于 $V_0=\operatorname{Ker}(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\subsetneqq V$，因此 $\dim V_0<n$。据推论 2 得，$\boldsymbol{A}$ 不可对角化。

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是幂等变换，则 $V=\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\oplus\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$，据例 8 的第(2)小题，$\boldsymbol{A}$ 有特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 0；并且从证明过程看出，$\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\subseteq V_1$，$\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\subseteq V_0$。显然 $V_0\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$。因此 $V_0=\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$。易证 $V_1\subseteq\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$，因此 $V_1=\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$。从而 $V=V_1\oplus V_0$。据推论 3 得，$\boldsymbol{A}$ 可对角化。$\boldsymbol{A}$ 的标准形是

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 $r=\dim V_1=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。■

幂零变换不可对角化 $A^l=0$

幂等变换可对角化 $\operatorname{diag}(I_r,0)$ $A^2=A$

对合变换可对角化 $\operatorname{diag}(I_r,-I_{n-r})$ $A^2=I$

例 18 设 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 $V(n>1)$ 上的一个线性变换，它在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 A。定义 V 上的一个线性变换 $\boldsymbol{B}$，使得它在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A^*(A 的伴随矩阵)。设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值。

解 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值就是 A^* 的全部特征值。

情形 1 A 可逆，此时 $A^*=|A|A^{-1}$。由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，因此 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值。从而 A^* 的全部特征值是 $|A|\lambda_1^{-1},|A|\lambda_2^{-1},\cdots,|A|\lambda_n^{-1}$。据例 17 得，$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。因此 A^* 的全部特征值是

$$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n,\quad \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n,\quad \cdots,\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}. \tag{19}$$

情形 2 A 不可逆，据《高等代数学习指导书(上册)》4.5 节例 7，当 $\operatorname{rank}(A)<n-1$ 时，$\operatorname{rank}(A^*)=0$，从而 $A^*=0$。于是 A^* 的全部特征值是 0(n 重)。当 $\operatorname{rank}(A)=n-1$ 时，$\operatorname{rank}(A^*)=1$。此时 0 是 A 的一个特征值。不妨设 $\lambda_n=0$。由于 $(0I-A^*)X=\mathbf{0}$ 的解空间的维数等于 $n-\operatorname{rank}(A^*)=n-1$，因此 0 是 A^* 的至少 $n-1$ 重特征值。设 μ 也是 A^* 的特征值，据例 17 得，$\mu=\operatorname{tr}(A^*)$。由于 $\operatorname{tr}(A^*)=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，因此 μ 等于 A 的所有 $n-1$ 阶主子式的和。据《高等代数学习指导书(上册)》5.5 节命题 1 得，A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1}$ 乘以 A 的所有 $n-1$ 阶主子式的和，又据 Vieta 公式得，$f(\lambda)$ 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$(注意 $\lambda_n=0$)，因此 $\mu=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$。于是 A^* 的全部特征值是 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$，0(至少 $n-1$ 重)。

例 7 设 A 是 n 级矩阵($n\geqslant 2$)，证明：

$$\operatorname{rank}(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=n, \\ 1, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=n-1, \\ 0, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)<n-1. \end{cases}$$

证明 若 $\operatorname{rank}(A)=n$，则 $|A|\neq 0$。由于

$$AA^*=|A|I$$

因此 $|A||A^*|=|A|^n\neq 0$。从而 $|A^*|\neq 0$。于是 $\operatorname{rank}(A^*)=n$。

若 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，则 A 有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0。从而 A 有一个元素的代数余子式不等于 0。于是 $A^*\neq 0$。由于 $|A|=0$，因此 $AA^*=|A|I=0$。从而

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A^*)\leqslant n.$$

于是
$$\operatorname{rank}(A^*)\leqslant n-\operatorname{rank}(A)=n-(n-1)=1.$$

由于 $A^*\neq 0$，因此 $\operatorname{rank}(A^*)=1$。

若 $\operatorname{rank}(A)<n-1$，则 A 的所有 $n-1$ 阶子式都等于 0，从而 $A^*=0$。于是 $\operatorname{rank}(A^*)=0$。

$\operatorname{rank}A^*=1\Rightarrow A^*=\alpha\beta^T$

则 $A^*\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=\operatorname{tr}(A^*)\cdot\alpha$

例 20 设 V 是域 F 上的线性空间，W,U_1,U_2 都是 V 的子空间，且 $V=U_1\oplus W$，$V=U_2\oplus W$。用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示平行于 W 在 U_i 上的投影，$i=1,2$。令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$。证明：

(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2$；

(2) 设 U_1 和 U_2 都是有限维的，则 $\boldsymbol{A}$ 把 U_1 的一个基映成 U_2 的一个基；

(3) 设 $\dim V=n$，则 V 中存在一个基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。

证明 (1) 任取 $\alpha\in V$，由于 $V=U_1\oplus W$，$V=U_2\oplus W$，因此

$$\alpha=\alpha_1+\delta_1,\qquad \alpha_1\in U_1,\qquad \delta_1\in W; \tag{27}$$
$$\alpha=\alpha_2+\delta_2,\qquad \alpha_2\in U_2,\qquad \delta_2\in W; \tag{28}$$
$$\alpha_1=\gamma_2+\beta,\qquad \gamma_2\in U_2,\qquad \beta\in W. \tag{29}$$

于是

$$\alpha=(\gamma_2+\beta)+\delta_1=\gamma_2+(\beta+\delta_1),\gamma_2\in U_2,\beta+\delta_1\in W. \tag{30}$$

由于 $V=U_2\oplus W$，因此从(28)和(30)式，得 $\alpha_2=\gamma_2$。从而有

$$\boldsymbol{P}_2(\alpha)=\boldsymbol{P}_2(\gamma_2)=\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{P}_1(\alpha))=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)(\alpha),\forall\alpha\in V.$$

由此得出，
$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{A}.$$

(2) 在 U_1 中取一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$。设

$$k_1\boldsymbol{P}_2(\eta_1)+k_2\boldsymbol{P}_2(\eta_2)+\cdots+k_s\boldsymbol{P}_2(\eta_s)=0, \tag{31}$$

则
$$\boldsymbol{P}_2(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=0.$$

从而
$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2.$$

由于 $V=U_2\oplus W$，因此据 9.2 节推论 2 得，$W=\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2$。

于是 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\in W$，又 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\in U_1$，由于 $V=U_1\oplus W$，因此 $U_1\cap W=0$。从而

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s=0.$$

由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关，因此

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$$

从而 $\boldsymbol{P}_2(\eta_1),\boldsymbol{P}_2(\eta_2),\cdots,\boldsymbol{P}_2(\eta_s)$ 线性无关。

由于 $V=U_1\oplus W$，$V=U_2\oplus W$，因此据 8.4 节典型例题的例 1 得，$U_1\cong V/W$，$U_2\cong V/W$。从而 $U_1\cong U_2$。因此 $\dim U_2=\dim U_1=s$，于是 $\boldsymbol{P}_2(\eta_1),\boldsymbol{P}_2(\eta_2),\cdots,\boldsymbol{P}_2(\eta_s)$ 是 U_2 的一个基，由于 $\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{A}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 把 U_1 的一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 映成 U_2 的一个基 $\boldsymbol{A}(\eta_1),\boldsymbol{A}(\eta_2),\cdots,\boldsymbol{A}(\eta_s)$。

(3) 在 U_2 中取一个基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，在 W 中取一个基 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t$，由于 $V=U_2\oplus W$，因此

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t$$

是 V 的一个基。由于

$$\boldsymbol{P}_2(\beta_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,s;$$
$$\boldsymbol{P}_2(\delta_i)=0,i=1,2,\cdots,t,$$

因此 $\boldsymbol{P}_2$ 在 V 的一个基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t$ 下的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

其中 $s=\dim U_2=n-\dim W=n-\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2)=\dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_2)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}_2)$.

由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2$，因此 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的上述基下的矩阵为对角矩阵 D。■

点评 例 20 的证明关键是去证 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2$。这时 V,W,U_1,U_2 都可以是无限维的。第(2)小题才需要假设 U_1,U_2 是有限维的。此时 V 仍可以是无限维的。第(3)小题才需要假设 V 是有限维的。

用归纳法.

2. 设 V 是域 F 上的线性空间(可以是无限维的)，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值，$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量组，证明：特征向量组

$$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{2r_2},\cdots,\xi_{s1},\cdots,\xi_{sr_s}$$

仍然线性无关。

补空间的求法

5. 设 $f(x)$ 是数域 K 上的一个 $n-1$ 次多项式，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$。

(1) 求 $\langle f(x)\rangle$ 在 $K[x]_n$ 中的一个补空间 U；

(2) 用 $\boldsymbol{P}_U$ 表示平行于 $\langle f(x)\rangle$ 在 U 上的投影，在 $K[x]_n$ 中选取一个基，使得 $\boldsymbol{P}_U$ 在此基下的矩阵为对角矩阵。

一般取最简单的基 $\{1,x,\cdots,x^{n-2},f(x)\}$

5. (1) 设

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_{n-2}x^{n-2}+k_{n-1}f(x)=0.$$

比较 $n-1$ 次项系数，得 $k_{n-1}a_{n-1}=0$。由于 $a_{n-1}\neq 0$，因此 $k_{n-1}=0$。从而

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_{n-2}x^{n-2}=0.$$

于是 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-2}=0$。所以 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-2},f(x)$ 线性无关。又 $\dim K[x]_n=n$，因此 $1,x,\cdots,x^{n-2},f(x)$ 是 $K[x]_n$ 的一个基。令

$$U=\langle 1,x,x^2,\cdots,x^{n-2}\rangle,$$

则 $K[x]_n=U\oplus\langle f(x)\rangle$。因此 $\langle f(x)\rangle$ 在 $K[x]_n$ 中的一个补空间 $U=\langle 1,x,x^2,\cdots,x^{n-2}\rangle$。

(2) 由于 $K[x]_n=U\oplus\langle f(x)\rangle$，因此 $U=\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_U$，$\langle f(x)\rangle=\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_U$。

$$\boldsymbol{P}_U(x^i)=x^i,i=0,1,2,\cdots,n-2;$$
$$\boldsymbol{P}_U(f(x))=0,$$

从而 $\boldsymbol{P}_U$ 在 $K[x]_n$ 中的一个基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-2},f(x)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

时刻注意非零性!

8. 求下述线性变换的全部特征值和特征向量：

(1) 实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 $M_n(\mathbf{R})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}: X\longmapsto X'$；

$\lambda=1\Rightarrow$ 非零对称矩阵. $\lambda=-1\Rightarrow$ 非零斜对称矩阵.

(不变子空间)精减：W为V子空间，$\forall\alpha\in W$，$\mathscr{A}\alpha\in W$，则W为$\mathscr{A}$的不变子空间（$\mathscr{A}$-子空间）

$\mathrm{Ker}\mathscr{A}$，$\mathrm{Im}\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$的特征子空间都是$\mathscr{A}$-子空间

若$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$可交换，则$\mathrm{Ker}\mathscr{B}$，$\mathrm{Im}\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$的特征子空间都是$\mathscr{A}$-子空间（特别地，$\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$）

例 22 设 V 是域 F 上 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：$\boldsymbol{A}$ 是幂等变换的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

证明 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是幂等变换 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$.

考虑域 F 上的一元多项式 $f(x)=x(x-1)$，由于 $(x,x-1)=1$，因此据本节定理 2 得，$\mathrm{Ker}\, f(\boldsymbol{A})=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$，从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\text{ 是幂等变换}&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\\&\Leftrightarrow f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}\\&\Leftrightarrow V=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\\&\Leftrightarrow \dim V=\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})+\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}))\\&\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.\end{aligned}$$

其中倒数第二个"$\Leftrightarrow$"的"$\Leftarrow$"理由是：$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 是直和，因此 $\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}))=\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})+\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}))$。于是 $\dim V=\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}))$。从而 $V=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$。■

应用 (s=2)

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为分块对角矩阵(3)当且仅当 V 能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的非平凡不变子空间的直和：$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，并且 A_i 是 $\boldsymbol{A}|W_i$ 在 W_i 的一个基下的矩阵。■

定理 3 设 V 是域 F 上的线性空间(可以是无限维的)，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换，在 $F[x]$ 中，

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x), \tag{6}$$

其中 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素，则

$$\mathrm{Ker}\, f(\boldsymbol{A})=\mathrm{Ker}\, f_1(\boldsymbol{A})\oplus\mathrm{Ker}\, f_2(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\, f_s(\boldsymbol{A}). \tag{7}$$

Hamilton-Cayley定理：A的特征多项式为$\varphi_A(\lambda)$，则$\varphi_A(A)=0$（A的特征多项式为零化多项式）

根子空间分解：如果 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素，$r_i>0,i=1,2,\cdots,s$。则

$$V=\mathrm{Ker}((\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})^{r_1})\oplus\mathrm{Ker}((\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^{r_2})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}((\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I})^{r_s}),$$

其中 $\mathrm{Ker}((\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{r_j}),j=1,2,\cdots,s$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间。

题目： **例 3** 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 V 上的线性变换，证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个公共的特征向量。——一类降维思想。

取不变子空间上的限制，

取A的特征值λ_0，其对应的特征子空间为$V_{\lambda_0}=\{\xi\in V\mid A\xi=\lambda_0\xi\}$.

取$\alpha\in V_{\lambda_0}$，有$A\alpha=\lambda_0\alpha \overset{B}{\Rightarrow} B(A\alpha)=\lambda_0 B\alpha$ 则$\mathscr{A}(B\alpha)=\lambda_0(B\alpha)\Rightarrow B\alpha\in V_{\lambda_0}$，则$V_{\lambda_0}$为$B$不变子空间.

取B的限制$B|_{V_{\lambda_0}}$，其为V_{λ_0}上线性变换，一定$\exists$特征值$\mu_0\Rightarrow\exists\xi\in V_{\lambda_0}$ s.t. $B|_{V_{\lambda_0}}(\xi)=\mu_0\xi$ 则$B\xi=\mu_0\xi$，又$\xi\in V_{\lambda_0}$，所以有$\mathscr{A}\xi=\lambda_0\xi$，即$\xi$为二者共同特征向量，证毕.

例 12 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，V 上线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}a&1&0&\cdots&0&0\\0&a&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&1\\0&0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}.$$

(1) 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间 W 有向量 α_n，则 $W=V$；——从已知向量出发，向下递推找关系.

(2) 证明：α_1 属于 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个非零不变子空间；若有α_s，一定有$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$

(3) 证明：V 不能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和；

(4) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有不变子空间。

(1) **证明** 由于 $\alpha_n\in W$，因此 $\boldsymbol{A}\alpha_n=\alpha_{n-1}+a\alpha_n\in W$。从而 $\alpha_{n-1}\in W$，于是 $\boldsymbol{A}\alpha_{n-1}=\alpha_{n-2}+a\alpha_{n-1}\in W$。从而 $\alpha_{n-2}\in W$。依此类推，可得，$\alpha_{n-3}\in W,\cdots,\alpha_1\in W$。因此 $W=V$。

(2) **证明** 设 W 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一非零不变子空间。取 $\beta\in W$，且 $\beta\neq 0$，设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，其中 $k_s\neq 0$。由于 $\boldsymbol{A}\beta\in W$，因此

$$k_1a\alpha_1+k_2(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_{s-1}+a\alpha_s)=a\beta+(k_2\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-1})\in W.$$

由此得出，$k_2\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-1}\in W$。用 $\boldsymbol{A}$ 作用，得

$$k_2a\alpha_1+k_3(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_{s-2}+a\alpha_{s-1})\in W.$$

由此得出，$k_3\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_{s-2}\in W$。依次用 $\boldsymbol{A}$ 作用，最后可得 $k_s\alpha_1\in W$，由于 $k_s\neq 0$，因此 $\alpha_1\in W$。

(3) **证明** 由第(2)小题得，$\boldsymbol{A}$ 的任意两个非零不变子空间含有公共向量 α_1，从而立得结论。

(4) **解** 设 W 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零不变子空间，$\dim W=m$。在 W 中取一个基 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。设

$$\beta_2=k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2s}\alpha_s,$$
$$\cdots$$
$$\beta_m=k_{m1}\alpha_1+k_{m2}\alpha_2+\cdots+k_{ms}\alpha_s,$$

其中 $k_{2s},\cdots,k_{ms}$ 不全为 0，不妨设 $k_{2s}\neq 0$。由于 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，因此 $m\leqslant s$。由于 $\boldsymbol{A}\beta_2\in W$，因此

$$\begin{aligned}&k_{21}a\alpha_1+k_{22}(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_{2s}(\alpha_{s-1}+a\alpha_s)\\=&a\beta_2+k_{22}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1}\in W.\end{aligned}$$

由此推出，$k_{22}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1}\in W$。考虑它在 $\boldsymbol{A}$ 下的象，得

$$\begin{aligned}&k_{22}a\alpha_1+k_{23}(\alpha_1+a\alpha_2)+\cdots+k_{2s}(\alpha_{s-2}+a\alpha_{s-1})\\=&a(k_{22}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-1})+k_{23}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-2}\in W.\end{aligned}$$

由此推出，$k_{23}\alpha_1+\cdots+k_{2s}\alpha_{s-2}\in W$。$\boldsymbol{A}$ 继续作用下去，可得 $k_{2,s-1}\alpha_1+k_{2s}\alpha_2\in W$。于是 $k_{2s}\alpha_2\in W$。由于 $k_{2s}\neq 0$，因此 $\alpha_2\in W$。在上面用 $\boldsymbol{A}$ 作用的倒数第二步可得，$k_{2,s-2}\alpha_1+k_{2,s-1}\alpha_2+k_{2s}\alpha_3\in W$，由此得出，$k_{2s}\alpha_3\in W$，从而 $\alpha_3\in W$。依次返回上去，可得 $\alpha_4\in W,\cdots,\alpha_{s-1}\in W$，再从 β_2 的表达式可得 $\alpha_s\in W$。于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 可由 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出。从而 $s\leqslant m$。又由于 $m\leqslant s$，因此 $s=m$。于是

$$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle.$$

由于 $\boldsymbol{A}\alpha_1=a\alpha_1\in W,\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1+a\alpha_2\in W,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_m=\alpha_{m-1}+a\alpha_m\in W$，因此 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$ 的确是 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间。

这证明了：若 $\boldsymbol{A}$ 的非零不变子空间 W 的维数为 m，则 $W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle$。从而 $\boldsymbol{A}$ 的所有不变子空间为

$$0,\langle\alpha_1\rangle,\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle,\cdots,\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\rangle,V,$$

一共有 $n+1$ 个。

类似

例 22 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实数域上奇数维线性空间 V 上的线性变换。证明：如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必有公共特征向量。 P413

$\varphi_A(\lambda)$为奇数次多项式，一定有实根，即A有特征值λ_0，后续过程不能取限制$B|_{V_{\lambda_0}}$，未知有无λ

因为此实根对应的$W_0=\mathrm{Ker}(\lambda_0 I-A)^{r_0}$奇数维，可取$B|_{W_0}$一定有特征值$\lambda_1$，再取$(\mathscr{A}|_{W_0})|_{V_{\lambda_1}}$，

则有公共特征向量.

例 20 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换，$\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}&&&a_1\\&0&a_2&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\a_{n-1}&&0&\\a_n&&&\end{pmatrix}.$$

直接计算

试问：V 是否可以分解成 $\boldsymbol{A}$ 的 2 维或 1 维不变子空间的直和？

解 $\boldsymbol{A}\alpha_1=a_n\alpha_n,\boldsymbol{A}\alpha_2=a_{n-1}\alpha_{n-1},\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_{n-1}=a_2\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_n=a_1\alpha_1$.

于是

$$\langle\alpha_1,\alpha_n\rangle,\langle\alpha_2,\alpha_{n-1}\rangle,\cdots,\langle\alpha_i,\alpha_{n-i+1}\rangle,\cdots$$

都是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 维不变子空间。

情形 1 $n=2m$，由上述得

$$\langle\alpha_1,\alpha_{2m}\rangle,\langle\alpha_2,\alpha_{2m-1}\rangle,\cdots,\langle\alpha_m,\alpha_{m+1}\rangle$$

都是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 维不变子空间，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2m}$ 是 V 的一个基，因此

$$V=\langle\alpha_1,\alpha_{2m}\rangle\oplus\langle\alpha_2,\alpha_{2m-1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\alpha_m,\alpha_{m+1}\rangle.$$

情形 2 $n=2m+1$，由上述得

$$\langle\alpha_1,\alpha_{2m+1}\rangle,\langle\alpha_2,\alpha_{2m}\rangle,\cdots,\langle\alpha_m,\alpha_{m+2}\rangle,\langle\alpha_{m+1}\rangle$$

都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，因此

$$V=\langle\alpha_1,\alpha_{2m+1}\rangle\oplus\langle\alpha_2,\alpha_{2m}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\alpha_m,\alpha_{m+2}\rangle\oplus\langle\alpha_{m+1}\rangle.$$

例 18 设 U 是过原点 O 的一个平面上所有定位向量组成的线性空间，σ 是这个平面绕点 O 转角为 θ 的旋转，其中 $\theta\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$。证明：$\sigma$ 没有非平凡的不变子空间。

证明 U 是实数域上的 2 维线性空间，由于 $\theta\neq k\pi$，因此 U 中任一非零向量都不是旋转 σ 的特征向量。据本节命题 4 得，σ 没有 1 维的不变子空间，因此 σ 没有非平凡的不变子空间。■

—维不变子空间：$\langle\xi\rangle$，ξ为$\mathscr{A}$的特征向量.

例 26 设 A,B 分别是 n 级，m 级复矩阵。证明：矩阵方程 $AX-XB=0$ 只有零解的充分必要条件是 A 与 B 没有公共的特征值。

证明 必要性。假设 A 与 B 有公共的特征值 λ_0，则存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$。由于

$$|\lambda_0 I-B'|=|(\lambda_0 I-B)'|=|\lambda_0 I-B|=0,$$

因此 λ_0 也是 B' 的一个特征值，从而存在 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{C}^m$ 且 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，使得 $B'\boldsymbol{\beta} = \lambda_0 \boldsymbol{\beta}$。于是 $\boldsymbol{\beta}' B = \lambda_0 \boldsymbol{\beta}'$。从而

$$A(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}') - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')B = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}\lambda_0\boldsymbol{\beta}' = 0.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 是矩阵方程 $AX - XB = 0$ 的一个解。

由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 的某个分量 $a_i \neq 0$，$\boldsymbol{\beta}$ 的某个分量 $b_j \neq 0$。从而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的 (i,j) 元 $a_i b_j \neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' \neq 0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 是 $AX - XB = 0$ 的一个非零解。

充分性。设 A 与 B 没有公共的特征值，则 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 B 的特征多项式 $g(\lambda)$ 没有公共的复根，从而 $f(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 在 $\mathbf{C}[\lambda]$ 中互素。于是存在 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]$，使得 $u(\lambda)f(\lambda) + v(\lambda)g(\lambda) = 1$，$x$ 用 A 代入，得

常见于题干中说明二者有无公共根的情况.

$$u(A)f(A) + v(A)g(A) = I.$$

用Bezout等式☆.

由于 $f(A) = 0$，因此 $g(A)$ 可逆。设 $n \times m$ 级复矩阵 C 是矩阵方程 $AX - XB = 0$ 的一个解，则 $AC = CB$。设

$$g(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0,$$

则

$$\begin{aligned} g(A)C &= (A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I)C \\ &= C(B^m + b_{m-1}B^{m-1} + \cdots + b_1 B + b_0 I) \\ &= Cg(B) = C \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

两边左乘 $g(A)^{-1}$，即得 $C = 0$，因此 $AX - XB = 0$ 只有零解。■

1. 对于复数域上 3 级矩阵 A，令 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha}$，$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^3$，求 $\mathbf{C}^3$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的所有不变子空间：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix}.$$

不变子空间为特征子空间的组合直和

1. A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)[\lambda - (1+\mathrm{i})][\lambda - (1-\mathrm{i})],$$

因此 A 的全部特征值是 $2, 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$。

分别解齐次线性方程组 $(2I - A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$，$[(1+\mathrm{i})I - A]\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$，求出它们的一个基础解系，由此得出 A 的全部特征子空间如下：

$$V_2 = \langle (2, -1, -1)' \rangle,$$
$$V_{1+\mathrm{i}} = \langle (1 - 2\mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}, -2)' \rangle,$$
$$V_{1-\mathrm{i}} = \langle (1 + 2\mathrm{i}, -1 - \mathrm{i}, -2)' \rangle,$$

容易看出，$\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbf{C}^3$ 的标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵是 A，于是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征子空间就是 V_2，$V_{1+\mathrm{i}}, V_{1-\mathrm{i}}$。

据本节例 14 的结论得，$\boldsymbol{A}$ 的所有不变子空间为

$$0, V_2, V_{1+\mathrm{i}}, V_{1-\mathrm{i}}, V_2 \oplus V_{1+\mathrm{i}}, V_2 \oplus V_{1-\mathrm{i}}$$
$$V_{1+\mathrm{i}} \oplus V_{1-\mathrm{i}}, \mathbf{C}^3.$$

10. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，char $F \neq 2$。$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：

(1) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = n + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I})$；

(2) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I}) = 2n + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^4 - \boldsymbol{I})$。

互素多项式可用定理 $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_1) \oplus \mathrm{Ker}(f_2)$

$f = f_1 f_2$ 互素.

(1) 有 $(x-1, x+1) = 1$. 则有 $\mathrm{Ker}(A^2 - I) = \mathrm{Ker}(A - I) \oplus \mathrm{Ker}(A + I) \Rightarrow n - \mathrm{rank}(A^2 - I) = 2n - \mathrm{rank}(A + I) - \mathrm{rank}(A - I)$ 证毕

(2) 同理

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是特征不为 2 的域 F 上的线性空间 V 上的一个线性变换。证明：如果 $\boldsymbol{A}^2$ 有一个特征值 λ_0^2，那么 λ_0 或 $-\lambda_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。

为什么不是 $\lambda_0, -\lambda_0$ 均为其特征值?

A: 有 $\mathrm{Ker}(A^2 - \lambda_0^2 I) \neq 0$. 则不能保证 $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$ 与 $\mathrm{Ker}(A + \lambda_0 I)$ 均非0. 只能用"λ_0 或 $-\lambda_0$"

(最小多项式) 精减：最小多项式为deg最小，首一的零化多项式.

$d(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 的根相同(重数可以不同)

相似矩阵的最小多项式相同.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换，如果 V 能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的一些非平凡不变子空间的直和：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s, \tag{2}$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)], \tag{3}$$

其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $\boldsymbol{A}|W_j$ 的最小多项式，$j = 1, 2, \cdots, s$；$[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$ 是 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的最小公倍式。

推论 4 设 A 是域 F 上一个 n 级分块对角矩阵，即 $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$，设 A_j 的最小多项式是 $m_j(\lambda)$，$j = 1, 2, \cdots, s$。则 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)].$$

定义 2 域 F 上的一个 r 级矩阵如果形如

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}, \tag{1}$$

那么称它为一个 r 级 **Jordan 块**，记作 $J_r(a)$，其中 a 是主对角线上的元素。

特别地，1 级 Jordan 块 $J_1(a)$ 就是 1 级矩阵 (a)。

命题 6 主对角元为 a 的 r 级 Jordan 块 $J_r(a)$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 等于它的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - a)^r$。

由此可得Jordan形矩阵的最小多项式 $(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ m_i 为 λ_i 对应块的最大阶数

推论5: $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 能分解为不同的一次因式的乘积

推论6: $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对 $\mathcal{A}$ 的非平凡子空间 W, $\mathcal{A}|_W$ 可对角化

推论: $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{l_s}$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不等. 则 $V = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1 \mathcal{I})^{l_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_s \mathcal{I})^{l_s}$

例 2 求下列数域 K 上的矩阵的最小多项式，并且判断它们是否可对角化。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(2) $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$。

均不能分为不同一次因式乘积

解 (1) A 是由 Jordan 块 $J_2(1)$ 和 $J_1(1)$ 组成的 Jordan 形矩阵，因此 A 的最小多项式 $m(\lambda) = [(\lambda-1)^2, (\lambda-1)] = (\lambda-1)^2$。$A$ 不可对角化。

(2) 直接计算得，$B^2 = 0$。但 $B \neq 0$，因此 B 的最小多项式 $m(\lambda) = \lambda^2$，B 不可对角化。

$\Longleftrightarrow$

能分解

例 4 设数域 K 上的 n 级矩阵 A 满足

$$A^3 = 3A^2 + A - 3I,$$

判断 A 是否可对角化。

解 由于 $A^3 - 3A^2 - A + 3I = 0$，因此 $g(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$ 是 A 的一个零化多项式。由于

$$g(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3) - (\lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1),$$

且 A 的最小多项式 $m(\lambda) \mid g(\lambda)$，因此 $m(\lambda)$ 在 $K[\lambda]$ 中可分解成不同的一次因式的乘积。从而 A 可对角化。

不能说 $m(\lambda) = g(\lambda)$ 即使是全一次

因为不知是否均为特征值，

例 10 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上有限维线性空间 V 上的幂零变换，则 $\boldsymbol{B}$ 的幂零指数不超过 V 的维数。

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 的幂零指数为 l。则 $\boldsymbol{B}^l = \mathbf{0}, \boldsymbol{B}^{l-1} \neq \mathbf{0}$，从而存在 $\xi \in V$ 使得 $\boldsymbol{B}^{l-1}\xi \neq 0, \boldsymbol{B}^l\xi = 0$。据 9.1 节的例 13 得，$\xi, \boldsymbol{B}\xi, \boldsymbol{B}^2\xi, \cdots, \boldsymbol{B}^{l-1}\xi$ 线性无关，从而 $l \leqslant \dim V$。■

用符号表示条件

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是实数域上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换，它在 V 的一个基下的矩阵 A 是对称矩阵，A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的所有不同的复根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$。

(1) 求线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$；

(2) 根据 $m(\lambda)$ 在 $\mathbf{R}[\lambda]$ 中的标准分解式，把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的非平凡不变子空间的直和。

解 (1) 由于 A 是实对称矩阵，因此 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的复根都是实数。从而 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $f(\lambda)$ 所有不同的实根。由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $\mathbf{R}$ 中有相同的根。因此 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $m(\lambda)$ 的所有不同的实根。由于实对称矩阵能够正交相似于一个对角矩阵，因此 A 可对角化，从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。于是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为

通过实对称矩阵可对角化确定m(λ)的形式.

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s).$$

(2) 由第(1)小题中 $m(\lambda)$ 在 $\mathbf{R}[\lambda]$ 中的标准分解式得到

$$V=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I}),$$

也就是

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}.$$

例 12 证明：如果域 F 上的 n 级矩阵 A 与 B 都是可对角化的，且 $AB=BA$，那么存在域 F 上一个 n 级可逆矩阵 S，使得 $S^{-1}AS$ 与 $S^{-1}BS$ 都为对角矩阵。

可作为结论记忆.

证明 已知 A 可对角化，设 A 的所有不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其中 λ_i 的重数为 n_i，$i=1,2,\cdots,s$。于是存在域 F 上的一个 n 级可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1I_{n_1},\lambda_2I_{n_2},\cdots,\lambda_sI_{n_s}\}$，记 $D=P^{-1}AP$。令 $G=P^{-1}BP$，由于 $AB=BA$，因此

$$DG=(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=P^{-1}ABP=P^{-1}BAP=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=GD.$$

由于 $D=\operatorname{diag}\{\lambda_1I_{n_1},\lambda_2I_{n_2},\cdots,\lambda_sI_{n_s}\}$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 两两不等，因此据《高等代数学习指导书(上册)》习题 4.5 第 13 题得，$G=\operatorname{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$，其中 B_i 是 n_i 级矩阵，$i=1,2,\cdots,s$。由于 B 可对角化，因此 $G=P^{-1}BP$ 也可对角化。从而 G 的最小多项式 $m_G(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解成不同的一次因式的乘积。设 B_i 的最小多项式为 $m_i(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$m_G(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)].$$

于是 $m_i(\lambda)\mid m_G(\lambda)$，从而 $m_i(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中也可分解成不同的一次因式的乘积，因此 B_i 可对角化，于是存在域 F 上 n_i 级可逆矩阵 Q_i，使得 $Q_i^{-1}B_iQ_i$ 为对角矩阵，$i=1,2,\cdots,s$。令

$$Q=\operatorname{diag}\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_s\},$$

则 $Q^{-1}GQ=\operatorname{diag}\{Q_1^{-1}B_1Q_1,Q_2^{-1}B_2Q_2,\cdots,Q_s^{-1}B_sQ_s\}$ 为对角矩阵。令 $S=PQ$，则

$$\begin{aligned}S^{-1}BS&=Q^{-1}P^{-1}BPQ=Q^{-1}GQ,\\S^{-1}AS&=Q^{-1}P^{-1}APQ=Q^{-1}\operatorname{diag}\{\lambda_1I_{n_1},\lambda_2I_{n_2},\cdots,\lambda_sI_{n_s}\}Q\\&=\operatorname{diag}\{Q_1^{-1}(\lambda_1I_{n_1})Q_1,Q_2^{-1}(\lambda_2I_{n_2})Q_2,\cdots,Q_s^{-1}(\lambda_sI_{n_s})Q_s\}\\&=\operatorname{diag}\{\lambda_1I_{n_1},\lambda_2I_{n_2},\cdots,\lambda_sI_{n_s}\}.\end{aligned}$$

于是 $S^{-1}BS$ 和 $S^{-1}AS$ 都是对角矩阵。 ■

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，那么与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的每一个线性变换 $\boldsymbol{B}$ 能唯一地表示成 $\boldsymbol{A}$ 的一个次数小于 n 的多项式。

经典问题

即证 $I,\cdots,A^{n-1}$ 为 $C(A)$ 中的一组基.

($\dim C(A)=n$ + $I,\cdots,A^{n-1}$ 线性无关)

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，因此由 8.2 节例 7 可得，$\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n$，其中 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$ 表示 V 上与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有线性变换组成的集合，它是 V 的一个子空间。从 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$。由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 在 F 中有相同的根，因此

假如 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 线性相关，那么在 F 中有不全为 0 的元素 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$，使得

$$k_0\boldsymbol{I}+k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{0}.$$

从而 $g(\lambda)=k_0+k_1\lambda+k_2\lambda^2+\cdots+k_{n-1}\lambda^{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式。于是 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$。由此推出 $\deg m(\lambda)\leqslant\deg g(\lambda)\leqslant n-1$。这与 $\deg m(\lambda)=n$ 矛盾，因此 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 线性无关。由于 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n$，因此 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 是 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$ 的一个基，从而若 $\boldsymbol{B}\in\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{B}$ 可以唯一地表示成

$$\boldsymbol{B}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 能唯一地表示成 $\boldsymbol{A}$ 的一个次数小于 n 的多项式。 ■

点评 例 14 的证明的关键有两点：第一点先证如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，那么与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有线性变换组成的子空间 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$ 的维数等于 n，这可从 8.2 节例 7 直接得出；第二点，去证 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 线性无关，由于利用了 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$，因此证明这一点变得很容易。

例 19 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为

$$m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda),\tag{28}$$

其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\cdots,p_s(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的首一不可约多项式，证明：

(1) 如果 $g(\lambda)=p_1^{k_1}(\lambda)p_2^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$，$k_i\geqslant l_i$，$i=1,2,\cdots,s$，那么 $\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$，$j=1,2,\cdots,s$。

⊆ + dim=dim ⇒ =

(2) 记 $W_j=\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$，$j=1,2,\cdots,s$，则对任意正整数 t，有

$$\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A}\mid W_j)=\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A}),\ j=1,2,\cdots,s.$$

证明 (1) 由于 $g(\lambda)=p_1^{k_1}(\lambda)p_2^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$，$k_i\geqslant l_i$，$i=1,2,\cdots,s$，因此 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$，从而 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$。于是

$$V=\operatorname{Ker} p_1^{k_1}(\boldsymbol{A})\oplus\operatorname{Ker} p_2^{k_2}(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker} p_s^{k_s}(\boldsymbol{A}).\tag{29}$$

→ 最小多项式有核空间直和分解

从(28)式得

$$V=\operatorname{Ker} p_1^{l_1}(\boldsymbol{A})\oplus\operatorname{Ker} p_2^{l_2}(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker} p_s^{l_s}(\boldsymbol{A}).\tag{30}$$

任取 $\alpha_j\in\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$，则 $p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})\alpha_j=0$。从而

$$p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})\alpha_j=p_j^{k_j-l_j}(\boldsymbol{A})p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})\alpha_j=0.$$

于是 $\alpha_j\in\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})$，因此 $\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})\subseteq\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})$。

在 $\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$ 中取一个基 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jm_j}$，$j=1,2,\cdots,s$，从(30)式得，把它们合起来是 V 的一个基，把 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jm_j}$ 扩充成 $\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})$ 的一个基，从(29)式得，把扩充后的基合起来也是 V 的一个基，因此不用扩充，即 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jm_j}$ 就是 $\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})$ 的一个基，从而 $\dim(\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A}))=n_j=\dim(\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A}))$。因此

$$\operatorname{Ker} p_j^{k_j}(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A}),\ j=1,2,\cdots,s.\tag{31}$$

(2) $\alpha\in\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A}\mid W_j)\Leftrightarrow\alpha\in W_j$ 且 $p_j^t(\boldsymbol{A}\mid W_j)\alpha=0$

$\Leftrightarrow\ \alpha\in W_j$ 且 $p_j^t(\boldsymbol{A})\alpha=0\ \Leftrightarrow\ \alpha\in\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A})$，

其中最后一步的充分性"$\Leftarrow$"理由如下：若 $t\leqslant l_j$，则从 $p_j^t(\boldsymbol{A})\alpha=0$ 可推出

$$p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})\alpha=p_j^{l_j-t}(\boldsymbol{A})p_j^t(\boldsymbol{A})\alpha=0,$$

于是 $\alpha\in W_j$。若 $t>l_j$，则据第(1)小题的结论得，$\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$，于是从 $\alpha\in\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A})$ 立即得出 $\alpha\in W_j$。由上述推导得

$$\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A}\mid W_j)=\operatorname{Ker} p_j^t(\boldsymbol{A}),\ j=1,2,\cdots,s.\tag{32}$$ ■

若𝒜为F中线性变换.𝒜的特征多项式在F[λ]中标准分解 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不等.则根子空间 $Ker(\lambda_i I-A)^{r_i}$ 的维数等于代数重数r_i

例 24 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换。证明:域 F 上线性空间 $F[\boldsymbol{A}]$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的次数。

由𝒜 凑出的线性变换.
如 $𝒜^2-2𝒜+I$ 等.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^r+b_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0$。由于 $m(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{A}^r=-b_{r-1}\boldsymbol{A}^{r-1}-\cdots-b_1\boldsymbol{A}-b_0\boldsymbol{I}$。从而 $F[\boldsymbol{A}]$ 中任一元素可以由 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{r-1}$ 线性表出。

假如 $k_0\boldsymbol{I}+k_1\boldsymbol{A}+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{A}^{r-1}=\boldsymbol{0}$,令 $g(\lambda)=k_0+k_1\lambda+\cdots+k_{r-1}\lambda^{r-1}$,则 $g(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式。于是 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$。由于 $\deg g(\lambda)\leqslant r-1<\deg m(\lambda)$,因此 $g(\lambda)=0$,从而 $k_0=k_1=\cdots=k_{r-1}=0$。于是 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{r-1}$ 线性无关,因此它是 $F[\boldsymbol{A}]$ 的一个基。从而 $\dim F[\boldsymbol{A}]=r=\deg m(\lambda)$。■

6. 定义 $\mathbf{R}^3$ 到自身的映射 $\boldsymbol{P}_1:(x,y,z)'\longmapsto(x,y,0)'$,$\boldsymbol{P}_1$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换,求 $\boldsymbol{P}_1$ 的最小多项式。

寻找P的性质.

平行于<ε₃>在<ε₁>⊕<ε₂>上的投影.是幂等变换 $(P^2=P)$

9. 设 $A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 是数域 K 上的 n 级矩阵,其中 A_i 是主对角元都为 a_i 的 n_i 级上三角矩阵,$i=1,2,\cdots,s$。证明:A 可对角化当且仅当每个 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是数量矩阵。

先找A能对角化的条件.再凑证明.

充分性显然

必要性:若有A_i非数量矩阵.则对 $f_i(\lambda)=(\lambda-a_i)^{n_i}$.有 $A-a_iI\neq 0\Rightarrow d_i(\lambda)=(\lambda-a_i)^{d_i}$ $d_i>1$

则A的最小多项式 $d(\lambda)=[d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)]$ 中 $\lambda-a_i$ 的幂指数大于1.则A不能对角化.

7. 设 A,B 分别是域 F 上 n 级,m 级矩阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_1(\lambda)$ 与 B 的最小多项式 $m_2(\lambda)$ 互素,那么矩阵方程 $XA=BX$ 只有零解。

多项式互素.直接用Bezout等式.

$\exists u_1(\lambda),u_2(\lambda)\in F[\lambda]$ s.t. $u_1(\lambda)m_1(\lambda)+u_2(\lambda)m_2(\lambda)=1$

则 $u_2(A)\cdot m_2(A)=I$ 则$m_2(A)$可逆. 设 $m_2(\lambda)=\lambda^r+b_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots+b_0$.有 $m_2(A)=A^r+b_{r-1}A^{r-1}+\cdots+b_0$.

设C为XA=BX的解. $CA=BC\Rightarrow Cm_2(A)=CA^r+\cdots+b_0C=m_2(B)C=0\Rightarrow C=0$.

(幂零的Jordan标准形)精炼:

定义 1 若 $\eta\in W$,且存在一个正整数 t 使得,$\boldsymbol{B}^{t-1}\eta\neq0$,$\boldsymbol{B}^t\eta=0$,则称子空间 $\langle\boldsymbol{B}^{t-1}\eta,\boldsymbol{B}^{t-2}\eta,\cdots,\boldsymbol{B}\eta,\eta\rangle$ 是由 η 生成的 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间。

显然,$\boldsymbol{B}$-强循环子空间 $\langle\boldsymbol{B}^{t-1}\eta,\boldsymbol{B}^{t-2}\eta,\cdots,\boldsymbol{B}\eta,\eta\rangle$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间,且 $\boldsymbol{B}^{t-1}\eta,\boldsymbol{B}^{t-2}\eta,\cdots,\boldsymbol{B}\eta,\eta$ 是一个基,$\boldsymbol{B}$ 在这个子空间上的限制在这个基下的矩阵是一个主对角元为 0 的 t 级 Jordan 块 $J_t(0)$。

λ对应的Jordan块的个数 = λ对应的特征子空间的维数 $(\dim Ker(\lambda I-A))$

即几何重数

定理 1 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的幂零变换,其幂零指数为 l。则 W 能分解成 $\dim W_0$ 个 $\boldsymbol{B}$-强循环子空间的直和,其中 W_0 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间。

推论 1 设 B 是域 F 上的 r 级幂零矩阵,其幂零指数为 l,则 B 相似于一个 Jordan 形矩阵,其中每个 Jordan 块的主对角元为 0,且级数不超过 l,Jordan 块的总数为

$$r-\mathrm{rank}(B),\tag{2}$$

t 级 Jordan 块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t)=\mathrm{rank}(B^{t+1})+\mathrm{rank}(B^{t-1})-2\mathrm{rank}(B^t);\tag{3}$$

这个 Jordan 形矩阵称为 B 的 Jordan 标准形,除去 Jordan 块的排列次序外,B 的 Jordan 标准形是唯一的。■

应用

8. 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的幂零变换,其幂零指数为 l。证明:$\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形中一定有 l 级的 Jordan 块,并且求 l 级 Jordan 块的个数。

$N(l)=\mathrm{rank}(B^{l+1})+\mathrm{rank}(B^{l-1})-2\mathrm{rank}(B^l)$
$=\mathrm{rank}(B^{l-1})>0$.

题目:

例 3 证明:域 F 上的 n 级矩阵 B 是幂零矩阵当且仅当 B 有特征值 $0(n$ 重$)$。

证明 必要性。设 B 是域 F 上的 n 级幂零矩阵,其幂零指数为 l,则 B 的最小多项式为 λ^l。由于 B 的最小多项式与 B 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在包含 F 的代数封闭域中有相同的根,因此 $f(\lambda)=\lambda^n$。从而 $f(\lambda)$ 的 n 个根都是 0。于是 B 的特征值是 $0(n$ 重$)$。

$d(\lambda)$与$\varphi(\lambda)$的根相同.

充分性。设域 F 上 n 级矩阵 B 有特征值 $0(n$ 重$)$,则 B 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的 n 个根都是 0,于是 $f(\lambda)=\lambda^n$。从而 $B^n=f(B)=0$。因此 B 是幂零矩阵。■

证明:n阶复矩阵A. $tr(A^k)=0$ $k=1,2,\cdots,n$. ⇔ A幂零.

⇒) 设 A的n个特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.由结论知A相似于上三角阵B.有B的对角元为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

有 $A^k\sim B^k$.即 $tr(A^k)=tr(B^k)$. $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k=0$ $k=1,2,\cdots,n$. 则 $\varphi_A(\lambda)=\lambda^n$.有n重特征值0.由上例知A幂零.

⇐) $\exists t>0$. $A^t=0\Rightarrow\lambda^t$为A零化多项式.由 $d_A(\lambda)$与 $\varphi_A(\lambda)$根相同 $\Rightarrow\varphi_A(\lambda)=\lambda^n$. 有n-1次项系数为 $-tr(A^k)\Rightarrow tr(A^k)=0$.

例 6 证明:如果 n 级复矩阵 A 可对角化,且满足 $\mathrm{tr}(A^k)=0,k=1,2,\cdots,n$,那么 $A=0$。

证明 由于 $\mathrm{tr}(A^k)=0,k=1,2,\cdots,n$,因此据例 4 得,$A$ 是幂零矩阵。又由于 A 可对角化,因此 A 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda$。于是 $A=0$。■

A可对角化: $d_A(\lambda)$为一次因式之积.

例 20 设 A,B 都是数域 K 上的 n 级矩阵,其中 B 是幂零矩阵,且 $AB=BA$,证明:

$$|A+B|=|A|.$$

证明 把 A,B 都看成复数域上的矩阵,由于 $AB=BA$,因此据 9.5 节例 5 得,存在 n 级可逆复矩阵 P,使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵。由于上三角矩阵的主对角元是它的全部特征值,因此 $P^{-1}AP$ 的主对角元是复矩阵 A 全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。由于 B 是幂零矩阵,因此 B 的特征值为 $0(n$ 重$)$,从而 $P^{-1}BP$ 的主对角元都是 0。于是 $P^{-1}AP+P^{-1}BP$ 的主对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,且 $P^{-1}AP+P^{-1}BP$ 仍为上三角矩阵,因此

$$|A+B|=|P^{-1}(A+B)P|=|P^{-1}AP+P^{-1}BP|$$
$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|P^{-1}AP|=|A|.$$ ■

对复矩阵A.B. ∃可逆矩阵P. $P^{-1}AP$.$P^{-1}BP$均为上三角阵.

例 9 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,$n>1$。证明:如果 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=1$,那么 $\boldsymbol{A}$ 是幂零变换或者 $\boldsymbol{A}$ 为可对角化的线性变换;当 $\boldsymbol{A}$ 是幂零变换时,它不可对角化。

根重要的是书写f(λ).

λ^{n-k}的系数为$(-1)^k$·(所有k阶主子式之和)

证明 由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=1<n$,因此根据《高等代数学习指导书(上册)》习题 5.5 的第 17 题得,$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}$,从而 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征子空间 $V_0=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$ 的维数等于 $n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n-1$。

情形 1 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq0$。此时 $f(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}))$。于是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

情形 2 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$。则 $f(\lambda)=\lambda^n$。从而 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$。因此 $\boldsymbol{A}$ 是幂零变换。由于 $\boldsymbol{A}\neq0$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数 $l>1$。从而 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化。$(\dim Ker(0I-A)=n-1\neq n)$ ■

例 12 设 A 是 n 级实矩阵。证明:如果 A 的 1 阶主子式的和与 2 阶主子式的和都等于 0,并且 A 的特征多项式的复根都是实数,那么 A 是幂零矩阵。

证明 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的 $n-1$ 次项系数 b_{n-1} 等于 A 的 1 阶主子式的和与 -1 的乘积;$f(\lambda)$ 的 $n-2$ 次项系数 b_{n-2} 等于 A 的 2 阶主子式的和与 $(-1)^2$ 的乘积。设 $f(\lambda)$ 的 n 个复根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。据 Vieta 公式得

$$b_{n-1}=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n),b_{n-2}=(-1)^2\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}.$$

两种不同表示方式: k阶主子式之和·$(-1)^k$ / Vieta定理.

由已知条件得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0,\quad \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}=0.$$

由于

$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2+2\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2},\tag{8}$$

因此

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=0.\tag{9}$$

由已知条件，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是实数，因此从(9)式得

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

于是 A 有特征值 0（n 重）。据例 3 得，A 是幂零矩阵。■

☆ 相似 $\overset{\checkmark}{\Rightarrow}$ $\varphi(\lambda)$ 相同，$\underset{\times}{\Leftarrow}$

相似 ⇔ Jordan 标准形相同.

例 13 证明：域 F 上两个 3 级幂零矩阵相似当且仅当它们的最小多项式相同。

证明 必要性。根据相似的矩阵有相同的最小多项式立即得出。

充分性。域 F 上 3 级幂零矩阵 B 的幂零指数 $l\leqslant 3$。于是它们的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^3$ 或 λ^2 或 λ。

当 $m(\lambda)=\lambda^3$ 时，$l=3$。据例 10 得，$3\leqslant 1+\operatorname{rank}(B)$。于是 $\operatorname{rank}(B)\geqslant 2$。又由于 B 不可逆，因此 $\operatorname{rank}(B)=2$。从而 B 的 Jordan 标准形中，Jordan 块的总数为 $3-2=1$。于是 B 的 Jordan 标准形为 $J_3(0)$。

当 $m(\lambda)=\lambda^2$ 时，$l=2$。于是 $\operatorname{rank}(B)\geqslant 1$。结合上一段的讨论得，$\operatorname{rank}(B)=1$。从而 B 的 Jordan 标准形中 Jordan 块的总数为 $3-1=2$。于是 B 的 Jordan 标准形为 $\operatorname{diag}\{J_1(0),J_2(0)\}$。

当 $m(\lambda)=\lambda$ 时，$B=0$。

由于 3 级幂零矩阵的最小多项式完全决定了它的 Jordan 标准形，因此如果两个 3 级幂零矩阵有相同的最小多项式，那么它们相似（据相似的对称性和传递性）。■

例 21 设 $\boldsymbol{A}$ 为域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，令

$$V_1=\{\alpha\in V\mid 存在正整数\ r(它依赖于\ \alpha)，使得\ \boldsymbol{A}^r\alpha=0\},$$

$$V_2=\bigcap_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^iV.$$

证明：(1) V_1 和 V_2 都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间；

(2) $\boldsymbol{A}|V_1$ 是 V_1 上的幂零变换，$\boldsymbol{A}|V_2$ 是 V_2 上的可逆变换；

(3) $V=V_1\oplus V_2$。

证明 (1) 据 9.2 节的例 14，存在正整数 m 使得

$$\boldsymbol{A}^mV=\boldsymbol{A}^{m+k}V,k=1,2,3,\cdots.$$

又由于 $\boldsymbol{A}V\supseteq\boldsymbol{A}^2V\supseteq\boldsymbol{A}^3V\supseteq\cdots$，因此 $V_2=\boldsymbol{A}^mV$，即 $V_2=\operatorname{Im}(\boldsymbol{A}^m)$。因此 V_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。

显然 $0\in V_1$，易验证 V_1 对加法和纯量乘法封闭，因此 V_1 是 V 的一个子空间。任取 $\alpha\in V_1$，则存在正整数 r 使得 $\boldsymbol{A}^r\alpha=0$。于是 $\boldsymbol{A}^{r-1}(\boldsymbol{A}\alpha)=0$。从而 $\boldsymbol{A}\alpha\in V_1$。因此 V_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。

(2) 若 $V_1=0$，则由于 $\boldsymbol{A}0=0$，因此 $\boldsymbol{A}|V_1=\boldsymbol{0}$。

若 $V_1\neq 0$，则在 V_1 中取一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$，于是存在正整数 r_i，使得 $\boldsymbol{A}^{r_i}\eta_i=0,i=1,2,\cdots,s$。令 $r=\max\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}$。则 $\boldsymbol{A}^r\eta_i=0,i=1,2,\cdots,s$。任取 $\alpha\in V_1$，设 $\alpha=\sum_{i=1}^{s}k_i\eta_i$，则 $\boldsymbol{A}^r\alpha=\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{A}^r\eta_i=0$，即 $(\boldsymbol{A}\mid V_1)^r\alpha=0$。因此 $(\boldsymbol{A}\mid V_1)^r=\boldsymbol{0}$。从而 $\boldsymbol{A}\mid V_1$ 是 V_1 上的幂零变换。

任取 $\delta\in V_2$，由于 $V_2=\boldsymbol{A}^mV=\boldsymbol{A}^{m+1}V$，因此存在 $\alpha\in V$，使得 $\delta=\boldsymbol{A}^{m+1}\alpha=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^m\alpha)$。由于 $\boldsymbol{A}^m\alpha\in\boldsymbol{A}^mV=V_2$，因此 $\boldsymbol{A}|V_2$ 是 V_2 到自身的满射。由于 V_2 是有限维的，因此 $\boldsymbol{A}|V_2$ 也是 V_2 到自身的单射。从而 $\boldsymbol{A}|V_2$ 是 V_2 到自身的双射。于是 $\boldsymbol{A}|V_2$ 是 V_2 上的可逆变换。

(3) 先证 $V_1\cap V_2=0$。任取 $\beta\in V_1\cap V_2$。由于 $\beta\in V_1$，因此存在正整数 r，使得 $\boldsymbol{A}^r\beta=0$。由于 $\boldsymbol{A}|V_2$ 是 V_2 上的可逆变换，因此 $(\boldsymbol{A}\mid V_2)^r$ 也可逆。由于 $\beta\in V_2$，因此 $(\boldsymbol{A}|V_2)^r\beta=\boldsymbol{A}^r\beta=0$。从而 $\beta=0$。所以 $V_1\cap V_2=0$，于是和 V_1+V_2 是直和 $V_1\oplus V_2$。

显然 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^m\subseteq V_1$。反之，任取 $\alpha\in V_1$，由于 V_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，因此 $\boldsymbol{A}^m\alpha\in V_1$。又显然 $\boldsymbol{A}^m\alpha\in\boldsymbol{A}^mV_1$，即 $\boldsymbol{A}^m\alpha\in V_2$。从而 $\boldsymbol{A}^m\alpha\in V_1\cap V_2$。于是 $\boldsymbol{A}^m\alpha=0$。因此 $\alpha\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^m$。从而 $V_1\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^m$，所以 $V_1=\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^m$。

由于

$$\begin{aligned}\dim(V_1\oplus V_2)&=\dim V_1+\dim V_2\\&=\dim(\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^m)+\dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^m)=\dim V,\end{aligned}$$

因此

$$V=V_1\oplus V_2.$$

■

例 10 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的幂零变换，其幂零指数为 l。证明：

$$l\leqslant 1+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

结论：B幂零，指数为 l，则 rank ≥ l−1

证明 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形中 Jordan 块的总数 N 等于 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，于是最大的 Jordan 块的级数至多是 $n-(N-1)$（此时其他 $N-1$ 个 Jordan 块都是 1 级的）。由于 $\boldsymbol{B}^l=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{B}^k\neq\boldsymbol{0}$，当 $k<l$，因此这个最大的 Jordan 块的 l 次幂等于 0，而 k 次幂不等于 0，当 $k<l$。又由于级数小于或等于 $n-(N-1)$ 的 Jordan 块的 $n-(N-1)$ 次幂一定等于 0，因此 $n-(N-1)\geqslant l$。于是

$$l\leqslant n-(N-1)=n+1-(n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}))=1+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

■

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。证明：如果 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{B}$ 是幂零变换，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。

即 $AB=(B+I)A$　A 为 $(B+I)X=XB$ 的一个解.

B 有 $d_B(\lambda)=\lambda^t$.

$B+I=H$. 则 $(H-I)^t=0$ 即 $(\lambda-1)^t$ 为其零化多项式. $d_H(\lambda)=(\lambda-1)^k$　$k\leq t$

由 $(\lambda,\lambda-1)=1\Rightarrow(\lambda^t,(\lambda-1)^k)=1$ 由结论知方程只有0解. 即 $A=0$.

（线性变换的 Jordan 标准形）精减：

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，如果 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为

对 A 为 n 阶矩阵仍成立

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},\tag{1}$$

那么 V 中存在一个基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 A 为 Jordan 形矩阵，它的主对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 N_j 为

$$N_j=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_jI),\tag{2}$$

个数

其中 t 级 Jordan 块 $J_t(\lambda_j)$ 的个数 $N_j(t)$ 为

各阶个数

$$N_j(t)=\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{t+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{t-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^t,\tag{3}$$

$t\leqslant l_j;j=1,2,\cdots,s$。这个 Jordan 形矩阵 A 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形，除去 Jordan 块的排列次序外，$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的。

F上A有Jordan标准形 ⇔ $d_A(\lambda)$ 能在 $F[\lambda]$ 中分解为一次因式的乘积

⇔ $\varphi_A(\lambda)$ 能在 $F[\lambda]$ 中分解为一次因式的乘积

在C中是自然满足的.

R中不一定. 如 λ^2+1 无法分解.

定义 1 设 A 是域 F 上的 n 级矩阵，如果 A 有 Jordan 标准形 J，那么把 J 中所有 Jordan 块的最小多项式称为 A 的初等因子。

两复矩阵相似 ⇔ 它们有相同的初等因子

定理 2 任意一个非零的 n 级 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 一定相抵于对角 λ-矩阵：

$$\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\},\tag{7}$$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda),i=1,2,\cdots,n-1$；且对于非零的 $d_i(\lambda)$，其首项系数为 1。满足这些要求的对角 λ-矩阵(13)称为 $A(\lambda)$ 的一个**相抵标准形**或 **Smith 标准形**。■

把数域 K 换成任一域 F，定理 2 照样成立。

定义 2 $A(\lambda)$ 的相抵标准形中主对角线上的非零元 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的**不变因子**。

为了直接从 $A(\lambda)$ 本身来刻画它的不变因子，我们在 7.3 节中引进了下述概念。

定义 3 $s\times n$ λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的首一最大公因式称为 $A(\lambda)$ 的 **k 阶行列式因子**，记作 $D_k(\lambda)$，$1\leqslant k\leqslant\min\{s,n\}$。

$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$　$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$ $\cdots d_r(\lambda)=\dfrac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$

相抵的 λ-矩阵有相同的 rank 与 D_k

定义 5 设 $A(\lambda)$ 是 $\mathbf{C}[\lambda]$ 上的 n 级非零矩阵，把 $A(\lambda)$ 的每个次数大于 0 的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂（相同的必须按出现的次数计算）称为 $A(\lambda)$ 的**初等因子**。

A与B相似 ⇔ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵 ⇔ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 有相同Smith标准形

⇔ 相同不变因子组 ⇔ 相同初等因子组

Jordan形矩阵的初等因子完全由其各个块的初等因子组成.

任一复矩阵都与一Jordan形矩阵相似,称之为A的Jordan标准形.

推论 8 数域 K 上 n 级矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 等于 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$。 ■

据(8)式,数域 K 上 n 级矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=D_n(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$。

推论 9 数域 K 上 n 级矩阵 A 与 B 相似当且仅当把它们看成复矩阵后相似。

题目:

例 1 求下列数域 K 上的矩阵 A 的 Jordan 标准形 J:

(1) $\begin{pmatrix}2&3&2\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$;

—主对角元为λ_i的块个数: $N_i=n-\mathrm{rank}(\lambda_i I-A)$

其中t阶块个数: $N_i(t)=\mathrm{rank}(\lambda_i I-A)^{t+1}+\mathrm{rank}(\lambda_i I-A)^{t-1}-2\mathrm{rank}(\lambda_i I-A)^{t}$

~~(3)~~ $\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{pmatrix}$;

(1). 特征多项式: $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

$\mathrm{rank}(A-3I)=2\Rightarrow N_3=3-\mathrm{rank}(A-3I)=1$ 则只有1个主对角元为3的Jordan块. $J=\begin{pmatrix}1&&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix}$

(2). $f(\lambda)=(\lambda-2)^3$. $\mathrm{rank}(A-2I)=1\Rightarrow N_2=3-1=2$. 则 $J=\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$

(4) $f(\lambda)=(\lambda-2)^4$. $\mathrm{rank}(A-2I)=2\Rightarrow N_2=4-2=2$.

$N_2(1)=\mathrm{rank}(A-2I)^2+\mathrm{rank}(A-2I)^0-2\mathrm{rank}(A-2I)^1=0$ 则 $J=\begin{pmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}$

—解线性方程组

例 2 对于例 1 第(1),(2),~~(3)~~,(4)小题中的矩阵 A 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=J$。

(1). $P^{-1}AP=J$. 则 $AP=PJ$. 设 $P=(x_1,x_2,x_3)\Rightarrow A(x_1,x_2,x_3)=(x_1,3x_2,x_2+3x_3)$

即 $(A-I)x_1=0$. $(A-3I)x_2=0$. $(A-3I)x_3=x_2$.

$x_1=(2,0,-1)^T$ $x_2=(1,-1,2)^T$ 一特解为 $x_3=(-1,0,0)^T$ $\Rightarrow P=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&-1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$

(2). 同理. $A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,2x_2,x_2+2x_3)$

即 $(A-2I)x_1=0$. $(A-2I)x_2=0$. $(A-2I)x_3=x_2$.

对 $(A-2I)Y=0\Rightarrow Y=(\frac{1}{2}y_2,y_2,y_3)^T$. 又意 $(A-2I)Y=x_2$ 有解 $\Rightarrow \mathrm{rank}(A-2I)=\mathrm{rank}(\widetilde{A-2I})$ 则 $y_3=\frac{1}{2}y_2$

$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}y_2\\0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}y_2+y_3\end{pmatrix}$

于是可取 $x_2=(1,2,1)^T$ 此时对 $(A-2I)x_3=x_2$ 有特解 $x_3=(-\frac{1}{2},0,0)^T$

故 $P=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

(4). 同理可求.

例 3 对于例 1 中各小题的矩阵 A,写出它的最小多项式。—A的Jordan标准形为J. 有A~J. 相似矩阵的$m(\lambda)$相等.

(1) $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$ (2). $m(\lambda)=[\lambda-2,(\lambda-2)^2]=(\lambda-2)^2$. (4). $m(\lambda)=[(\lambda-2)^2,(\lambda-2)^2]=(\lambda-2)^2$

$J_n(a)\sim J_n(a)^T$. $P=\begin{pmatrix}&&1\\&\iddots&\\1&&\end{pmatrix}$ $P^{-1}J_n(a)P=J_n(a)^T$

例 8 证明:对于任一 n 级复矩阵 A,存在一个可逆的复矩阵 S,使得 $S^{-1}AS=GH$,其中 G,H 都为对称矩阵,且 G 可逆。

证明 由于 A 是复矩阵,因此存在可逆的复矩阵 S,使得 $S^{-1}AS=J$,其中 $J=$ 对于无限制的A. 想到其标准型只有Jordan标准形

$\mathrm{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_m}(\lambda_m)\}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 可能有相同的,$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$。记 $T_{n_i}=(\varepsilon_{n_i},\varepsilon_{n_i-1},\cdots,\varepsilon_2,\varepsilon_1)$,则 $T_{n_i}^2=I_{n_i}$,$T'_{n_i}=T_{n_i}$。从例 4 的证明看出:$T_{n_i}^{-1}J_{n_i}(\lambda_i)T_{n_i}=J_{n_i}(\lambda_i)'$。于是 $T_{n_i}J_{n_i}(\lambda_i)=J_{n_i}(\lambda_i)'T_{n_i}$。由于 $(T_{n_i}J_{n_i}(\lambda_i))'=J_{n_i}(\lambda_i)'T'_{n_i}=T_{n_i}J_{n_i}(\lambda_i)$,因此 $T_{n_i}J_{n_i}(\lambda_i)$ 是对称矩阵。令 $G=\mathrm{diag}\{T_{n_1},T_{n_2},\cdots,T_{n_m}\}$,则 G 是可逆的对称矩阵,且 $G^2=I$。

$$GJ=\mathrm{diag}\{T_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1),T_{n_2}J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,T_{n_m}J_{n_m}(\lambda_m)\}.$$

由于

$$\begin{aligned}(GJ)'&=\mathrm{diag}\{(T_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1))',(T_{n_2}J_{n_2}(\lambda_2))',\cdots,(T_{n_m}J_{n_m}(\lambda_m))'\}\\&=\mathrm{diag}\{T_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1),T_{n_2}J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,T_{n_m}J_{n_m}(\lambda_m)\}\\&=GJ,\end{aligned}$$

因此 GJ 是对称矩阵,记 $H=GJ$,则

$$J=IJ=G^2J=G(GJ)=GH.$$

从而

$$S^{-1}AS=J=GH. \quad ■$$

例 18 证明数域 K 上的 r 级 Jordan 块 $J_r(1)$ 与它的 k 次幂 $J_r(1)^k$ 相似,其中 $2\leqslant k\leqslant r$。 不要被带歪. 相似⇔Jordan标准形相等.

⇔ $J_r(1)$ 为 $J_r^k(1)$ 的Jordan标准形

证明 $J_r(1)^k$ 是主对角元都为 1 的上三角矩阵,因此 $J_r(1)^k$ 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^r$。从而 $J_r(1)^k$ 有 Jordan 标准形 J。J 的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数为 $r-\mathrm{rank}(J_r(1)^k-I)$。由于 $J_r(1)=I+J_r(0)$,因此

$$J_r(1)^k=[I+J_r(0)]^k=I+C_k^1J_r(0)+C_k^2J_r(0)^2+\cdots+C_k^kJ_r(0)^k.$$

于是

$$J_r(1)^k-I=\begin{pmatrix}0&k&C_k^2&C_k^3&\cdots&C_k^k&0&\cdots&0\\0&0&k&C_k^2&\cdots&C_k^{k-1}&C_k^k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&k\\0&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

从而 $\mathrm{rank}(J_r(1)^k-I)=r-1$.

因此 $r-\mathrm{rank}(J_r(1)^k-I)=r-(r-1)=1$.

于是 $J_r(1)^k$ 的 Jordan 标准形 $J=J_r(1)$。所以

$$J_r(1)^k\sim J_r(1).$$

证相似可想到Jordan标准形相等.

例 19 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵。证明:如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^n$,那么 $A\sim A^k$,其中 $k=2,3,\cdots,n$。

证明 由于 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^n$,因此 A 有 Jordan 标准形 $J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(1),J_{r_2}(1),\cdots,J_{r_m}(1)\}$,其中 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$。由于 $A\sim J$,因此 $A^k\sim J^k$,其中 $J^k=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(1)^k,J_{r_2}(1)^k,\cdots,J_{r_m}(1)^k\}$。据例 18 得,$J_{r_i}(1)^k\sim J_{r_i}(1)$,$i=1,2,\cdots,m$。因此 $J^k\sim J$。从而

$$A^k\sim A. \quad ■$$

例 20 设域 F 上的 n 级矩阵 A 有 Jordan 标准形。证明:A 可对角化当且仅当对于 A 的任一特征值 λ_i 有

A与J相似. 则J为对角阵. 则$N_i=N_i(1)$

$$\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^2=\mathrm{rank}(A-\lambda_iI).$$

证明 A 的 Jordan 标准形 J 中,主对角元为 λ_i 的 Jordan 块总数 $N_i=n-\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)$;主对角元为 λ_i 的 1 级 Jordan 块的个数 $N_i(1)$ 为

$$\begin{aligned}N_i(1)&=\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^2+\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^0-2\,\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)\\&=n+\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^2-2\,\mathrm{rank}(A-\lambda_iI).\end{aligned}$$

A 可对角化

$\Leftrightarrow$ 对于 A 的任一特征值 λ_i 有 $N_i=N_i(1)$;

$\Leftrightarrow$ 对于 A 的任一特征值 λ_i,有

$$n-\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)=n+\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^2-2\,\mathrm{rank}(A-\lambda_iI);$$

$\Leftrightarrow$ 对于 A 的任一特征值 λ_i,有

$$\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)=\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)^2. \quad ■$$

例 21 设 A 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。证明:如果 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解成一次因式的乘积,且 $\deg m(\lambda)=n$,那么 A 的 Jordan 标准形 J 中各个 Jordan 块的主对角元互不相同。

$\deg m(\lambda)=n$. 则特征多项式与 $m(\lambda)$ 相同. 为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$. 则 $V=\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I)^{r_1}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(A-\lambda_s I)^{r_s}$

记 $W_i:=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{r_i}$. $B_i=A|_{W_i}-\lambda_i I$ 则 B 为幂零变换且指数为 $r_i \Rightarrow \mathrm{rank}B\geq r_i-1$ 则 $\mathrm{rank}B=r_i-1$.

于是 B 的 Jordan 块个数为 $r_i-(r_i-1)=1$. $J_{r_i}(0)$. $\Rightarrow A|_{W_i}$ 对应 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 只有1个块. 于是各不相同. 证毕.

例 25 设 a 是域 F 中非零元,求 $J_r(a)^2$ 的 Jordan 标准形。

解 $J_r(a)=aI+J_r(0)$。于是

$$[J_r(a)]^2=[aI+J_r(0)]^2=a^2I+2aJ_r(0)+J_r(0)^2.$$

从而 $J_r(a)^2$ 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-a^2)^r$。于是 $J_r(a)^2$ 有 Jordan 标准形 J。由于 $a\neq0$,因此 $\mathrm{rank}(J_r(a)^2-a^2I)=\mathrm{rank}(2aJ_r(0)+J_r(0)^2)=r-1$。从而 J 中主对角元为 a^2 的 Jordan 块总数为 $r-(r-1)=1$。因此 $J=J_r(a^2)$。即 $J_r(a)^2$ 的 Jordan 标准形为 $J_r(a^2)$。

— 结论: $J_r^2(a)\sim J_r(a^2)$

可用于找 $A\sim J_r(a^2)$ 的平方根.

☆ 任意可逆复矩阵都有平方根

例 28 设数域 K 上的 3 级矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{bmatrix}.$$

试问:A 是否有平方根?如果有,求出 A 的一个平方根。

不可逆矩阵也可能有平方根.☆

(平方根不唯一)

$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3$. $\mathrm{rank}(A-0I)=1\Rightarrow N_0=3-1=2$. 则 $J=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&1&0\end{pmatrix}$

设 P 为可逆矩阵. $P^{-1}AP=J\Rightarrow A(X_1,X_2,X_3)=(0,0,X_2)$.

对 $AX=0\Rightarrow X_1=(0,0,1)^T$. $X_2=(1,2,1)^T$

则 $AX=X_2\Rightarrow X_3=(-\frac{1}{2},0,0)^T$

故 $P=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$. $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ 已有 $A=PJP^{-1}$

下面找 J 的平方根. 由结论: $J_{2m}^2(0)\sim\mathrm{diag}(J_m(0),J_m(0))$

$J_{2m+1}^2(0)\sim\mathrm{diag}(J_m(0),J_{m+1}(0))$

知 $J_3^2(0)\sim J$. 寻找 S. $S^{-1}J_3^2(0)S=J$.

即 $J_3^2(0)S=SJ\Rightarrow J_3^2(0)(Y_1,Y_2,Y_3)=(0,0,Y_2)$.

对 $J_3^2(0)Y=0\Rightarrow Y_1=(0,1,0)^T$. $Y_2=(1,0,0)^T$. → 不能调换, 否则 Y_3 无解

对 $J_3^2(0)Y=Y_2\Rightarrow Y_3=(0,0,1)^T$ 则 $S=\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$ $S^{-1}=\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$ 则 $A=PSJ_3^2(0)S^{-1}P^{-1}=(PSJ_3(0)S^{-1}P^{-1})^2$ 则 $PSJ_3(0)S^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\0&-1&2\\-2&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ 为 A 的平方根.

例 33 设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解成一次因式的乘积,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值。证明:$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 J 恰好由 s 个 Jordan 块组成当且仅当对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_j 有 $\dim V_{\lambda_j}=1$。

证明 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 J 中,主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数为

$$\begin{aligned}n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})&=n-\dim(\mathrm{Im}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}))\\&=\dim\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})=\dim V_{\lambda_j}.\end{aligned}$$

因此,$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 J 恰好由 s 个 Jordan 块组成

$\Leftrightarrow$ J 中主对角元为 λ_j 的 Jordan 块恰有 1 个,$j=1,2,\cdots,s$

$\Leftrightarrow$ $\dim V_{\lambda_j}=1$,$j=1,2,\cdots,s$。 ■

4. 设 A 是 n 级复矩阵,$n>1$。如果 $\mathrm{rank}(A)=1$,求 A 的 Jordan 标准形。

☆. 4. 由于 $\mathrm{rank}(A)=1<n$,因此根据《高等代数学习指导书(上册)》习题 5.5 的第 17 题得,A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n-\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}$。从而 A 有特征值 0。由于 $\mathrm{rank}(A-0I)=1$,因此 A 的 Jordan 标准形 J 中主对角元为 0 的 Jordan 块总数为 $n-1$。

情形 1 $\mathrm{tr}(A)=0$,则 $f(\lambda)=\lambda^n$,于是 A 的 Jordan 标准形 J 中 Jordan 块的主对角元均为 0。从而

$$J=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\underbrace{(0),(0),\cdots,(0)}_{(n-2)\text{个}}\right\}.$$

情形 2 $\mathrm{tr}(A)\neq0$。则 $f(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-\mathrm{tr}(A))$。从而 A 有一个非 0 的特征值 $\mathrm{tr}(A)$,且它的代数重数为 1。于是

$$J=\mathrm{diag}\{(\mathrm{tr}(A)),\underbrace{(0),(0),\cdots,(0)}_{(n-1)\text{个}}\}.$$

9. 设 $1<k<n$,求 $J_n(0)^k$ 的 Jordan 标准形。

$M=J_n^k(0)$. $\mathrm{rank}M^j=n-jk$.

表:

j	1	2	⋯	m	$m+1$	⋯
rank	$n-k$	$n-2k$	⋯	$n-mk$	0	⋯
d		k	⋯	k	$n-mk$	⋯
δ		0	⋯	$(m+1)k-n$	$n-mk$	0 ⋯

☆表格法☆

若 $n=mk$. 则有 k 个 m 阶 Jordan 块

若 $n=mk+r$ 则有 $k-r$ 个 m 阶块, r 个 $m+1$ 阶块

本质上是证明 $J_r^k(a)\sim J_r(a^k)$

13. 证明:任一 n 级可逆复矩阵 A 都有 k 次方根,其中 k 是任一正整数(即存在 n 级复矩阵 B 使得 $B^k=A$)。

13. 先证对于任一非零复数 a,$J_r(a)^k$ 的 Jordan 标准形为 $J_r(a^k)$。当 $k=1$ 时,结论显然成立。下面设 $k\geq2$。

$$[J_r(a)]^k=[aI+J_r(0)]^k=a^kI+C_k^1a^{k-1}J_r(0)+\cdots+J_r(0)^k.$$

从而 $[J_r(a)]^k$ 的特征值为 a^k(r 重)。由于 $a\neq0$,因此

$$\mathrm{rank}[J_r(a)^k-a^kI]=\mathrm{rank}[C_k^1a^{k-1}J_r(0)+\cdots+J_r(0)^k]=r-1.$$

于是 $J_r(a)^k$ 的 Jordan 标准形只有一个 Jordan 块 $J_r(a^k)$。因此 $J_r(a)^k\sim J_r(a^k)$。

14. 设

$$B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}\in M_n(\mathbf{C}),$$

☆: $J_n(a)\sim J_n(a)^T$. $P=\begin{pmatrix}&&1\\&\iddots&\\1&&\end{pmatrix}$ $P^{-1}J_n(a)P=J_n(a)^T$

令 $S=\frac{1}{\sqrt{2}}(I+\mathrm{i}B)$。对于 Jordan 块 $J_n(a)\in M_n(\mathbf{C})$,证明:

$$SJ_n(a)S^{-1}=aI+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[E_{k,k+1}+E_{k+1,k}+\mathrm{i}(E_{n-k+1,k+1}-E_{n-k,k})].$$

15. 证明:每一个 n 级复矩阵相似于一个对称矩阵。

$A\sim J\sim SJS^{-1}$ ← 第14题中

2. 设 A,B 都是 $n\times m$ 实矩阵，用 W 表示 $B'X=0$ 的解空间，取 W 的一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$，令 $C=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)$，用 U_1,U_2 分别表示 A,B 的列空间。证明：如果 $U_1\cap U_2=0$，那么 $A'C$ 的列空间 V_2 与 A' 的列空间 V_1 相等。

2. **证明** 由于 $A'C$ 的列向量组可以由 A' 的列向量组线性表出，因此 $V_2\subseteq V_1$。下面来证 $\dim V_2=\dim V_1$。

$$A'C = A'(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r) = (A'\eta_1,A'\eta_2,\cdots,A'\eta_r).$$

对于任意 $\alpha\in W$，有 $\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_r\eta_r$。于是

$$A'\alpha = k_1A'\eta_1+k_2A'\eta_2+\cdots+k_rA'\eta_r\in V_2.$$

反之，对于 V_2 中任一向量 γ，有

$$\gamma = a_1A'\eta_1+a_2A'\eta_2+\cdots+a_rA'\eta_r = A'(a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_r\eta_r).$$

因此 $V_2=\{A'\alpha\mid\alpha\in W\}$。令 $\boldsymbol{A}(\alpha)=A'\alpha$，$\forall\alpha\in W$，则 $\boldsymbol{A}W=V_2$。据第 1 题得，$\boldsymbol{A}$ 是 W 到 V_1 的一个线性映射，且

$$\begin{aligned}\dim V_2 &= \dim(\boldsymbol{A}W) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}A'\\B'\end{pmatrix}-\operatorname{rank}B'\\ &= \operatorname{rank}[(A\quad B)']-\operatorname{rank}B\\ &= \operatorname{rank}(A\quad B)-\operatorname{rank}B.\end{aligned}$$

设 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$；$B$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。则 $(A\quad B)$ 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。由于 $U_1=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle$，$U_2=\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle$，且 $U_1\cap U_2=0$，因此

$$\begin{aligned}\dim U_1+\dim U_2 &= \dim(U_1+U_2)\\ &= \dim(\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle)\\ &= \operatorname{rank}(A\quad B).\end{aligned}$$

从而 $\operatorname{rank}(A\quad B)=\dim U_1+\dim U_2=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

于是

$$\begin{aligned}\dim V_2 &= \operatorname{rank}(A\quad B)-\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A\\ &= \operatorname{rank}A'=\dim V_1.\end{aligned}$$

因此 $V_2=V_1$。

7. 设 a 是任一给定的复数，对于 l 级 Jordan 块 $J_l(a)$，求 $e^{J_l(a)}$ 的特征值。

8. 设 A 是 n 级复矩阵，它的全部特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。证明：$e^A$ 的全部特征是 $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\cdots,e^{\lambda_n}$。

9. 设 A 是 n 级复矩阵，求 e^A 的行列式。

7. $e^{J_l(a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_l^n(a)}{n!}$ 主对角元为 $1+a+\frac{a^2}{2}+\cdots=e^a$ 的上三角阵，则特征值为 e^a，l重特征值.

8. $e^{P^{-1}JP}=P^{-1}e^JP$ 即 $e^A\sim e^J$，由7知证毕

9. $|e^A|=\prod\lambda_A=e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=e^{tr(A)}$

10. 设数域中的 3 级矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{bmatrix}.$$

求 e^A。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$. 有 $N_1=n-\operatorname{rank}(I-A)=1\Rightarrow J=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=J\Rightarrow A(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_1+x_2,x_2+x_3)\Rightarrow P=\begin{pmatrix}3&3&4\\1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-4&7\\1&3&-6\end{pmatrix}$

有 $J^m=(I+J_3(0))^m=I^m+mI^{m-1}J_3(0)+\frac{m(m-1)}{2}I^{m-2}J_3^2(0)=\begin{pmatrix}1&m&\frac{m(m-1)}{2}\\&1&m\\&&1\end{pmatrix}$

则 $e^J=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J^m}{m!}=\begin{pmatrix}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m!}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)}{2m!}\\0&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m!}\\0&0&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&e&\frac{1}{2}e\\&e&e\\&&e\end{pmatrix}$ 有 $e^A=e^{PJP^{-1}}=Pe^JP^{-1}=e\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&-6\\-\frac{3}{2}&-\frac{9}{2}&10\\-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&5\end{pmatrix}$

矩阵指数相关问题

第十章 有度量的线性空间

(双线性函数)精减：

定义 1 设 V 是域 F 上的一个线性空间，$V\times V$ 到 F 的一个映射 f 如果满足对于任意 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\alpha,\beta\in V$，$k_1,k_2\in F$，有

(i) $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$；

(ii) $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$，

那么称 f 是 V 上的一个双线性函数，f 也可写成 $f(\alpha,\beta)$。

条件(i)表明：当 β 固定时，映射 $\alpha\longmapsto f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个线性函数，记作 β_R。

条件(ii)表明：当 α 固定时，映射 $\beta\longmapsto f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个线性函数，记作 α_L。

f 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的度量矩阵：$\begin{pmatrix}f(\alpha_1,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_1,\alpha_n)\\\vdots&&\vdots\\f(\alpha_n,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$

三、双线性函数在不同基下的度量矩阵之间的关系

定理 1 设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数，V 中取两个基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，设

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P, \tag{6}$$

f 在这两个基下的度量矩阵分别为 A,B，则

$$B=P^TAP. \tag{7}$$

难追忆：$f=x^TAy$ 中 A 是度量矩阵

例 24 设 A,B 都是 n 级正定矩阵。证明：AB 的特征值都是正数。

证明 由于 A,B 都是 n 级正定矩阵，因此存在 n 级实可逆矩阵 P,Q，使得

$$A=P'IP=P'P,\ B=Q'IQ=Q'Q.$$

于是 $AB=P'PQ'Q$。由于 $P'(PQ'Q)$ 与 $(PQ'Q)P'$ 有相同的非零特征值，且 $(PQ'Q)P'=(QP')'(QP')$ 是正定矩阵，因此 $P'(PQ'Q)$ 的非零特征值都是正数。又由于 $P'(PQ'Q)$ 可逆，因此 0 不是它的特征值。从而 $P'(PQ'Q)$ 的特征值都是正数。即 AB 的特征值都是正数。 ■

(正交投影，正交补)精减：正交补：$S^\perp=\{\alpha\in V\mid(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in S\}$ $V=S\oplus S^\perp$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in S$，$\alpha_2\in S^\perp$ $\alpha_1=P_S(\alpha)$ 称为 α 在 S 上的正交投影)

$\alpha-P(\alpha)\in S^\perp$

若 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 为 S 的一个标准正交基，则 α 在 U 上的正交投影 α_1 为 $\alpha_1=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$

题目：对 $\forall\alpha\in V$，若 $\exists\delta\in U$，$d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\gamma)$，$\forall\gamma\in U$，则称 δ 为 α 在 U 上的最佳逼近元.

例 5 设 U 是实内积空间 V 的一个有限维子空间。证明：V 在 U 上的正交投影 $\boldsymbol{P}$ 具有下述性质：

$$(\boldsymbol{P}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{P}\beta),\ \forall\alpha,\beta\in V.$$

—从正交投影的基础性质出发.
即 $\alpha-P(\alpha)\in U^\perp$. P 为 V 在 U 上的正交投影.

证明 由于 $\alpha-\boldsymbol{P}\alpha\in U^\perp$，$\beta-\boldsymbol{P}\beta\in U^\perp$，因此

$$0=(\alpha-\boldsymbol{P}\alpha,\boldsymbol{P}\beta)=(\alpha,\boldsymbol{P}\beta)-(\boldsymbol{P}\alpha,\boldsymbol{P}\beta),$$

$$0=(\beta-\boldsymbol{P}\beta,\boldsymbol{P}\alpha)=(\beta,\boldsymbol{P}\alpha)-(\boldsymbol{P}\beta,\boldsymbol{P}\alpha).$$

把上面两个式子相减，得

$$0=(\alpha,\boldsymbol{P}\beta)-(\beta,\boldsymbol{P}\alpha).$$

于是

$$(\alpha,\boldsymbol{P}\beta)=(\boldsymbol{P}\alpha,\beta),\ \forall\alpha,\beta\in V. \quad ■$$

例 1 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$（指定标准内积）的一个子空间，$U=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0,-2)'.$$

补空间相关问题

(1) 求 $U^{\perp}$ 的维数和一个标准正交基；

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-3,2,2)'$ 在 U 上的正交投影。

解 (1) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 U 的一个基。从而 $\dim U=2$。于是

$$\dim U^{\perp}=\dim \mathbf{R}^4-\dim U=4-2=2.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}\in U^{\perp}&\Leftrightarrow\ (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0,\quad i=1,2\\&\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\alpha}_i'\boldsymbol{\beta}=0,\quad i=1,2\\&\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1'\\\boldsymbol{\alpha}_2'\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}=0\\&\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\beta}\text{ 是齐次线性方程组}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1'\\\boldsymbol{\alpha}_2'\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}\text{ 的解。}\end{aligned}$$

解齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1'\\\boldsymbol{\alpha}_2'\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，求出一个基础解系：

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,2,-1,0)',\boldsymbol{\beta}_2=(2,-3,0,1)',$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $U^{\perp}$ 的一个基。把它正交化和单位化：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}_1)}{(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_1)}\boldsymbol{\gamma}_1=\left(2,-\frac{3}{5},-\frac{6}{5},1\right)',$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\gamma}_1|}\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{\gamma}_1=\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)',$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\gamma}_2|}\boldsymbol{\gamma}_2=\sqrt{\frac{5}{34}}\boldsymbol{\gamma}_2=\left(\frac{\sqrt{170}}{17},-\frac{3\sqrt{170}}{170},-\frac{3\sqrt{170}}{85},\frac{\sqrt{170}}{34}\right)',$$

投影的计算

于是 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基是

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)',$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{\sqrt{170}}{17},-\frac{3\sqrt{170}}{170},-\frac{3\sqrt{170}}{85},\frac{\sqrt{170}}{34}\right)'.$$

(2) 把 U 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行正交化和单位化，得

$$\boldsymbol{\delta}_1=\left(\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{2\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right)',$$

$$\alpha_U=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$$

$$\boldsymbol{\delta}_2=\left(\frac{4\sqrt{238}}{119},\frac{\sqrt{238}}{238},\frac{\sqrt{238}}{119},-\frac{13\sqrt{238}}{238}\right)'.$$

据本节公式(3)得，$\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta}_1)\boldsymbol{\delta}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta}_2)\boldsymbol{\delta}_2=\left(0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)'.$$

例 13 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是实内积空间 V 的一个正交单位向量组。证明：$\forall\,\alpha\in V$，有

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)^2\leqslant|\alpha|^2,\tag{17}$$

等号成立当且仅当 $\alpha=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$。这个不等式称为 **Bessel 不等式**。

本质是勾股定理

证明 令 $W=\langle\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\rangle$。则 $V=W\oplus W^{\perp}$。任取 $\alpha\in V$，有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in W$，$\alpha_2\in W^{\perp}$。于是 α_1 是 α 在 W 上的正交投影。由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是 W 的一个标准正交基，因此

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i.$$

从而据勾股定理得

$$|\alpha|^2=|\alpha_1+\alpha_2|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\geqslant|\alpha_1|^2=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)^2,$$

等号成立当且仅当 $\alpha_2=0$，即 $\alpha=\alpha_1=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$。 ■

例 16 欧几里得空间 $M_n(\mathbf{R})$，其指定的内积为

$$(A,B)=\operatorname{tr}(AB').$$

设 W 是由所有 n 级实对角矩阵组成的子空间。求 $W^{\perp}$ 以及 $W^{\perp}$ 的一个标准正交基。

解 W 的一个基是 $E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}$。任取 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{R})$。

$$\begin{aligned}A\in W^{\perp}\quad&\Leftrightarrow\quad \operatorname{tr}(AE_{ii}')=0,\quad i=1,2,\cdots,n\\&\Leftrightarrow\quad a_{ii}=0,\quad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

因此 $W^{\perp}=\{A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{R})\mid a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n\}$。于是当 $i\neq j$ 时，$E_{ij}\in W^{\perp}$。

$$(E_{ij},E_{ij})=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{ij}')=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{ji})=\operatorname{tr}(E_{ii})=1,$$

当 $k\neq i$ 或 $l\neq j$ 时，有

$$(E_{ij},E_{kl})=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{lk})=0,$$

因此 $\{E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的一个正交单位向量组，其中有 n^2-n 个向量。由于

$$\dim W^{\perp}=\dim M_n(\mathbf{R})-\dim W=n^2-n,$$

因此 $\{E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的一个标准正交基。

例 18 设 $V=C[-1,1]$，指定内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

设 W 是 V 中所有奇函数组成的子空间，求 $W^{\perp}$。试问：V 在 W 上的正交投影存在吗？

解 用 U 表示 V 中所有偶函数组成的子空间。据 8.2 节例 32 得，$V=W\oplus U$。

任取 $f(x)\in U$，对一切 $g(x)\in W$，有

$$\begin{aligned}(f,g)&=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{0}f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)+\int_{0}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{0}f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_{0}^{1}f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

求 $W^{\perp}$：先找一个 U.（猜为 $W^{\perp}$） $V=W\oplus U$

$\left.\forall\alpha\in U,\ \beta\in W$ 有 $(\alpha,\beta)=0\right\}\ U\subseteq W^{\perp}$

再 $\forall\gamma\in W^{\perp}$. 用 $V=W\oplus U$ 分解 $\gamma=\underset{W}{\gamma_1}+\underset{U\subseteq W^{\perp}}{\gamma_2}$

$\Rightarrow\gamma_1=\gamma-\gamma_2\in W^{\perp}\Rightarrow\gamma_1=0.\Rightarrow\gamma=\gamma_2$

$\Downarrow$

$W^{\perp}\subseteq U.$

因此 $f(x)\in W^{\perp}$。于是 $U\subseteq W^{\perp}$。

任取 $h(x)\in W^{\perp}$。由于 $V=W\oplus U$，因此

$$h(x)=h_1(x)+h_2(x),h_1(x)\in W,h_2(x)\in U.$$

由于 $U\subseteq W^{\perp}$，因此 $h_1(x)=h(x)-h_2(x)\in W^{\perp}$。从而 $h_1(x)\in W\cap W^{\perp}$。据内积的正定性得，$W\cap W^{\perp}=0$。于是 $h_1(x)=0$。从而 $h(x)=h_2(x)\in U$。因此 $W^{\perp}\subseteq U$。

综上所述，$U=W^{\perp}$。因此 $V=W\oplus W^{\perp}$。

} 标准证明过程.

例 21 设 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 分别是实内积空间 V 在子空间 U_1 和 U_2 上的正交投影。证明：$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\mathbf{0}$ 当且仅当 U_1 与 U_2 是互相正交的。

子空间相互正交：$\forall\alpha\in U_1,\ \beta\in U_2,\ (\alpha,\beta)=0$. 称 U_1,U_2 相互正交

$\Longleftrightarrow U_1\subseteq U_2^{\perp}$ 或 $U_2\subseteq U_1^{\perp}$

证明 必要性。设 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\mathbf{0}$，则对任意 $\alpha\in V$，有 $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{P}_1\alpha)=0$。于是 $\boldsymbol{P}_1\alpha\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2$。据例 7 得，$\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2=U_2^{\perp}$。因此 $\boldsymbol{P}_1\alpha\in U_2^{\perp}$。从而 $\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_1\subseteq U_2^{\perp}$。仍据例 7 得，$\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_1=U_1$，因此 $U_1\subseteq U_2^{\perp}$。从而 U_1 与 U_2 互相正交。

充分性。设 U_1 与 U_2 互相正交，则 $U_1\subseteq U_2^{\perp}$。据例 7 得，$\operatorname{Im}\boldsymbol{P}_1\subseteq\operatorname{Ker}\boldsymbol{P}_2$。于是对任意 $\alpha\in V$，有 $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{P}_1\alpha)=0$。因此 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\mathbf{0}$。 ■

例 24 设 V 是 n 维欧几里得空间。证明：存在 V 上的一个非零线性变换 $\mathbf{A}$，使得 $\forall \alpha \in V$ 都有 $\mathbf{A}\alpha$ 与 α 正交。

证明 在 V 中取一个标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，设线性变换 $\mathbf{A}$ 在此基下的矩阵为 A，α 在此基下的坐标为 X，则

$\forall \alpha \in V$ 都有 $\mathbf{A}\alpha$ 与 α 正交

$\Leftrightarrow$ $(\mathbf{A}\alpha, \alpha) = 0, \forall \alpha \in V$

$\Leftrightarrow$ $X'AX = 0, \forall X \in \mathbf{R}^n$

$\Leftrightarrow$ A 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 级斜对称矩阵。

$\Leftarrow$) 显然

$\Rightarrow$) $e_i^T A e_i = a_{ii} = 0$

$(e_i+e_j)^T A (e_i+e_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = 0 \Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 0$. 故 A 斜对称.

其中最后一个"$\Leftrightarrow$"是根据《高等代数学习指导书（上册）》6.1 节的例 7。于是任取一个 $\mathbf{R}$ 上的 n 级斜对称矩阵 $A(A \neq 0)$，建立 V 上的一个线性变换 $\mathbf{A}$，使得 $\mathbf{A}$ 在 V 的一个标准正交基下的矩阵为 A，则 $\forall \alpha \in V$ 都有 $\mathbf{A}\alpha$ 与 α 正交。■

3. 设 A 是一个 $s \times n$ 非零实矩阵，用 W 表示 n 元齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间，$\mathbf{R}^n$ 中指定标准内积。

(1) 求 $W^{\perp}$；

(2) 试问：$W^{\perp}$ 是哪个齐次线性方程组的解空间？

3. (1) 设 A 的行向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$。任取 $\boldsymbol{\beta} \in W$。则 $A\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$。从而 $\boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\beta} = 0, i = 1, 2, \cdots, s$。即

在内积中要转置！ $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha^T \beta$ ☆

$$(\boldsymbol{\gamma}_i', \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

于是 $\boldsymbol{\gamma}_i' \in W^{\perp}, i = 1, 2, \cdots, s$。因此

$$\langle \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s' \rangle \subseteq W^{\perp}.$$

于是 $W^{\perp} \neq \mathrm{Im}\,A$. $W^{\perp} = \mathrm{Im}\,A^T$ ☆

由于 $\mathbf{R}^n = W \oplus W^{\perp}$，因此

$$\dim W^{\perp} = n - \dim W = n - (n - \mathrm{rank}(A)) = \mathrm{rank}(A).$$

又由于 $\dim\langle \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s' \rangle = \mathrm{rank}(A)$，因此 $\dim\langle \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s' \rangle = \dim W^{\perp}$。从而

$$W^{\perp} = \langle \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s' \rangle.$$

(2) 取 W 的一个基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$，其中 $r = \mathrm{rank}(A)$。令

$$B = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}).$$

由于 $W = (W^{\perp})^{\perp}$，因此根据本节例 4 得，$W^{\perp}$ 是齐次线性方程组 $B'X = \mathbf{0}$ 的解空间。

若非满射，非正交变换！（存在于无穷维实内积空间）

（正交、对称变换）

精髓：正交变换：$\mathcal{A}$ 为满射，$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$，是可逆的

保内积不变的线性变换一定是正交变换

定理 1 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个正交变换，则存在 V 的一个标准正交基，使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵具有形式：

$$\mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{bmatrix}\right\}, \tag{3}$$

其中 $\lambda_i = 1$ 或 $-1, i = 1, 2, \cdots, r, 0 \leqslant r \leqslant n; 0 < \theta_j < \pi, j = 1, 2, \cdots, m, 0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$。

对这些变换，若 W 为 $\mathcal{A}$ 不变子空间，

则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

对称变换：$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$. $\mathcal{A}$ 在标准正交基下为对称矩阵.

斜对称则正交相似于 $\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & -a_m \\ a_m & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right\}$

题型：

例 15 实内积空间 V 上的一个变换 $\mathbf{A}$ 称为**斜对称的**，如果对任意 $\alpha, \beta \in V$，有

$$(\mathbf{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathbf{A}\beta).$$

证明：V 上的斜对称变换 $\mathbf{A}$ 是线性变换。

证明 任取 $\alpha, \beta \in V$，对于任意 $\gamma \in V$，有

$$(\mathbf{A}(\alpha+\beta), \gamma) = -(\alpha+\beta, \mathbf{A}\gamma) = -(\alpha, \mathbf{A}\gamma) - (\beta, \mathbf{A}\gamma)$$
$$= (\mathbf{A}\alpha, \gamma) + (\mathbf{A}\beta, \gamma) = (\mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta, \gamma).$$

由此推出，$\mathbf{A}(\alpha+\beta) = \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta$。

类似地可证 $\mathbf{A}(k\alpha) = k\mathbf{A}\alpha, \forall \alpha \in V, k \in \mathbf{R}$。因此 $\mathbf{A}$ 是线性变换。

证明线性变换：① $\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$

② $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha)$

例 21 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 3 维欧几里得空间 V 上的斜对称变换，且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$。证明：若 $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{B}$，则 $\mathbf{B} = l\mathbf{A}, l \in \mathbf{R}$。

证明 由于 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$，因此据例 19 得，$V$ 中存在一个标准正交基 η_1, η_2, η_3，使得 $\mathbf{A}$ 在此基下的矩阵 A 等于 $\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, 0\right\}$，其中 $a \neq 0$。于是 $\mathrm{Im}\,\mathbf{A} = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$。从而 $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = (\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp} = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle^{\perp} = \langle \eta_3 \rangle$。由已知条件得，$\mathrm{Ker}\,\mathbf{B} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = \langle \eta_3 \rangle$。从而 $\mathrm{Im}\,\mathbf{B} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{B})^{\perp} = \langle \eta_3 \rangle^{\perp} = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$。由于 $\mathbf{B}|\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 是 $\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 上的斜对称变换，因此据例 19 得，在 $\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 中有一个标准正交基 δ_1, δ_2，使得 $\mathbf{B}|\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$。设 $\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 中标准正交基 η_1, η_2 到标准正交基 δ_1, δ_2 的过渡矩阵为 T，则 T 是 2 级正交矩阵。于是

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{或 } T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

从而 $\mathbf{B}|\mathrm{Im}\,\mathbf{B}$ 在基 η_1, η_2 下的矩阵 B_1 为

$$B_1 = T\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

直接计算，得

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathbf{B}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵 B 为

$$B = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, 0\right\} \quad \text{或} \quad B = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, 0\right\}.$$

由此得出，$\mathbf{B} = \frac{b}{a}\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{B} = -\frac{b}{a}\mathbf{A}$。

应用结论：$\mathcal{A}$ 为斜对称变换.

则 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = (\mathrm{Im}\,\mathcal{A})^{\perp}$.

$\alpha \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}\alpha = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha, \mathcal{A}\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\mathrm{Im}\,\mathcal{A})^{\perp}$

例 28 设 $\mathbf{A}$ 是实内积空间 V 到自身的满射。证明：如果 $\mathbf{A}0 = 0$ 且 $\mathbf{A}$ 保持向量间的距离不变，那么 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换。

证明 任取 $\alpha, \beta \in V$。由已知条件得

$$|\mathbf{A}\alpha| = |\mathbf{A}\alpha - 0| = |\mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}0| = |\alpha - 0| = |\alpha|,$$
$$(\mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta).$$

由于

$$(\mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) - 2(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta)$$
$$= (\alpha, \alpha) - 2(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\beta, \beta),$$
$$(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = (\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta),$$

因此 $(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$。从而 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换。■

通过条件向下推进.

例 36 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个对称变换，对于任意 $\alpha \in V$ 且 $\alpha \neq 0$，令

$$F(\alpha) = \frac{(\alpha, \mathbf{A}\alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

证明：(1) $F(k\alpha) = F(\alpha), \forall k \in \mathbf{R}^*$；

(2) $F(\alpha)$ 在 ξ 处达到最小值，其中 ξ 是 $\mathbf{A}$ 的属于最小特征值的一个单位特征向量。

证明 (1) 对任意非零实数 k，有

$$F(k\alpha) = \frac{(k\alpha, \mathbf{A}(k\alpha))}{(k\alpha, k\alpha)} = \frac{k^2(\alpha, \mathbf{A}\alpha)}{k^2(\alpha, \alpha)} = F(\alpha).$$

(2) 在 V 中取一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，则 $\mathbf{A}$ 在此基下的矩阵 A 为实对称矩阵。

设 α 在此基下的坐标为 $\boldsymbol{X}$，则 $F(\alpha)=\dfrac{\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^2}$。设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值按照从小到大的顺序排成 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$。则据《高等代数学习指导书(上册)》6.1 节的例 11 得，$\forall\,\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq 0$，有

$$\lambda_1\leqslant F(\alpha)=\frac{\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^2}\leqslant\lambda_n.$$

设 ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于最小特征值 λ_1 的一个单位特征向量，则

$$F(\xi)=\frac{(\xi,\boldsymbol{A}\xi)}{(\xi,\xi)}=(\xi,\lambda_1\xi)=\lambda_1(\xi,\xi)=\lambda_1.$$

因此 $F(\alpha)$ 在 ξ 处达到最小值 λ_1。 ■

点评 例 36 揭示了 $F(\alpha)$ 的最小值就是 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值 λ_1，且 $F(\alpha)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个单位特征向量 ξ 处达到最小值。同理可证，$F(\alpha)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的属于最大特征值 λ_n 的一个单位特征向量处达到最大值 λ_n。例 36 的证明之所以很简捷，是因为引用了《高等代数学习指导书(上册)》6.1 节的例 11 的结论，而例 11 的证明的关键是利用了实对称矩阵 A 能正交相似于一个对角矩阵。例 36 是运用高等代数的理论简捷地解决函数论中最小值、最大值问题的一个例子。这表明要善于把分析与代数沟通起来。

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 维欧几里得空间 V 上的一个正交变换，$\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m\\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{bmatrix}\right\},\qquad(3)$$

求 V 的一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是形如(3)式的分块对角矩阵。

4. $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda^2-\frac{5}{3}\lambda+1)$。于是 A 的特征多项式的复根为 $-1,\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{11}\mathrm{i})$。

解齐次线性方程组 $(-I-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$。求得一个基础解系为 $(1,-3,1)'$。令 $\xi_1=\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3$。把 ξ_1 单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{11}}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{11}}(\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3).$$

解齐次线性方程组 $(1,-3,1)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为

$(3,1,0)',(1,0,-1)'$. → 是因为不变子空间的正交补对正交变换仍为不变子空间

把它们正交化和单位化，得

$$\left(\frac{3}{\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right)',\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)',$$

令 $\eta_2=\frac{3}{\sqrt{22}}\alpha_1+\frac{2}{\sqrt{22}}\alpha_2+\frac{3}{\sqrt{22}}\alpha_3$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$，

则 $\langle\eta_1\rangle^{\perp}=\langle\eta_2,\eta_3\rangle$。于是 η_1,η_2,η_3 是 V 的一个标准正交基。通过解有关的线性方程组可求出

$$\boldsymbol{A}\eta_2=\frac{5}{6}\eta_2+\frac{\sqrt{11}}{6}\eta_3,\quad \boldsymbol{A}\eta_3=-\frac{\sqrt{11}}{6}\eta_2+\frac{5}{6}\eta_3.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6}\\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}.$$

先正标准化

14. 证明：2 维欧几里得空间 V 上的斜对称变换 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=|\boldsymbol{A}|(\alpha,\beta),\ \forall\,\alpha,\beta\in V.$$

14. V 中存在一个标准正交基 η_1,η_2，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$。设 α,β 在此基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，由于 $A^2=-a^2I$，因此

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)&=(A\boldsymbol{X})'(A\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{X}'A'A\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{X}'A^2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}'(a^2I)\boldsymbol{Y}\\&=a^2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}=a^2(\alpha,\beta)=|A|(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

(酉. Hermite. 正规) 梳理：

$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$

$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

$(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=\bar{k}_1(\alpha,\beta_1)+\bar{k}_2(\alpha,\beta_2)$

$(X,Y)=Y^HX$

α 在标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 $(x_1,\cdots,x_n)$，则 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\eta_i \Rightarrow (\alpha,\eta_j)=\sum_{i=1}^n x_i(\eta_i,\eta_j)=x_j$ } $\alpha=\sum_{i=1}^n(\alpha,\eta_i)\eta_i$ (Fourier 展开)

酉矩阵：$P^HP=I$ → 酉相似于 $\operatorname{diag}\{e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}\}$

酉变换：$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$，$\mathcal{A}$ 在标准正交基下矩阵为酉矩阵

Hermite 变换：$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$，$\mathcal{A}$ 在标准正交基下矩阵为 Hermite 矩阵 $(A^H=A)$ ⇒ 酉相似于实对角阵

若 $\mathcal{A}$ 伴随，W 为 $\mathcal{A}$ 不变子空间，则 $W^{\perp}$ 为 $\mathcal{A}^*$ 不变子空间。 ⇐ 伴随变换：$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}^*\beta)$ 称 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个伴随变换；$\mathcal{A}$ 的伴随变换是唯一的

若 $\mathcal{A}$ 在标准正交基下矩阵为 A，则 $\mathcal{A}^*$ 在此基下矩阵为 A^* (A^H) (不是伴随矩阵)

正规变换：$\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$。($\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ A^H)。则称 $\mathcal{A}$ 为正规变换 ⇒ 对应正规矩阵：$AA^*=A^*A$

⇓

定理 12 设 $\boldsymbol{A}$ 是有限维酉空间 V 上的正规变换，则 V 中存在一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵。

定理：复数域上 n 阶正规矩阵 A，$\exists P$ 为酉矩阵，$P^{-1}AP$ 为对角阵

题目：

例 4 设 V 和 V' 都是复数域上的线性空间，$(\ ,\ )_1$ 是 V' 上的一个内积；设 σ 是 V 到 V' 的一个线性映射，并且 σ 是单射，对于 V 中任意两个向量 α,β，规定

$$(\alpha,\beta)=(\sigma\alpha,\sigma\beta)_1,$$

证明：$(\ ,\ )$ 是 V 上的一个内积。

证明 对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V,k\in\mathbf{C}$，有

共轭对称 $(\beta,\alpha)=\overline{(\sigma\beta,\sigma\alpha)_1}=\overline{(\sigma\alpha,\sigma\beta)_1}=\overline{(\alpha,\beta)}$， → 证明内积四步

加法 $(\alpha+\gamma,\beta)=(\sigma(\alpha+\gamma),\sigma\beta)_1=(\sigma\alpha+\sigma\gamma,\sigma\beta)_1$
$=(\sigma\alpha,\sigma\beta)_1+(\sigma\gamma,\sigma\beta)_1=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$，

数乘 $(k\alpha,\beta)=(\sigma(k\alpha),\sigma\beta)_1=(k\sigma\alpha,\sigma\beta)_1=k(\sigma\alpha,\sigma\beta)_1$
$=k(\alpha,\beta)$，

正定 $(\alpha,\alpha)=(\sigma\alpha,\sigma\alpha)_1\geqslant 0$，

等号成立当且仅当 $\sigma\alpha=0$。由于 σ 是单射，因此 $\sigma\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。

综上所述，$(\ ,\ )$ 是 V 上的一个内积。

例 16 设 H 是 n 级 Hermite 矩阵，证明：

(1) $I-\mathrm{i}H$ 与 $I+\mathrm{i}H$ 都可逆； $H^H=H$

(2) $A=(I-\mathrm{i}H)(I+\mathrm{i}H)^{-1}$ 是酉矩阵，且 -1 不是 A 的特征值。

(1) 有 $H\sim\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ $\lambda_i\in\mathbb{R}$. 故 det 均非 0. 可逆.

$=I+H^2=(I-iH)(I+iH)$

↑ 可交换

(2) $A^H=((I+iH)^{-1})^H(I-iH)^H=(I-iH)^{-1}(I+iH) \Rightarrow A^HA=(I-iH)^{-1}\underbrace{(I+iH)(I-iH)}(I+iH)^{-1}=I$. 则 A 为酉矩阵

即证若 $\alpha\neq 0$. $A\alpha=-\alpha \Rightarrow (I-iH)\alpha=-(I+iH)\alpha \Rightarrow 2\alpha=0$. 故得证.

例 23 酉空间 V 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 如果满足

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta),\ \forall\,\alpha,\beta\in V,\tag{72}$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个斜 Hermite 变换。证明：

基础题型.

(1) V 上的斜 Hermite 变换 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换；

(2) n 维酉空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是斜 Hermite 变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵 A 是满足 $A^*=-A$，称此矩阵 A 是斜 Hermite 矩阵；

(3) 斜 Hermite 变换的特征值是 0 或纯虚数；

(4) n 维酉空间 V 中存在一个标准正交基，使得斜 Hermite 变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵，其主对角元为 0 或纯虚数。

证明 (1) 任取 $\alpha,\beta\in V$，对于任意 $\gamma\in V,k\in\mathbf{C}$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}(\alpha+\beta),\gamma)&=-(\alpha+\beta,\boldsymbol{A}\gamma)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\gamma)-(\beta,\boldsymbol{A}\gamma)\\&=(\boldsymbol{A}\alpha,\gamma)+(\boldsymbol{A}\beta,\gamma)=(\boldsymbol{A}\alpha+\boldsymbol{A}\beta,\gamma),\end{aligned}$$

由此推出，$\boldsymbol{A}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{A}\alpha+\boldsymbol{A}\beta$。引入$\forall\gamma$. 以证$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta$.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}(k\alpha),\beta)&=-(k\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=-k(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=k(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)\\&=(k\boldsymbol{A}\alpha,\beta),\end{aligned}$$

由此推出，$\boldsymbol{A}(k\alpha)=k\boldsymbol{A}\alpha$。因此 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的线性变换。

(2) 任取 V 的一个标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，设

$$\boldsymbol{A}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A,$$

则 $\boldsymbol{A}\eta_j$ 在标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的坐标的第 i 个分量为 $a_{ij}=(\boldsymbol{A}\eta_j,\eta_i)$，$i,j=1,2,\cdots,n$。因此

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\text{ 是 }V\text{ 上的斜 Hermite 变换}\\\Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta),\ \forall\,\alpha,\beta\in V\\\Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{A}\eta_j,\eta_i)=-(\eta_j,\boldsymbol{A}\eta_i),\ 1\leqslant i,j\leqslant n\\\Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{A}\eta_j,\eta_i)=-\overline{(\boldsymbol{A}\eta_i,\eta_j)},\ 1\leqslant i,j\leqslant n\\\Leftrightarrow\ &a_{ij}=-\overline{a_{ji}},\ 1\leqslant i,j\leqslant n\\\Leftrightarrow\ &A=-A^*。\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的斜 Hermite 变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵 A 满足 $A^*=-A$，称此矩阵 A 为斜 Hermite 矩阵。

(3) 设 λ_1 是斜 Hermite 变换 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量，则

$$\begin{aligned}\lambda_1(\xi,\xi)&=(\lambda_1\xi,\xi)=(\boldsymbol{A}\xi,\xi)=-(\xi,\boldsymbol{A}\xi),\\&=-(\xi,\lambda_1\xi)=-\overline{\lambda_1}(\xi,\xi),\end{aligned}$$

由此得出，$(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\xi,\xi)=0$。从而 $\overline{\lambda_1}=-\lambda_1$。设 $\lambda_1=a+bi$，则 $\overline{\lambda_1}=a-bi$。由 $\overline{\lambda_1}=-\lambda_1$ 得 $a=0$。因此 λ_1 是 0 或纯虚数。

(4) 由于斜 Hermite 变换 $\boldsymbol{A}$ 的伴随变换 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换。据定理 12 得，V 中存在一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵，其主对角元为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，从而它们是 0 或纯虚数。■

例 62 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的正规变换。证明：若 W 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。

证明 在 W 中取一个标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，把它扩充成 V 的一个标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$。则 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}A_1&A_3\\0&A_2\end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的正规变换，因此 A 是正规矩阵。从而 $AA^*=A^*A$，于是得出 $A_1A_1^*+A_3A_3^*=A_1^*A_1$。两边取迹，由于 $\operatorname{tr}(A_1A_1^*)=\operatorname{tr}(A_1^*A_1)$，因此 $\operatorname{tr}(A_3A_3^*)=0$。由于 $\operatorname{tr}(A_3A_3^*)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-m}|A_3(i;j)|^2$，因此 $A_3=0$。从而 $\langle\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\rangle$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。由于 $\langle\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\rangle\subseteq W^{\perp}$，且 $\dim\langle\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\rangle=\dim W^{\perp}$，因此 $\langle\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\rangle=W^{\perp}$，于是 $W^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。■

通过基 $\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1&A_3\\&A_2\end{pmatrix}$ 通过证 $A_3=0$ 来说明为不变子空间.

$\mathcal{A}$ 正规变换则 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*=(\operatorname{Im}\mathcal{A})^{\perp}$

例 71 设 $\boldsymbol{A}$ 是酉空间 V 上的正规变换。证明：

(1) $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^*$；

(2) $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=(\operatorname{Im}\boldsymbol{A})^{\perp}$。

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换，因此 $|\boldsymbol{A}\alpha|=|\boldsymbol{A}^*\alpha|$。从而 $\alpha\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}\alpha=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}^*\alpha=0\ \Leftrightarrow\ \alpha\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^*$

因此 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^*$。

(2) $$\begin{aligned}\beta\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}\ &\Leftrightarrow\ \beta\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}^*\\&\Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}^*\beta=0\\&\Leftrightarrow\ (\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=0,\ \forall\,\alpha\in V\\&\Leftrightarrow\ (\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=0,\ \forall\,\alpha\in V\\&\Leftrightarrow\ \beta\in(\operatorname{Im}\boldsymbol{A})^{\perp},\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}=(\operatorname{Im}\boldsymbol{A})^{\perp}$。■

例 80 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 维酉空间 V 上的线性变换，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。证明：$V$ 中有一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在此基下的矩阵都是上三角矩阵。

例 25 证明：酉空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 变换（斜 Hermite 变换）当且仅当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A})$。

证明 必要性已经证过，下面证充分性。

若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$，则对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 变换。 → 伴随变换的存在唯一性

若 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}$，则对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\alpha,-\boldsymbol{A}\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是斜 Hermite 变换。■

例 34 在复线性空间 $M_n(\mathbf{C})$ 中，指定内积

$$(A,B)=\operatorname{tr}(B^*A),\ \forall\,A,B\in M_n(\mathbf{C}).$$

设 M 是一个固定的 n 级复矩阵，定义

$$\boldsymbol{L}_M(A)=MA,\ \forall\,A\in M_n(\mathbf{C}).$$

易看出 $\boldsymbol{L}_M$ 是 $M_n(\mathbf{C})$ 上的一个线性变换。求 $\boldsymbol{L}_M$ 的伴随变换 $\boldsymbol{L}_M^*$。

解 对于任意 $A,B\in M_n(\mathbf{C})$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}_M(A),B)&=(MA,B)=\operatorname{tr}(B^*MA)=\operatorname{tr}((B^*MA)')\\&=\operatorname{tr}(\overline{(B^*MA)^*})=\operatorname{tr}(\overline{A^*M^*B})\\&=\overline{(M^*B,A)}=(A,M^*B),\\(\boldsymbol{L}_M(A),B)&=(A,\boldsymbol{L}_M^*(B)).\end{aligned}$$

注意tr中矩阵顺序！不是随意的

于是 $\mathcal{L}_M^*(A)=M^*A.\ \forall A\in M_n(\mathbb{C})$

例 35 在例 34 中，证明：$\boldsymbol{L}_M$ 是酉变换当且仅当 M 是酉矩阵。

证明 由于 $\boldsymbol{L}_M$ 是 $\mathbf{C}$ 上 n^2 维线性空间 $M_n(\mathbf{C})$ 上的线性变换，因此 $\boldsymbol{L}_M$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{L}_M$ 是单射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\boldsymbol{L}_M=0$。又有 $A\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{L}_M$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{L}_M(A)=0$ $\Leftrightarrow$ $MA=0$。于是若 $\boldsymbol{L}_M$ 可逆，则从 $MA=0$ 可推出 $A=0$。由此得出，M 可逆（否则，若 M 不可逆，则齐次线性方程组 $MX=0$ 必有非零解，从而存在 $B\in M_n(\mathbf{C})$ 且 $B\neq0$，使得 $MB=0$，矛盾）。反之，若 M 可逆，则从 $MA=0$ 可推出 $A=0$，于是 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{L}_M=0$。从而 $\boldsymbol{L}_M$ 可逆。显然，当 $\boldsymbol{L}_M$ 可逆时，$\boldsymbol{L}_M^{-1}(B)=M^{-1}B,\ \forall\,B\in M_n(\mathbf{C})$。于是

变换取逆要单先说明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_M\text{ 是酉变换}\ &\Leftrightarrow\ \boldsymbol{L}_M^*=\boldsymbol{L}_M^{-1}\\&\Leftrightarrow\ \boldsymbol{L}_M^*(A)=\boldsymbol{L}_M^{-1}(A),\ \forall\,A\in M_n(\mathbf{C})\\&\Leftrightarrow\ M^*A=M^{-1}A,\ \forall\,A\in M_n(\mathbf{C})\\&\Leftrightarrow\ M^*=M^{-1}\\&\Leftrightarrow\ M\text{ 是酉矩阵。}\end{aligned}$$

■

例 89 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 级复矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值。证明：A 是正规矩阵当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.\tag{111}$$

证明 必要性。设 A 是正规矩阵，则存在 n 级酉矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$。从而

$$\begin{aligned}A&=P\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1},\\AA^*&=P\operatorname{diag}\{|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2\}P^{-1}.\end{aligned}$$

由于 AA^* 的 (i,i) 元为

$$\sum_{j=1}^{n}A(i;j)A^*(j;i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AA^*)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2,\\\operatorname{tr}(AA^*)&=\operatorname{tr}(P\operatorname{diag}\{|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2\}P^{-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2,\end{aligned}$$

从而 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|^2.$$

充分性。设 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$，即 $\operatorname{tr}(AA^*)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$。由于 A 是 n 级复矩阵，因此据例 59 的点评得，存在 n 级酉矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&d_{12}&\cdots&d_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&d_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned}&=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}\lambda_1&d_{12}&\cdots&d_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&d_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1}&0&\cdots&0\\\overline{d_{12}}&\overline{\lambda_2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\overline{d_{1n}}&\overline{d_{2n}}&\cdots&\overline{\lambda_n}\end{pmatrix}\right]\\&=|\lambda_1|^2+|d_{12}|^2+\cdots+|d_{1n}|^2+|\lambda_2|^2+|d_{23}|^2+\\&\quad\cdots+|d_{2n}|^2+\cdots+|\lambda_n|^2.\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{tr}(AA^*)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$，因此 $d_{12}=\cdots=d_{1n}=d_{23}=\cdots=d_{2n}=\cdots=d_{n-1,n}=0$。从而 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵。于是 A 是正规矩阵。■

例 90 n 级 Hermite 矩阵 A 称为半正定的，如果对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{X}^*A\boldsymbol{X}\geqslant 0$。证明：$n$ 级 Hermite 矩阵 A 是半正定的当且仅当 A 的特征值全非负。

证明 由于 A 是 Hermite 矩阵，因此存在 n 级酉矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，它们都是实数。于是

$$A = P\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1}.$$

任取 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $P^{-1}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$。于是

$$\begin{aligned}
A\text{ 是半正定的} &\Leftrightarrow \boldsymbol{X}^*A\boldsymbol{X}\geqslant 0,\ \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^n\text{ 且 }\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}\\
&\Leftrightarrow (P^{-1}\boldsymbol{X})^*\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}(P^{-1}\boldsymbol{X})\geqslant 0,\ \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^n\text{ 且 }\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{Y}^*\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\boldsymbol{Y}\geqslant 0,\ \forall\boldsymbol{Y}\in\mathbf{C}^n\text{ 且 }\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}\\
&\Leftrightarrow \lambda_1|y_1|^2+\lambda_2|y_2|^2+\cdots+\lambda_n|y_n|^2\geqslant 0,\ \forall(y_1,y_2,\cdots,y_n)'\in\mathbf{C}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}\\
&\Leftrightarrow \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

■

例 91 设 A,B 都是 n 级 Hermite 矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么存在一个 n 级可逆矩阵 C，使得 C^*AC 与 C^*BC 都是对角矩阵。

证明 由于 A 是正定 Hermite 矩阵，因此存在一个 n 级可逆复矩阵 C_1，使得 $C_1^*AC_1=I$。

由于 $(C_1^*BC_1)^*=C_1^*B^*(C_1^*)^*=C_1^*BC_1$，因此 $C_1^*BC_1$ 是 Hermite 矩阵。于是存在 n 级酉矩阵 P，使得

$$P^{-1}(C_1^*BC_1)P = \operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $C_1^*BC_1$ 的特征值，它们都是实数。

令 $C=C_1P$，则 $C^*=P^*C_1^*=P^{-1}C_1^*$。于是 C 可逆，且

$$C^*AC = P^{-1}C_1^*AC_1P = P^{-1}IP = I,$$
$$C^*BC = \operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}.$$

■

例 92 设 A,B 都是 n 级 Hermite 矩阵。证明：如果 A 是正定的，B 是半正定的，那么

$$|A+B|\geqslant|A|+|B|,$$

等号成立当且仅当 $B=0$。

证明 据例 91 的证明过程知道，存在一个 n 级可逆复矩阵 C，使得

$$C^*AC = I,\ C^*BC = \operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $C_1^*BC_1$ 的特征值。由于 B 半正定，因此 $C_1^*BC_1$ 也半正定，据例 90 得，$\mu_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$。

$$\begin{aligned}
|A| &= |(C^*)^{-1}C^{-1}| = |\overline{C^{-1}}|\,|C^{-1}| = \|C^{-1}\|^2,\\
|B| &= |(C^*)^{-1}\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}C^{-1}| = \|C^{-1}\|^2\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,\\
|A+B| &= |(C^*)^{-1}(I+\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\})C^{-1}|\\
&= \|C^{-1}\|^2(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n) &= 1+(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)+(\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\mu_n)\\
&\quad+\cdots+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\\
&\geqslant 1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,
\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=0$，因此

$$|A+B|\geqslant\|C^{-1}\|^2(1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)=|A|+|B|,$$

且等号成立当且仅当 $C^*BC=0$，从而 $B=0$。■

5. 在 $M_n(\mathbf{C})$ 中，指定内积为 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB^*)$。设 W 是所有 n 级复对角矩阵组成的子空间，求 $W^\perp$ 以及 $W^\perp$ 的一个标准正交基。

5. $(E_{ij},E_{ij})=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{ij}^*)=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{ji})=\operatorname{tr}(E_{ii})=1$，当 $k\neq i$ 或 $l\neq j$ 时，$(E_{ij}E_{kl})=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{kl}^*)=\operatorname{tr}(E_{ij}E_{lk})=0$。因此 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},E_{n2},\cdots,E_{nn}$ 是酉空间 $M_n(\mathbf{C})$ 的一个标准正交基。记 $V=M_n(\mathbf{C})$，于是

$$V = \langle E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}\rangle\oplus\langle E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\rangle,$$

且 $\langle E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\rangle\subseteq\langle E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}\rangle^\perp$。

由于 $W=\langle E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}\rangle$，且 $V=W\oplus W^\perp$，因此

$$W^\perp = \langle E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\rangle,$$

$W^\perp$ 的一个标准正交基是 $\{E_{ij}\mid i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n\}$。

10. $M_n(\mathbf{C})$ 是指定了内积 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB^*)$ 的酉空间，求下述子空间的正交补：

(1) 迹为 0 的所有矩阵组成的子空间 $M_n^0(\mathbf{C})$；

(1). $M_n^0(\mathbb{C})^\perp=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid(X,A)=0.\ \forall A\in M_n^0(\mathbb{C})\}$

对 $i\neq j$. $E_{ij}\in M_n^0(\mathbb{C})\Rightarrow(X,E_{ij})=x_{ij}=0\Rightarrow X$ 对角.

设 $X=\operatorname{diag}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 对于 $A=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n)\in M_n^0(\mathbb{C})$

$(X,A)=\sum_{k=1}^n x_k\overline{a_k}=0$ 取 $a_1=1.\ a_2=-1,\ a_3=\cdots=a_n=0\Rightarrow x_1=x_2$ 同理 $x_1=\cdots=x_n$

故有 $M_n^0(\mathbb{C})^\perp=\{cI_n\mid c\in\mathbb{C}\}$.

11. 设 n 维复（实）内积空间 V 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵是 G，V 上的一个线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是 A，求 $\boldsymbol{A}^*$ 在此基下的矩阵。

11. $\boldsymbol{A}^*$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $\overline{G}^{-1}A^*\overline{G}$。理由如下：

V 中取一个标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，设 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为 B，则根据本节定理 8，$\boldsymbol{A}^*$ 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是 B^*。设 $\boldsymbol{A}^*$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 H。

设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P$，则根据 9.3 节的定理 3 得，$A=P^{-1}BP$，$H=P^{-1}B^*P$。设 P 的列向量组为 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n$，则 P^* 的行向量组为 $\boldsymbol{P}_1^*,\cdots,\boldsymbol{P}_n^*$。由于 α_j 在标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{P}_j$，$j=1,\cdots,n$，因此 $(\alpha_j,\alpha_i)=\boldsymbol{P}_i^*\boldsymbol{P}_j=P^*P(i;j)$。又有 $(\alpha_j,\alpha_i)=\overline{(\alpha_i,\alpha_j)}=\overline{G}(i;j)$，于是 $P^*P=\overline{G}$. 从而

$H=P^{-1}B^*P=P^{-1}(PAP^{-1})^*P=P^{-1}(P^{-1})^*A^*P^*P=(P^*P)^{-1}A^*(P^*P)=\overline{G}^{-1}A^*\overline{G}$.