第六周答案

张竞一、杨玄烨

2025 年 10 月 22 日

2.15 解答

体积为 $V = 1\,\mathrm{m}^3$ 的水具有水分子的个数为

$$N = \frac{1,000,000\,\mathrm{g}}{18.015\,\mathrm{g/mol}} N_A = 3.342 \times 10^{28}.$$

极化强度为

$$P = \frac{Np}{V} = 2.039 \times 10^{-2}\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$$

直径为 $d = 1\,\mathrm{mm}$ 的水滴偶极矩为

$$p = \frac{1}{6}\pi d^3 P = 1.068 \times 10^{-11}\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}.$$

距离水滴 $r = 10\,\mathrm{cm}$ 处的电场强度为

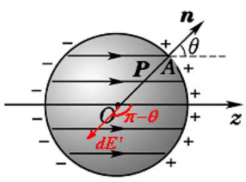
$$E = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3} \right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} = 1.922 \times 10^2\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

PPT 习题解答

一个均匀极化的电介质球，极化强度为 $\mathbf{P}$，球的半径为 R。

(1) 求表面上极化电荷分布。

(2) 求图中 z 轴上各点的电场。



解答：

(1) 表面上极化电荷分布：

对于均匀极化的电介质球，极化强度为 $\mathbf{P}$，球的半径为 R。极化电荷分布在球的表面，面电荷密度 σ' 由下式给出：

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

其中 $\mathbf{n}$ 为球面的外法线方向。

在球面上任一点，$\mathbf{n}$ 与半径矢量同方向，$\mathbf{P}$ 与 z 轴平行，因此：

$$\sigma' = P\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{n}$ 之间的夹角。

因此，表面上的极化电荷分布为：

$$\sigma' = P\cos\theta.$$

(2) 图中 z 轴上各点的电场：

方法一：直接积分法

对于均匀极化的电介质球，其表面极化电荷密度为 $\sigma' = P\cos\theta$。我们可以将这个表面电荷分布在 z 轴上产生的电场通过直接积分计算。

考虑球面上一个面元 $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$，其上的电荷为：

$$dq' = \sigma' dS = P\cos\theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

这个电荷元在 z 轴上一点 $(0, 0, z)$ 处产生的电场仅有 z 分量：

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r^2} \cos\alpha$$

其中 r 是电荷元到场点的距离，α 是 $\vec{r}$ 与 z 轴的夹角。根据几何关系：

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{z - R\cos\theta}{r}$$

代入得：

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{PR^2 \cos\theta \sin\theta (z - R\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}} d\theta d\phi$$

对 ϕ 从 0 到 2π 积分，对 θ 从 0 到 π 积分，得到 z 轴上的电场：

$$E_z = \frac{PR^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta (z - R\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}} d\theta$$

方法二：等效偶极子法（更简洁）

均匀极化的球体可以等效为一个位于球心的电偶极子，其偶极矩为：

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P}$$

点偶极子在 z 轴上产生的电场为：

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{z})\hat{z} - \vec{p}}{|z|^3} \right], \quad |z| > R$$

当 $\vec{P}$ 沿 z 轴方向时，$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 P \hat{z}$，代入上式：

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{|z|^3} \hat{z} = \frac{2PR^3}{3\epsilon_0 |z|^3} \hat{z}, \quad |z| > R$$

结论：

1. $|z| > R$：

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{|z|^3} = \frac{2PR^3}{3\epsilon_0 |z|^3} \hat{z}$$

2. $|z| < R$：

$$\vec{E}(z) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

2.16 解答

介质 1, 2 的电位移均为

$$D_1 = D_2 = \sigma.$$

介质 1, 2 的电场强度为

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_r 1 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_r 2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}.$$

介质 1, 2 的极化强度为

$$P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = \frac{\sigma}{2},$$

$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{2\sigma}{3}.$$

电势为

$$V = -\int_0^x E\, dr = \begin{cases} -\dfrac{\sigma x}{2\epsilon_0}, & 0 \le x \le x_1; \\ -\dfrac{\sigma x_1}{2\epsilon_0} - \dfrac{\sigma(x - x_1)}{3\epsilon_0}, & x_1 < x \le x_2. \end{cases}$$

其中 $x_1 = 1.0\,\mathrm{cm}, x_2 = 3.0\,\mathrm{cm}$。
界面极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1' = -P_1 = -\frac{\sigma}{2},$$

$$\sigma_2' = P_1 - P_2 = -\frac{\sigma}{6},$$

$$\sigma_3' = P_2 = \frac{2\sigma}{3}.$$

2.17 解答

空间的电位移分布为

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

电场强度分布为

$$E = \begin{cases} 0, & r \le a; \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon r^2}, & a < r \le b; \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > b. \end{cases}$$

电势分布为

$$V = \int_R^\infty E\,dr = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & R \le a; \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & a < R \le b; \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & R > b. \end{cases}$$

2.20 解答

假设内球带电量为 $-Q$，因此电位移分布为

$$D = -\frac{Q}{4\pi r^2}.$$

电场强度分布为

$$E = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}, & R_1 \le r \le a; \\ -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}, & a < r \le R_2. \end{cases}$$

电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}\right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_2}\right).$$

电容为

$$C = \frac{-Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 R_1 R_2 a}{\epsilon_1 R_1(R_2 - a) + \epsilon_2 R_2(a - R_1)}.$$

$r = R_1, a, R_2$ 处的极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1' = -(D - \epsilon_0 E)\Big|_{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right),$$

$$\sigma_2' = (D - \epsilon_0 E)\Big|_{r=a^-} - (D - \epsilon_0 E)\Big|_{r=a^+} = \frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right),$$

$$\sigma_3' = (D - \epsilon_0 E)\Big|_{r=R_2} = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right).$$

2.21 解答

左半部分、右半部分的电场强度可以被表示为

$$E_1 = \frac{C_1}{r^2},$$

$$E_2 = \frac{C_2}{r^2}$$

的形式，其中 C_1, C_2 是常数。因此，两个极板之间的电势差为

$$V = \int_a^b E_1\,dr = C_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= \int_a^b E_2\,dr = C_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

因此 $C_1 = C_2$，这表明电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 C}{r^2}, & r \in \Omega_1; \\ \dfrac{\epsilon_2 C}{r^2}, & r \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2 \frac{\epsilon_1 C}{r^2} + 2\pi r^2 \frac{\epsilon_2 C}{r^2} = Q,$$

$$C = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

电场强度为

$$E = \frac{C}{r^2} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E\,dr = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)ab}{b - a}.$$

2.22 解答

与 2.21 类似，电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 C}{r^2}, & r \in \Omega_1; \\ \dfrac{\epsilon_2 C}{r^2}, & r \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2 \frac{\epsilon_1 C}{r^2} + 2\pi r^2 \frac{\epsilon_2 C}{r^2} = q,$$

$$C = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}, & r \in \Omega_1; \\ \dfrac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}, & r \in \Omega_2. \end{cases}$$

自由面电荷分布为

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}, & r \in \Omega_1; \\ \dfrac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}, & r \in \Omega_2. \end{cases}$$

2.23 解答

假设金属球带电量为 q，因此电场分布为

$$E = \begin{cases} \dfrac{q+q_0}{8\pi\epsilon_0 r^2}\dfrac{r^3-R^3}{7R^3}, & R \le r \le 2R; \\ \dfrac{q+q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > 2R. \end{cases}$$

金属球的电势为

$$V = \int_R^\infty E\,dr = 0,$$

$$q = -\frac{16}{21}q_0.$$

外表面的电势为

$$V' = \int_{2R}^\infty E\,dr = \frac{q+q_0}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{5q_0}{168\pi\epsilon_0 R}.$$

2.28 解答

电位移为

$$D = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi a^3}, & r \le a; \\ \dfrac{q}{4\pi r^2}, & r > a. \end{cases}$$

电场强度为

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^3}, & r \le a; \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a. \end{cases}$$

场能密度为

$$w = \frac{1}{2}DE = \begin{cases} \dfrac{q^2r^2}{32\pi^2\epsilon_r\epsilon_0 a^6}, & r \le a; \\ \dfrac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r > a. \end{cases}$$

电场能量为

$$W = \int_0^\infty w4\pi r^2\,dr = \int_0^a \frac{q^2r^4}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^6}\,dr + \int_a^\infty \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}\left(1+\frac{1}{5\epsilon_r}\right).$$

2.31 解答

雨滴表面的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

电场能量为

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

两个相同的雨滴电场能量之和为

$$W' = 2\frac{(Q/2)^2}{8\pi\epsilon_0(R/2^{1/3})} = \frac{1}{4^{1/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

n 个相同的雨滴电场能量之和为

$$W'' = n\frac{(Q/n)^2}{8\pi\epsilon_0(R/n^{1/3})} = \frac{1}{n^{2/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

2.32 解答

内球电势为

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

因此

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1}{R_2}q_2.$$

电场强度为

$$E = \begin{cases} \dfrac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 \le r \le R_2; \\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_2. \end{cases}$$

电场能量为

$$W = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2\, dr = 2\pi\epsilon_0 V^2 R_1 - \frac{q_2^2\,(R_1 - R_2)}{8\pi\epsilon_0 R_2^2}.$$

2.34 解答

假设 C_1, C_2, C_3 极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$。因此

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

$$\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} = 0,$$

$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}=V.$$

$$Q_1=6.3\times10^{-4}\,\mathrm{C},\quad Q_2=2.7\times10^{-4}\,\mathrm{C},\quad Q_3=3.6\times10^{-4}\,\mathrm{C}.$$

$$V_1=\frac{Q_1}{C_1}=210\,\mathrm{V},\quad V_2=\frac{Q_2}{C_2}=90\,\mathrm{V},\quad V_3=\frac{Q_3}{C_3}=90\,\mathrm{V}.$$

系统能量为

$$W=\frac{1}{2}C_1V_1^2+\frac{1}{2}C_2V_2^2+\frac{1}{2}C_3V_3^2=94.5\,\mathrm{J}.$$