# 电磁学 C 第二周作业答案

张竞一、杨玄烨

2025 年 9 月 27 日

**习题 1.6**：一个细圆环的半径为 R, 均匀带电, 带电量为 Q, 在圆环的轴线上有一个均匀带电的直线, 单位长度的带电量为 $\lambda$, 起点在圆心处, 终点在无限远处, 求它们之间的库仑力。

**解答**：选取距离圆心 $(x, x+dx)$ 的线段，它受到的库仑力为

$$dF = \frac{Q(\lambda\,dx)}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} = \frac{Q\lambda x\,dx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$

因此，直线受到的库仑力为

$$F = \int_0^\infty \frac{Q\lambda x\,dx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

**习题 1.7**：半径为 $R$ 的细金属环带电量为 $+Q$，小球质量为 $m$，电量为 $-q$。它可以沿着穿过环中心的一根细轨道无摩擦地运动。如果把小球放置在与环中心距离为 $x_0 \ll R$ 处无初速地释放，求小球的运动规律。

**解答**：小球受到的库仑力为

$$F = m\ddot{x} = -\frac{Qqx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}} \approx -\frac{Qqx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

因此，小球做周期振动，其规律为

$$x = x_0\cos\left(\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}\right)^{1/2} t\right).$$

**习题 1.10**：半径为 $R$ 的无限长圆柱体，柱内电荷密度为 $\rho = ar - br^3$，$r$ 为柱内某点到圆柱体轴线的距离，$a, b$ 为常数。求圆柱体内外电场分布。

**解答**：根据高斯定理，柱内部 $\mathcal{R} < R$ 的电场强度为

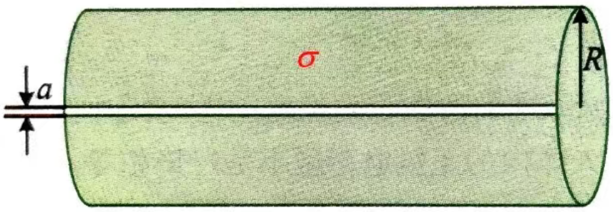
$$E = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}\varepsilon_0}\int_0^{\mathcal{R}} \rho 2\pi r\,dr = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}\varepsilon_0}\int_0^{\mathcal{R}}\left(ar-br^3\right)2\pi r\,dr = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}a\mathcal{R}^2 - \frac{1}{5}b\mathcal{R}^4\right).$$

柱外部为 $\mathcal{R} > R$ 的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}\varepsilon_0}\int_0^R \rho 2\pi r\,dr = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}\varepsilon_0}\int_0^R (ar - br^3)2\pi r\,dr = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{aR^3}{3\mathcal{R}} - \frac{bR^5}{5\mathcal{R}}\right).$$

**(* 若以群文件答案为准，表达式应该为 $\rho = ar - br^2$*)**

**习题 1.18：(了解即可)** 一个无限长半径为 $R$ 的圆柱面均匀带电，电荷密度为 $\sigma$，圆柱面上有一条宽度为 $a$ ($a \ll R$) 无限长的狭缝，如图所示，求圆柱面内外任一点的电场强度。




**习题 1.18 图**

**解答：** 对于无限长均匀带电圆柱面，其电场具有轴对称性。根据高斯定理：

内部电场（$r < R$）：

$$E = 0$$

外部电场（$r > R$）：

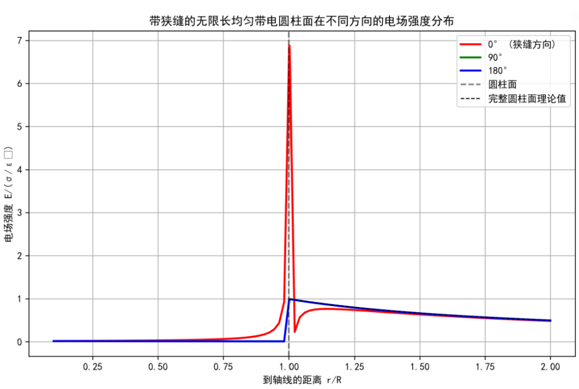
$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

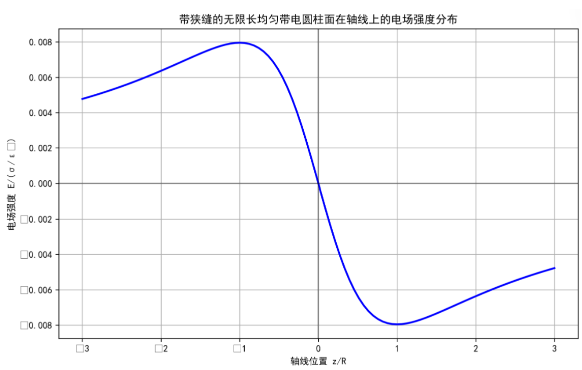
方向沿径向向外。

狭缝处缺失的电荷可以等效为一个线电荷密度为 $\lambda' = -\sigma a$ 的无限长带电直线。其在距离直线 $r'$ 处的电场强度为：

$$E = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{-\sigma a}{2\pi\varepsilon_0 r'}$$

方向沿径向指向狭缝。




带狭缝的无限长均匀带电圆柱面的电场分布可以通过电场叠加原理求解：

1. 内部电场（$r < R$）：

$$\vec{E} = \frac{-\sigma a}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - R\hat{x}}{|\vec{r} - R\hat{x}|^2}$$

2. 外部电场（$r > R$）：

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\hat{r} + \frac{-\sigma a}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - R\hat{x}}{|\vec{r} - R\hat{x}|^2}$$

其中 $\vec{r}$ 是场点位置矢量，$\hat{r}$ 是径向单位矢量，$\hat{x}$ 是狭缝方向的单位矢量。

**习题 1.20**：在半导体 p-n 结附近总是堆积着正、负电荷, 在区内 1.20 有正电荷,p 区内有负电荷, 两区电荷的代数和为 0 我们把 p-n 结看成一对带正、负电荷的无限大平板, 它们相互接触。取坐标 x 的原点取在 p、n 区的交界面上，n 区的范围为 $-x_n \le x \le 0$，p 区的范围为 $0 \le x \le x_p$。设两区内电荷体密度分布是均匀的：

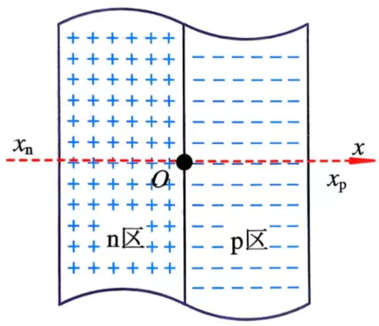
n 区：$\rho_e(x) = N_D e$;

p 区：$\rho_e(x) = -N_A e$;

这称为突变结模型，其中 $N_D$、$N_A$ 为常数，且满足条件 $N_A x_p = N_D x_n$。证明电场分布如下：

(1) n 区：$E(x) = \frac{N_D e}{\epsilon_0}(x_n + x)$;

(2) p 区：$E(x) = \frac{N_A e}{\epsilon_0}(x_p - x)$。




习题 1.20 图

**解答**：根据高斯定理，在 N 区、P 区以外，电场强度均为 0。

为了计算 N 区的电场强度，选取两侧分别位于 $x_1 < -x_n, -x_n \le x_2 \le 0$，横截面积为 $A$ 的圆柱面，因此

$$E_A = \frac{N_D e\left(x_n + x\right)A}{\varepsilon_0},$$

$$E = \frac{N_D e\left(x_n + x\right)}{\varepsilon_0}.$$

选取两侧分别位于 $0 \le x_1 \le x_p, x_2 > x_p$，横截面积为 $A$ 的圆柱面，同理可得，P 区的电场强度为

$$E = \frac{N_A e\left(x_p - x\right)}{\varepsilon_0}.$$

**PPT 习题 2**：电荷 $Q$ 均匀分布在半径为 $a$ 的球面上，在距离球心 $b$ $(b > a)$ 处有一点电荷 $q$，求 $Q$ 对 $q$ 的库仑作用力。

**解答**：对于均匀带电的球面，根据高斯定理，球面外的电场与电荷全部集中在球心处的点电荷产生的电场相同。因此，在球面外任意点，电场强度为：

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

其中 $r$ 是该点到球心的距离。

电荷 $q$ 位于距离球心 $b$ 处（$b > a$），处于球面外部。电场强度为：

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$q$ 在该电场中受到的库仑力为：

$$F = qE = q \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

方向取决于 $Q$ 和 $q$ 的电性。

**PPT 习题 3**：PPT 习题 2 中，电荷 $Q$ 均匀分布在半径为 $a$ 的球体内，$q$ 受力如何？

**解答**：与 PPT 习题 2 相同

**PPT 习题 4**：题 1 中，如果电荷 $q$ 在球面内，其受力如何？如果 $q$ 位于半径为 $a$ 的球内，距离球心 $b$，$q$ 受力如何？

**解答**：

**情况 1：电荷 $Q$ 均匀分布在球面上，$q$ 位于球面内**

在球面**内部**任意位置，电场强度 E = 0, 原因是球面对称，内部任一点的电场贡献相互抵消。因此，$q$ 位于球面内时，受到的力为：$F = qE = q \cdot 0 = 0$

**情况 2：电荷 $Q$ 均匀分布在球体内，$q$ 距离球心 $b$（$b < a$）**

高斯面内包含的电荷为

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{Qb^3}{a^3}.$$

则在球体内部距离球心 $b$ 处，电场强度为

$$E = \frac{Qb}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

则

$$F = qE = q \cdot \frac{Qb}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{Qqb}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

方向取决于 $Q$ 和 $q$ 的电性。