第三周答案

张竞一、杨玄烨

2025 年 10 月 26 日

0.0.1 1.12 解答

考虑一半径为 R 的半圆形带电体，线电荷密度为 λ。我们需要计算半圆形部分以及两侧无限长直线部分在原点 O 处产生的电场强度。

1. 半圆部分在 O 点产生的电场强度 E_1

半圆上取微元角度 $d\theta$，对应的微元长度为 $Rd\theta$，微元电荷为

$$dq = \lambda R d\theta.$$

该微元在 O 点产生的电场大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

由于对称性，水平分量相互抵消，只有竖直分量 $dE_y = dE\sin\theta$ 保留：

$$dE_y = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\theta.$$

因此，半圆部分在 O 点产生的电场强度为

$$E_1 = \int_0^\pi dE_y = \int_0^\pi \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\theta\, d\theta.$$

计算积分：

$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(-\cos\pi + \cos 0\right).$$

由于 $\cos\pi = -1$ 且 $\cos 0 = 1$，得

$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(1+1\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

2. 右上方直线部分在 O 点产生的电场水平分量 E_2

右上方直线从 $(R, 0)$ 延伸到无穷远。取微元 dx，对应的电荷为

$$dq = \lambda dx.$$

该微元在 O 点产生的电场大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{R^2 + x^2}.$$

场点 O 到微元的距离为 $\sqrt{R^2 + x^2}$，电场方向与 x 轴负方向的夹角的余弦为

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

因此水平分量为

$$dE_x = dE \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

化简得

$$dE_x = \frac{\lambda R dx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

由于电场方向水平向左，E_2 为负，即

$$E_2 = -\int_0^\infty dE_x = -\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

令 $x = Rt$，则 $dx = Rdt$，积分限不变：

$$E_2 = -\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{Rdt}{(R^2(1 + t^2))^{3/2}} = -\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}}.$$

计算积分 $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$：

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \left[\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right]_0^\infty = 1.$$

因此，

$$E_2 = -\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

3. 右下方直线部分

由对称性，右下方直线部分在 O 点产生的电场水平分量也为 E_2。

4. 总电场

O 点的总电场为半圆部分的电场 E_1 与两部分直线电场的水平分量之和：

$$E = E_1 + 2E_2.$$

代入 $E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ 和 $E_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$，得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} + 2\left(-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = 0.$$

因此，O 点的合电场强度为

$$\boxed{E = 0}.$$

在考试中过程不要省略太多，原始公式应该写全，防止扣分。但是数学相关的计算过程可以不写得十分详细。同时最好不要一个式子写一大串，分开写更好，防止有中间错误无法给分

0.0.2 1.13 解答

根据高斯定理，线电荷密度为 λ 的无限长直导线在距离为 R 的位置产生的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

1. 半圆柱面的电场垂直分量

考虑一个半圆柱面，圆心角范围为 $(\theta, \theta + d\theta)$，半径为 R，面电荷密度为 σ。
微元面的电荷为

$$dq = \sigma R d\theta.$$

根据电场叠加原理，该微元面对 O 点的电场大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma R d\theta}{R^2} = \frac{\sigma d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

然而，由于对称性，我们实际上可以借用无限长直导线的电场结果，得到微元面在 O 点的电场大小为

$$dE = \frac{\sigma R d\theta}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

电场方向与半径垂直，因此垂直分量为

$$dE^{\perp} = dE\sin\theta = \frac{\sigma R d\theta}{2\pi\epsilon_0 R}\sin\theta = \frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0}\sin\theta.$$

2. 总电场垂直分量

对整个半圆柱面（圆心角从 0 到 π）进行积分，得到 O 点的总电场垂直分量：

$$E^{\perp} = \int_0^{\pi} dE^{\perp} = \int_0^{\pi} \frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0} \sin\theta.$$

计算积分：

$$E^{\perp} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta.$$

由于

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2,$$

因此

$$E^{\perp} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot 2 = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}.$$

$$\boxed{E^{\perp} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}}.$$

0.0.3 1.14 解答

$$\begin{aligned}
E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(r+l)^2}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - 2\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{2x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \\
&\approx \frac{3qx^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{3ql^2}{2\pi\epsilon_0 r^4},
\end{aligned}$$

其中 $x = \frac{l}{r} \ll 1$。

0.0.4 1.25 解答

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，选取半径为 $r \in (R_2, R_3)$ 的球面，可以得出，球壳内侧带电量为 $-q$。而球壳内侧与外侧总带电量为 Q，因此球壳外侧带电量为 $Q+q$。因为导体电势处处相等，所以对于球的电势，我们只需计算球心处的电势即可，其取值为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{Q+q}{R_3}\right) = 0.$$

因此

$$q = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_2 R_3} Q.$$

区域 (R_3, ∞) 之间的电场强度为

$$E = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因此，球壳的电势为 R_3 处的电势，

$$V = \int_{R_3}^{\infty} E\,dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$$

0.0.5 1.30 解答

根据高斯定理，$R \geq r_a$ 的电场强度为 0 。$R < r_a$ 的电荷密度「不考虑原子核」为

$$\rho = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi r_a^3} = -\frac{3Ze}{4\pi r_a^3}.$$

因此，电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(Ze + \rho\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{R^3}{r_a^3}\right).$$

电势为

$$V = \int_r^{r_a} E\,dR = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3} - \frac{1}{2r_a}\right) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3}\right).$$

0.0.6 1.34 解答

距离中心为 $(R, R+dR)$ 的区域在 P 点产生的电场强度为

$$dE = \frac{\sigma 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0 (x^2+R^2)} \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}.$$

因此，P 点的电场强度为

$$E = \int_r^{\infty} \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{r/x}^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0 (r^2+x^2)^{1/2}}.$$

电势为

$$V = -\int_0^x \frac{\sigma y}{2\epsilon_0 (r^2+y^2)^{1/2}} dy = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left((r^2+x^2)^{1/2} - r\right).$$

0.0.7 2.1 解答

因为 q_1, q_2 位于空腔的中心，所以空腔内表面的感应电荷是均匀分布的，这表明 q_1, q_2 受到的静电力为 0。

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，可以得出，q_1, q_2 对应空腔内表面的感应电荷分别为 $-q_1, -q_2$。这表明 A 外表面的电荷量为 $q_1 + q_2$。因此，根据高斯定理，q_3 处的电场强度为

$$\frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

这表明 q_3 受到的静电力为

$$\frac{(q_1 + q_2)q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

根据牛顿第三定律，导体受到的静电力与三个电荷受到的总静电力大小相同，方向相反，因此其取值为

$$-\frac{(q_1 + q_2)q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

0.0.8 2.2 解答

这题从作业来看情况不太乐观，不少同学知道方法但在一些细节上出错。

这道题解法比较多，在这里给出两种典型的解法：一种是利用能量守恒求功，另一种是求出导体板在每个位置处的受力，积分求功。

两种方法都需要得到导体板左右两侧的电场，因为平行板电容器极板间距远小于极板尺寸，所以极板和导体板均可视作无限大平板。以向左为正，设极板面积为 S，导体板左侧电荷为 Q_1，由电荷守恒，右侧电荷为 $Q_2 = Q - Q_1$。则左极板上电荷为 $-Q_1$，右极板上电荷为 $-Q_2$（注：这个条件是由平行板电容器外部电场为 0 和导体内部电场为 0 得到的）。所以由高斯定理，导体板左侧电场

$$E_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S},$$

右侧电场

$$E_2 = -\frac{Q_2}{\varepsilon_0 S} = -\frac{Q_1 - Q}{\varepsilon_0 S}$$

设导体板从初始的 AB 位置向右移动了 x 距离，因为右极板与左极板的电势差为 V，所以有

$$E_1(L + x) + E_2(4L - x) = V$$

即

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}(L + x) + \frac{Q_1 - Q}{\varepsilon_0 S}(4L - x) = V$$

解得

$$Q_1=\frac{1}{5}\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+Q\left(4-\frac{x}{L}\right)\right)$$

法一：初始在 AB 位置时 $x=0$，$Q_1^{(i)}=\frac{1}{5}\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+4Q\right)$，$E_1^{(i)}=\frac{Q_1^{(i)}}{\varepsilon_0S}$，所以左侧的能量密度为

$$\omega_{e1}^{(i)}=\frac{1}{2}D_1^{(i)}\cdot E_1^{(i)}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E_1^{(i)}\right)^2=\frac{1}{50}\frac{\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+4Q\right)^2}{\varepsilon_0S^2}$$

同理右侧的能量密度为

$$\omega_{e2}^{(i)}=\frac{1}{50}\frac{\left(Q-\frac{V\varepsilon_0S}{L}\right)^2}{\varepsilon_0S^2}$$

因为电场只在平行板间存在，所以初始总静电能为

$$W_e^{(i)}=\iiint\omega_e^{(i)}\,dV=\omega_{e1}^{(i)}\cdot LS+\omega_{e2}^{(i)}\cdot 4LS=\frac{2Q^2L}{5\varepsilon_0S}+\frac{V^2\varepsilon_0S}{10L}$$

末态在 CD 位置时 $x=2L$,$Q_1^{(f)}=\frac{1}{5}\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+2Q\right)$,$\omega_{e1}^{(f)}=\frac{1}{50}\frac{\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+2Q\right)^2}{\varepsilon_0S^2}$,$\omega_{e2}^{(f)}=\frac{1}{50}\frac{\left(3Q-\frac{V\varepsilon_0S}{L}\right)^2}{\varepsilon_0S^2}$，所以末了总静电能为

$$W_e^{(f)}=\omega_{e1}^{(f)}\cdot 3LS+\omega_{e2}^{(f)}\cdot 2LS=\frac{3Q^2L}{5\varepsilon_0S}+\frac{V^2\varepsilon_0S}{10L}$$

又因为初态到末态，有 $-\frac{2}{5}Q$ 的电荷从左极板转移到右极板，所以电源非静电力做功为

$$W_{电源}=-\frac{2}{5}QV$$

所以由能量守恒，外力做功为

$$W=W_e^{(f)}-W_e^{(i)}-W_{电源}=\frac{Q^2L}{5\varepsilon_0S}+\frac{2}{5}QV$$

法二：因为向右移动 x 距离时 $Q_1(x)=\frac{1}{5}\left(\frac{V\varepsilon_0S}{L}+Q\left(4-\frac{x}{L}\right)\right)$，$E_1(x)=\frac{Q_1(x)}{\varepsilon_0S}$，$Q_2(x)=Q-Q_1(x)$，$E_2(x)=-\frac{Q_2(x)}{\varepsilon_0S}=\frac{Q_1(x)-Q}{\varepsilon_0S}$（注意这里的 $E_1(x)$ 和 $E_2(x)$ 为总电场），所以受到的电场力为

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(E_1(x)+0\right)Q_1(x)+\frac{1}{2}\left(E_2(x)+0\right)Q_2(x)=\frac{1}{2\varepsilon_0S}\left(2QQ_1(x)-Q^2\right)$$

所以外力做功为

$$W=-W_{电}=\int_0^{2L}F(x)\,dx$$

$$=\int_0^{2L}\frac{1}{2\varepsilon_0S}\left(2Q\left(\frac{V\varepsilon_0S}{5L}+Q\left(4-\frac{x}{L}\right)\right)-Q^2\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{4QV\varepsilon_0 S}{5} + \frac{16Q^2L}{5} - 2Q^2L - \frac{1}{5}Q^2(2L)^2\right) \\
&= \frac{2}{5}QV + \frac{Q^2L}{5\varepsilon_0 S}
\end{aligned}
$$

与法一结果相同。

0.0.9 2.3 解答

假设它们分别为 $Q_1, \ldots, Q_8$。根据高斯定理可得：

$$
\begin{aligned}
Q_2 + Q_3 &= 0, \\
Q_4 + Q_5 &= 0, \\
Q_6 + Q_7 &= 0.
\end{aligned}
$$

每块板上带电量是已知的，因此：

$$
\begin{aligned}
Q_1 + Q_2 &= 5\,\mathrm{C}, \\
Q_3 + Q_4 &= 1\,\mathrm{C}, \\
Q_5 + Q_6 &= 1\,\mathrm{C}, \\
Q_7 + Q_8 &= 2\,\mathrm{C}.
\end{aligned}
$$

而导体板内部电场强度为 0，我们分析最左边的导体板可得：

$$
\frac{Q_1}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 A} - \cdots - \frac{Q_8}{2\epsilon_0 A} = 0,
$$

即

$$
Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_8 = 0.
$$

可以得出

$$
Q_1, \ldots, Q_8 = 4.5, 0.5, -0.5, 1.5, -1.5, 2.5, -2.5, 4.5\,(\mathrm{C}).
$$

如果用一根导线把中间两个板接通，那么 D, E 表面电荷被中和，因此

$$
Q_1', \ldots, Q_8' = 4.5, 0.5, -0.5, 0, 0, 2.5, -2.5, 4.5\,(\mathrm{C}).
$$

0.0.10 2.7 解答

假设两个极板内侧带电量分别为 Q_1, Q_2，外侧带电量分别为 Q_3, Q_4。根据高斯定理可得

$$
Q_1 + Q_2 = 0.
$$

根据电荷守恒可得「因为电荷可能会通过电路转移，所以 $Q_1 + Q_2, Q_3 + Q_4$ 并不一定等于 Q」

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 2Q.$$

而极板内部的电场强度为 0，因此

$$\frac{Q_3}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_1}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_4}{2\epsilon_0 A} = 0,$$

即

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 - Q_4 = 0.$$

极板之间的电势差为

$$V = \frac{Q_1}{C}.$$

因此

$$\begin{aligned} Q_1 &= CV, \\ Q_2 &= -CV, \\ Q_3 &= Q, \\ Q_4 &= Q. \end{aligned}$$

最好写上极板内外分别的带电量，防止扣分

0.0.11 2.10 解答

设上半部分电场强度为 E_1，下半部分电场强度为 E_2。
导体薄片处的电荷面密度会产生电场。根据高斯定理，薄片上下两侧的电场强度差为：

$$E_1 - E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

极板间的总电势差 $V = U_A - U_B = U$。由于电势差等于电场强度与距离的乘积，有：

$$V = E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{2}(E_1 + E_2)$$

得：

$$E_1 + E_2 = \frac{2V}{d}$$

联立方程：

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S}, \\ E_1 + E_2 = \frac{2V}{d}, \end{cases}$$

解得：

$$E_1 = \frac{V}{d} + \frac{q}{2\epsilon_0 S}, \quad E_2 = \frac{V}{d} - \frac{q}{2\epsilon_0 S}$$

薄片位于上极板下方 $\frac{d}{2}$ 处，电势为 V'。从上极板到薄片，电势降落为 $E_1 \cdot \frac{d}{2}$，因此薄片电势为：

$$V' = U - E_1 \cdot \frac{d}{2} (= E_2 \cdot \frac{d}{2})$$

代入 $E_1 = \frac{V}{d} + \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ 和 $V = U$，得：

$$V' = U - \left(\frac{V}{d} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} \right) \cdot \frac{d}{2}$$

因此，

$$\boxed{V' = \frac{U}{2} - \frac{qd}{4\epsilon_0 S}}$$

这里群里答案有误，有些同学给批错了，进行了分数更改

0.0.12 2.11 解答

假设 C_1, C_2, C_3 左极板、右极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$。一开始，$C_1$ 左极板、右极板带电量分别为 $C_1V_0, -C_1V_0$。因此

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= C_1 V_0, \\ -Q_2 + Q_3 &= 0, \\ -Q_1 - Q_3 &= -C_1 V_0. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3},$$

可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{C_1^2 (C_2 + C_3) V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}, \\ Q_2 = Q_3 &= \frac{C_1C_2C_3V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_1 (C_2 + C_3) V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}, \\ V_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1C_3V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}, \\ V_3 &= \frac{Q_3}{C_3} = \frac{C_1C_2V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}. \end{aligned}$$