1. ① $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 结果为标量，$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta$，$\theta$ 为 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角.

表示了 $\vec{A}$ 在 $\vec{B}$ 上的投影与 $\vec{B}$ 的乘积

$\vec{A}\times\vec{B}$ 结果为向量，$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\cdot\hat{n}$，$\hat{n}$ 为垂直于 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 所在平面的单位向量，且 $\vec{A},\vec{B},\hat{n}$ 构成右手系.

表示了 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 形成平行四边形的面积

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 即混合积，R^3 上混合积定义如下

n 维数组空间 $\mathbf{R}^n$ 上, 可以定义内积如下: 对 $\boldsymbol{v}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$, $\boldsymbol{w}=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n.$$

在这个内积下 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维内积空间, 这时 $\mathbf{R}^n$ 的 (自然的) 一组标准正交基为 $\{\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)|i=1,2,\cdots,n\}$.

显然, 类似 (1.1), 我们可以建立 n 维欧氏向量空间与 $\mathbf{R}^n$ 间的等同.

以下我们只在 $\mathbf{R}^3$ 中讨论. 为此记 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

$\mathbf{R}^3$ 的向量间除了加法、数乘、内积运算外, 还有外积运算. 对 $\boldsymbol{v}=(x^1,x^2,x^3)$, $\boldsymbol{w}=(y^1,y^2,y^3)\in\mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的外积定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}&=\left(x^2y^3-x^3y^2,\ -x^1y^3+x^3y^1,\ x^1y^2-x^2y^1\right)\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x^1&x^2&x^3\\y^1&y^2&y^3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

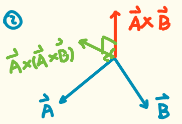
两个向量的外积仍是一个向量, 外积运算满足反交换律, 但不满足结合律.

$\mathbf{R}^3$ 的三个向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$, 可以定义混合积

$$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3\rangle.\tag{1.3}$$

混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的有向体积.

②



方向如图，与 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 共面.

2. ① $\vec{n}\perp(\vec{A}-\vec{B})$，$\vec{A}-\vec{B}\parallel S$

② $\vec{n}\parallel(\vec{A}-\vec{B})$. $\vec{A}-\vec{B}\perp S$.

3. ① $\hat{A}=\frac{3}{7}\vec{e}_1+\frac{2}{7}\vec{e}_2-\frac{6}{7}\vec{e}_3$ $\quad\hat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1+\vec{e}_3)$

② $\vec{A}\cdot\vec{B}=-3$. $\vec{A}\times\vec{B}=(3,2,-6)\times(1,0,1)=\left(\begin{vmatrix}2&-6\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-6&3\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(2,-9,-2)$ （以 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 为标准正交基）

$\theta=\arccos(-\frac{3\sqrt{2}}{14})$

③ 分量：$a=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

向量分量：$\vec{E}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\cdot\vec{B}=-\frac{3}{2}\vec{e}_1-\frac{3}{2}\vec{e}_3$

1.3

令地球与月球的电荷量分别为 q_1,q_2，那么 $q_1+q_2=Q$，库仑力为 $\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}$，万有引力为 $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$。因此

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}=\frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

$$q_1q_2=4\pi\epsilon_0Gm_1m_2.$$

(1) $Q=q_1+q_2\geq2\left(q_1q_2\right)^{1/2}$，因此

$$Q\geq2\left(4\pi\epsilon_0Gm_1m_2\right)^{1/2}=1.14\times10^{-14}\ \mathrm{C}.$$

(2) 此时 $q_1=Cm_1,q_2=Cm_2$，其中 C 是常数。因此

$$(Cm_1)(Cm_2)=4\pi\epsilon_0Gm_1m_2,$$

$$C=\left(4\pi\epsilon_0G\right)^{1/2}.$$

因此

$$Q=q_1+q_2=C(m_1+m_2)=\left(4\pi\epsilon_0G\right)^{1/2}(m_1+m_2)=5.21\times10^{14}\ \mathrm{C}.$$