磁学部分第四次答案

张竞一

2025 年 12 月 10 日

6.1 解答

在左边的区域，导轨接入的长度为

$$L = 2vt\tan\alpha.$$

电动势为

$$\mathcal{E} = BLv = 2Bv^2t\tan\alpha.$$

在右边的区域，导轨接入的长度为 l，因此电动势为 $\mathcal{E}' = Blv$。

6.2 解答

感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt},$$

其中 $\Phi = NBS$ 是通过线圈的磁通量。因此线圈电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{NS}{R}\frac{dB}{dt}.$$

通过的总电量为

$$Q = \int Idt = -\frac{NS}{R}\int_{B_0}^{-B_0} dB = \frac{2NB_0S}{R}.$$

线圈处的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{QR}{2NS}.$$

6.3 解答

(1) 线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \log \frac{b}{a} \sin \omega t.$$

感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \omega I_0 l}{2\pi} \log \frac{b}{a} \cos \omega t.$$

(2) 线圈的磁通量为

$$\Phi' = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \log \frac{b+vt}{a+vt} \sin \omega t.$$

感应电动势为

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \left(-\omega \cos \omega t \log \frac{b+vt}{a+vt} + \frac{(b-a)v}{(a+vt)(b+vt)} \sin \omega t \right).$$

(3) 线圈电流为

$$I' = \frac{\mathcal{E}'}{R}.$$

需要施加的力为

$$F = \frac{\mu_0 I' l}{2\pi} \left(\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{b+vt} \right) = \frac{\mu_0 I_0 \mathcal{E}' l}{2\pi R} \frac{b-a}{(a+vt)(b+vt)} \sin \omega t,$$

其中 $\mathcal{E}'$ 的取值如 (2) 所示。

6.6 解答

线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I (d-vt)}{2\pi} \int_{L_0}^{L_0+L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I (d-vt)}{2\pi} \log \frac{L_0+L}{L_0}.$$

感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \log \frac{L_0+L}{L_0}.$$

6.9 解答

(1) 收尾速度对应磁力与重力垂直，因此

$$\frac{B^2 l^2 v_T}{R} = mg,$$

$$v_T = \frac{mgR}{B^2 l^2}.$$

(2) 因为平行于平面分量的磁场不会给予导线作用力，而垂直于平面分量的磁场为 $B\sin\theta$，因此只需将 (1) 题的 B 替换为 $B\sin\theta$ 即可，

$$v_T' = \frac{mgR}{B^2l^2\sin^2\theta}.$$

6.5 解答

1. $\mathcal{E} = Bbv = 0.62\times10^{-4}\times2.5\times(60/3.6) = 2.6\times10^{-3}\,\mathrm{V}$.

2. $E = \mathcal{E}/b = Bv = 0.62\times10^{-4}\times(60/3.6) = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

3. $\sigma = \epsilon_0 E = 8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{-3} = 9.1\times10^{-15}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$.

6.14 解答

连接 Oa, Oc，因为涡旋电场与半径方向垂直，所以 V_{ac} 即为 ΔOac 区域产生的感应电动势。ΔOac 区域的磁通量为

$$\Phi_{\Delta Oac} = B\cdot\mathrm{Area}(\Delta Oac) = \frac{\sqrt{3}}{4}BR^2.$$

感应电动势为

$$\mathcal{E}_{ac} = V_{ac} = -\frac{d\Phi_{\Delta Oac}}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{4}kR^2.$$

连接 Oa, Ob，因为涡旋电场与半径方向垂直，所以 V_{ab} 即为 ΔOab 区域产生的感应电动势。ΔOab 区域的磁通量为

$$\Phi_{\Delta Oab} = B\cdot\mathrm{Area}(\Delta Oab) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)BR^2.$$

感应电动势为

$$\mathcal{E}_{ab} = V_{ab} = -\frac{d\Phi_{\Delta Oab}}{dt} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)kR^2.$$

6.15 解答

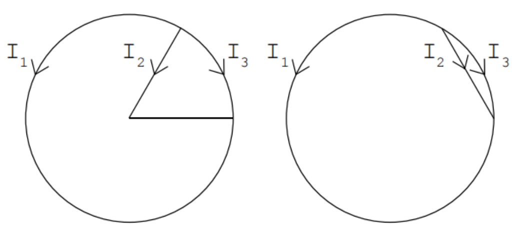

图 1

(1) 如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得

$$\frac{5}{6}rI_1 - \frac{1}{6}rI_3 = \pi a^2 k,$$

$$RI_2 - \frac{1}{6}rI_3 = \frac{1}{6}\pi a^2 k.$$

根据电荷守恒定律可得

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

因此

$$I_1 = \frac{\pi a^2 k}{r}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -\frac{\pi a^2 k}{r}.$$

伏特表的读数为 $I_2 R = 0$。
(2) 如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得

$$\frac{5}{6}rI_1 - \frac{1}{6}rI_3 = \pi a^2 k,$$

$$RI_2 - \frac{1}{6}rI_3 = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) a^2 k.$$

根据电荷守恒定律可得

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

因此

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} + 6\pi}{6}\frac{a^2 k}{r}, \quad I_2 = -\sqrt{3}\frac{a^2 k}{r}, \quad I_3 = \frac{5\sqrt{3} - 6\pi}{6}\frac{a^2 k}{r}.$$

伏特表的读数为 $I_2 R = -\frac{\sqrt{3}}{9}a^2 k$。

6.19 解答

$$\mathcal{E} = \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+x)}\omega x \, dx = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi}\left(L + b \log \frac{b}{b+L}\right).$$

6.10 解答

(1) 当大线圈通上电流 I 时，小线圈处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b}.$$

小线圈的磁通量为

$$\Phi = \pi a^2 B \cos\omega t = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \cos\omega t.$$

互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos\omega t.$$

(2) 感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \omega \sin\omega t.$$

感应电流为

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin\omega t.$$

(3) 小线圈的磁矩为

$$m = \pi a^2 I' = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin\omega t.$$

小线圈受到磁力的力矩为

$$\Gamma = mB \sin\omega t = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2}{4b^2 R} \omega \sin^2\omega t.$$

为了保持平衡，小线圈所需的外力矩为

$$-\Gamma = -\frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2}{4b^2 R} \omega \sin^2\omega t.$$

(4) 大线圈的互感电动势为

$$\mathcal{E}' = M \frac{dI'}{dt} = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0 I}{4b^2 R} \omega^2 \cos^2\omega t.$$

6.16 解答

(1) 当螺线管通上电流 I 时，根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

螺线管的磁通量为

$$\Phi = N \int_R^{R+2a} Bh dr = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \log\frac{R+2a}{R}.$$

自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \log\frac{R+2a}{R}.$$

(2) 当直导线通上电流 I' 时，根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}.$$

螺线管的磁通量为

$$\Phi' = \int_R^{R+2a} B' h dr = \frac{\mu_0 N I' h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

互感系数为

$$M = \frac{\Phi'}{I'} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

6.23 解答

当长直导线通上电流 I 时，小回路的磁通量约为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} S.$$

因此，互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 S}{2\pi d}.$$

6.28 解答

根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t.$$

磁通量为

$$\Phi = SB = \mu_0 n S I_0 \sin \omega t.$$

因此

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n S I_0 \omega \cos \omega t.$$

6.27 解答

(1) 此时两组线圈电流方向相反，产生的磁场刚好抵消，因此磁通量为零，自感系数为零。

(2) 此时两组线圈电流方向相同，相当于 2 倍的线圈匝数。根据 6.16 题，自感系数与线圈匝数的平方成正比，因此自感系数为 $2^2 \times 0.050 = 0.20H$。

6.29 解答

电路中 5 个自感线圈（互感不计）的连接关系为：

L_1 与 L_2 串联，记为 $L_{12} = L_1 + L_2$；

L_3 与 L_4 串联，记为 $L_{34} = L_3 + L_4$；

L_5 跨接在 L_{12} 和 L_{34} 的中间节点之间，构成“桥接式”复合并联结构。

设总电流为 I，支路电流满足：

流经 L_{12} 的电流为 I_1，流经 L_{34} 的电流为 I_3，则 $I = I_1 + I_3$；

流经 L_5 的电流为 $I_5 = I_1 - I_3$（节点电流守恒）。

各支路的自感电动势（端电压）相等，即：

$$(L_1 + L_2)\frac{dI_1}{dt} = (L_3 + L_4)\frac{dI_3}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{dI_1}{dt} - L_5\frac{d(I_1 - I_3)}{dt}$$

整理端电压相等式：

$$(L_1 + L_2)\frac{dI_1}{dt} - L_5\frac{dI_1}{dt} + L_5\frac{dI_3}{dt} = (L_3 + L_4)\frac{dI_3}{dt}$$

$$[(L_1 + L_2) - L_5]\frac{dI_1}{dt} = [(L_3 + L_4) - L_5]\frac{dI_3}{dt}$$

结合总电流关系 $\frac{dI_3}{dt} = \frac{dI}{dt} - \frac{dI_1}{dt}$：

$$[(L_1 + L_2) - L_5]\frac{dI_1}{dt} = [(L_3 + L_4) - L_5]\left(\frac{dI}{dt} - \frac{dI_1}{dt}\right)$$

解出 $\frac{dI_1}{dt}$：

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{(L_3 + L_4) - L_5}{(L_1 + L_2) + (L_3 + L_4) - 2L_5} \cdot \frac{dI}{dt}$$

同理可得 $\frac{dI_3}{dt} = \frac{(L_1+L_2)-L_5}{(L_1+L_2)+(L_3+L_4)-2L_5} \cdot \frac{dI}{dt}$。

$\Psi = (L_1 + L_2)I_1 + (L_3 + L_4)I_3 + L_5(I_1 - I_3)$，结合自感定义 $L_{ab} = \frac{\Psi}{I}$，将 I_1、I_3 代入并积分化简，最终得到：

$$\boxed{L_{ab} = \frac{L_1L_2(L_3 + L_4) + L_3L_4(L_1 + L_2) + (L_1 + L_2)(L_3 + L_4)L_5}{(L_1 + L_3)(L_2 + L_4) + (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)L_5}}$$

6.31 解答

要证明这个关系，首先明确顺串、反串、顺并、反并的自感公式（互感为 M，自感 L_1、L_2）：

1. 顺串（同名端顺接）：

$$L_{\text{顺串}} = L_1 + L_2 + 2M$$

2. 反串（异名端顺接）：

$$L_{\text{反串}} = L_1 + L_2 - 2M$$

3. 顺并（同名端并联）：

$$L_{\text{顺并}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

4. 反并（异名端并联）：

$$L_{\text{反并}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$$LHS = L_{\text{顺并}} \cdot L_{\text{反串}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \cdot (L_1 + L_2 - 2M) = L_1L_2 - M^2$$

$$RHS = L_{\text{反并}} \cdot L_{\text{顺串}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \cdot (L_1 + L_2 + 2M) = L_1L_2 - M^2$$

故：

$$L_{\text{顺并}}L_{\text{反串}} = L_{\text{反并}}L_{\text{顺串}}$$

得证。