磁学部分第二次答案

张竞一

2025 年 11 月 26 日

4.12 解答

导体圆柱与导体圆管的电流密度分别为

$$J_1 = \frac{I}{\pi a^2},$$
$$J_2 = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}.$$

当 r < a 时

$$B = \frac{\mu_0 \pi r^2 J_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}.$$

当 a < r < b 时

$$B = \frac{\mu_0 \pi a^2 J_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

当 b < r < c 时

$$B = \frac{\mu_0 \left(\pi a^2 J_1 + \pi(r^2 - b^2) J_2\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}.$$

当 r > c 时

$$B = \frac{\mu_0 \left(\pi a^2 J_1 + \pi(c^2 - b^2) J_2\right)}{2\pi r} = 0.$$

4.13 解答

(1) 电流密度为

$$J = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}.$$

如果将空心管填满，并通过相同的电流密度，那么轴线上的磁感应强度为零。所以为了计算轴线上的磁感应强度，只需计算空心管对应电流在轴线上产生的磁感应强度，并将结果取相反数即可。这一取值大小为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J \pi b^2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

方向为 $O'O$ 以 O 点逆时针旋转 90°（以俯视图为准）。

空心管对应电流在空心管轴线上产生的磁感应强度为零。所以为了计算空心管轴线上的磁感应强度，只需将空心管填满，并通过相同的电流密度即可。这一取值为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0 dJ = \frac{\mu_0 Id}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

方向为 $O'O$ 以 O' 点顺时针旋转 90°（以俯视图为准）。

(2) 记大圆柱、小圆柱对应的区域分别为 Ω_1, Ω_2；J 是大小为电流密度 J，方向向上的向量。

对于 $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ 的任意位置 P，磁感应强度为

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{r} - \frac{\mu_0 b^2 \mathbf{J} \times \mathbf{x}}{2x^2},$$

其中 $\mathbf{r}, \mathbf{x}$ 是 $OP, O'P$ 对应的向量。

对于 Ω_2 的任意位置 Q，磁感应强度为

$$\mathbf{B}_0' = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times (\mathbf{s} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{z},$$

其中 $\mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是 $OQ, O'Q, OO'$ 对应的向量。

(3) 代入数据：$a = 10\,\mathrm{mm}$，$b = 0.5\,\mathrm{mm}$，$d = 5.0\,\mathrm{mm}$，$I = 20\,\mathrm{A}$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}{2\pi \times 5.0 \times 10^{-3} \times [(10 \times 10^{-3})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2]} = 2.01 \times 10^{-6}\,\mathrm{T} \tag{1}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 5.0 \times 10^{-3}}{2\pi \times [(10 \times 10^{-3})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2]} = 2.01 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} \tag{2}$$

4.20 解答

选取长度为 L 的长方形环路，根据安培环路定律可得

$$(B_2 - B_1)L = \mu_0 iL,$$

$$i = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}.$$

空间磁感应强度为

$$B_0 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2).$$

单位面积受到的作用力方向向左，大小为

$$P = iB_0 = \frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0}.$$

4.21 解答

线圈左边受到的磁力为

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

线圈右边受到的磁力为

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

因此受到的合力为

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

因为作用力与位置矢量方向相同，所以力矩为零。

4.22 解答

$(r, r+dr) \times (\theta, \theta + d\theta)$ 可以视为电流强度为

$$I = \sigma\omega r dr,$$

长度为

$$L = (rd\theta)\hat{\theta} = -r\sin\theta\, d\theta\, \mathbf{i} + r\cos\theta\, d\theta\, \mathbf{j},$$

的电流元。其中 $\hat{\theta} = -\sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j}$ 是 θ 增大方向的单位向量；$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 是 x, y 方向的单位向量。因此它受到的作用力为

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} = IL(B\mathbf{i}) = -\sigma\omega B r^2 \cos\theta\, d\theta\, r dr\, \mathbf{k}.$$

力矩为

$$d\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \sigma\omega B r^3 dr \cos^2\theta\, d\theta\, \mathbf{j} - \sigma\omega B r^3 dr \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, \mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{r} = r\cos\theta\, \mathbf{i} + r\sin\theta\, \mathbf{j}$。因此，圆盘受到的总力矩为

$$\mathbf{\Gamma} = \sigma\omega B \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\, \mathbf{j} - \sigma\omega B \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, \mathbf{i} = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega B R^4 \mathbf{j}.$$

4.23 解答

假设左上角的路径为 γ_1，通过电流强度为 I_1；右下角的路径为 γ_2，通过电流强度为 I_2。因此

$$I = I_1 + I_2.$$

因为 $\mathbf{B}$ 处处相等，所以左上角路径受到的磁力为

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\gamma_1} I_1 d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I_1 \left(\int_{\gamma_1} d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{B} = I_1 \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

同理可得，右下角路径受到的磁力为 $\mathbf{F}_2 = I_2 \mathbf{L} \times \mathbf{B}$。因此，总磁力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (I_1 + I_2) \mathbf{L} \times \mathbf{B} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$