# 磁学部分第一次答案

张竞一

2025 年 11 月 19 日

**4.1 解答**

如图所示，磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

因此，对于题目情况，

$$\cos\theta_1 = \frac{l/2}{\left(\frac{l^2}{4} + r^2\right)^{1/2}} = \frac{l}{(l^2+4r^2)^{1/2}},$$

$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1.$$

磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{l}{(l^2+4r^2)^{1/2}}.$$

当 $l \gg r$ 时，$(l^2+4r^2)^{1/2} \approx l$，因此

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

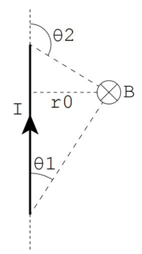



图 1

**4.3 解答**

系统可以视为无限长直导线与圆形导线的叠加，因此，$O$ 点磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R}{R^2} = \frac{(1+\pi)\mu_0 I}{2\pi R}.$$

### 4.5 解答

只有圆弧部分对圆心有贡献，很多同学忘记了第二小题中不同长度的圆弧电阻不同导致的分流效应而做错题。

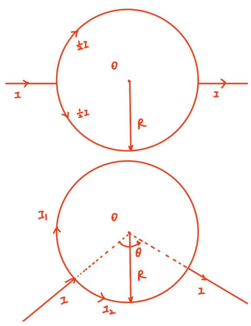
$$\boldsymbol{B}_1' = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\boldsymbol{l}_1 \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I_1 L_1 \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}_2' = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\boldsymbol{l}_2 \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} I_2 L_2 \boldsymbol{e}_z$$

**两路分流:**

$$I_1 L_1 = I_2 L_2$$

因此: $B = 0$ （1）是（2）的特殊情况，显然 $B$ 也为 0。



### 4.7 解答

以焦点为原点，抛物线可以利用参数方程来描述，其中 $t \in \mathbb{R}$。表示为矢量形式可得

$$x(t) = \frac{t^2}{4a} - a, \quad y(t) = t$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = \left(\frac{t^2}{4a} - a\right)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 是 $x, y$ 方向的单位向量。因此，

$$r(t) = \sqrt{\left(\frac{t^2}{4a} - a\right)^2 + t^2} = \frac{t^2}{4a} + a.$$

对于时间参数 $(t, t + dt)$，

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt = \left(\frac{t}{2a}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\right)dt.$$

焦点处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)}{r(t)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2a}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\right) \times \left(\left(\frac{t^2}{4a} - a\right)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}\right)}{\left(\frac{t^2}{4a} + a\right)^3} dt$$

$$= \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{t^2}{4a} + a\right)^2} \right) \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 I}{4a} \boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是 $z$ 方向的单位向量，并且 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0$。

**4.8 解答**

电子运动产生的电流为

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi R}.$$

中心的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi R^2} = 12.5\,\mathrm{T}.$$

**4.9 解答**

$(\theta, \theta + d\theta)$ 部分的球面旋转产生的电流强度为

$$dI = \frac{\omega Q \sin\theta \, d\theta}{4\pi}.$$

产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI (R\sin\theta)^2}{2\left((R\sin\theta)^2 + (r - R\cos\theta)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2 \sin^3\theta \, d\theta}{8\pi\left(R^2 - 2rR\cos\theta + r^2\right)^{3/2}}.$$

记 $\lambda = r/R$，总磁感应强度为

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi R} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta \, d\theta}{\left(1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right)^{3/2}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi R}, & -R < r < R; \\ \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{6\pi r^3}, & \text{其他}. \end{cases}$$

因为磁矩为 $m$ 的物体在轴线产生的磁场为

$$B' = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}.$$

因此

$$\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{6\pi r^3},$$

$$m = \frac{1}{3} \omega Q R^2.$$