泛函分析

第一章 度量空间

定义 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个非空集. $\mathscr{X}$ 叫作**度量空间**, 是指在 $\mathscr{X}$ 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$, 满足下列三个条件:

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z) \quad (\forall x,y,z \in \mathscr{X})$.

这里 ρ 叫作 $\mathscr{X}$ 上的一个**距离**, 以 ρ 为度量的度量空间 $\mathscr{X}$ 记作 $(\mathscr{X},\rho)$.

例: $\mathbb{R}^n$ 中 $d_2(x,y) \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^n |x_k-y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $d_\infty(x,y) \overset{def}{=} \max_{1\le k\le n} |x_k-y_k|$

例 (离散度量): $X \neq \phi$ $d(x,y) := \begin{cases} 1 & x\neq y \\ 0 & x=y \end{cases}$ $x,y\in X$

定义 1.1.3 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫作**收敛**到 x_0 是指: $\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$. 这时记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 或简单地记作 $x_n\to x_0$.

定义 1.1.4 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的一个子集 E 称为**闭集**, 是指: $\forall\{x_n\}\subset E$, 若 $x_n\to x_0$, 则 $x_0\in E$.

定义 1.1.5 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫作**基本列**, 是指: $\rho(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$. 这也就是说: $\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)$, 使得 $m,n\geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 如果空间中所有基本列都是收敛列, 那么就称该空间是**完备的**.

定义: (X,d), $A\subset X$, $\operatorname{diam} A \overset{def}{=} \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$ 称为A的直径

定义: $A\subset X$. $\forall x\in A$. $\exists r(x)>0$. s.t $B(x,r(x))\subset A$. 称A为开集

定义: (X,d). $A\subset X$, $x_0\in X$. 若 $\forall\varepsilon>0$. $B(x_0,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\phi$ 称 x_0 为A聚点(极限点)

$\Leftrightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A\setminus\{x_0\}$. s.t. $x_n\to x_0$.

Rmk: 对 $\forall x\in\bar{A}$, $\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$. $x_n\to x$

定义: 若 $\bar{A}=X$. 称A在X中稠密. 记为 $A \overset{dense}{\subset} X$

Rmk: $A \overset{dense}{\subset} X \Leftrightarrow \forall x\in X$, $\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$. s.t. $x_n\to x$.

若X有可数稠密子集则称X可分

例: 证明C[0,1]可分 (Weierstrass 逼近定理)

有 $P[0,1] \overset{def}{=} \{[0,1]$上的多项式$\}$. 则 $P[0,1] \overset{dense}{\subset} C[0,1]$

定义 1.1.8 设 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$ 是一个映射, 称它是连续的, 如果对于 $\mathscr{X}$ 中的任意点列 $\{x_n\}$ 和点 x_0,

$$\rho(x_n,x_0)\to 0 \Longrightarrow r(Tx_n,Tx_0)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

命题 1.1.9 为了 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$ 是连续的, 必须且只须 $\forall\varepsilon>0, \forall x_0\in\mathscr{X}, \exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$, 使得

$$\rho(x,x_0)<\delta \Longrightarrow r(Tx,Tx_0)<\varepsilon \quad (\forall x\in\mathscr{X}). \tag{1.1.4}$$

$T:X\to Y$连续 $\Leftrightarrow \forall U \overset{open}{\subset} Y$, $T^{-1}(U) \overset{open}{\subset} X$

定义 1.1.5 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫作**基本列**, 是指: $\rho(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$. 这也就是说: $\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)$, 使得 $m,n\geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 如果空间中所有基本列都是收敛列, 那么就称该空间是**完备的**.

例: $(\mathbb{R},d)$完备. $(\mathbb{Q},d)$不完备. 如 $x_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 有 $|x_m-x_n|=\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2}\to 0$ as $m,n\to\infty$.

即 $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{Q}$ 中 Cauchy 列, 但 $x_n\to\frac{\pi^2}{6}\notin\mathbb{Q}$.

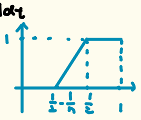
例: 证明 $(C[0,1],d)$完备, 其中 $d(f,g) \overset{def}{=} \max\limits_{t\in[0,1]}|f-g|$

设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C[0,1]$ 中任一基本列. 即对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $d(f_m,f_n)<\varepsilon$. $\forall m,n>N$.

基本列极限存在. 设为 $f_0(t)$ 令 $m\to\infty$. $|f_0(t)-f_n(t)|\le\varepsilon$, $\forall n>N(\varepsilon)$, 证毕

例: 证明 $(C[0,1],d_1)$不完备, 其中 $d_1(f,g) \overset{def}{=} \int_0^1|f-g|dt$

取 $f_n(t) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & t\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}) \\ nt-\frac{n}{2}+1 & t\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}) \\ 1 & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$ $n=3,4,\cdots$



有 $d_1(f_m,f_n)=\frac{1}{2}|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\to 0$ as $m,n\to\infty$. 即 $\{f_n\}$ 为 $(C[0,1],d_1)$ 上基本列

若 $\exists f\in C[0,1]$, s.t. $d_1(f_n,f)\to 0$. 得到 $f=\begin{cases} 0 & t\in[0,\frac{1}{2}) \\ 1 & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$ 与 $f\in C[0,1]$ 矛盾!

L^p空间: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$可测. $1\le p<\infty$. $L^p(\Omega)=\{f$可测: $\int_\Omega f^p dx<\infty\}$

$\|f\|_p=(\int_\Omega|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$. $d(f,g)=\|f-g\|_p$ $d(f,g)=0\Leftrightarrow f=g$ a.e.

定理: L^p空间是完备的.

定义: 对映射 $T:X\to X$ 若 $\exists x^*\in X$. $T(x^*)=x^*$ 则称 x^* 为T的一个不动点.

定义 1.1.10 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个**压缩映射**, 如果存在 $0<\alpha<1$, 使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)(\forall x,y\in\mathscr{X})$.

定理 1.1.12 (Banach 不动点定理 —— 压缩映射原理) 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个完备的度量空间, T 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 到其自身的一个压缩映射, 则 T 在 $\mathscr{X}$ 上存在唯一的不动点.

证明: $\forall x_0\in X$. 定义迭代序列: $x_{n+1} \overset{def}{=} Tx_n$, $n=0,1,\cdots$

$\Rightarrow d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\le\alpha d(x_n,x_{n-1})\le\cdots\le\alpha^n d(x_1,x_0)$

$\Rightarrow d(x_{n+p},x_n)\le\sum_{k=1}^p d(x_{n+k},x_{n+k-1})\le\sum_{k=1}^p\alpha^{n+k-1}d(x_1,x_0)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 为X中的基本列

$\xRightarrow{X完备} \exists x^*\in X$. s.t. $d(x_n,x^*)\to 0$ as $n\to\infty$

$d(Tx^*,x^*)\le d(Tx^*,Tx_n)+d(Tx_n,x_n)+d(x_n,x^*)$

$\le\alpha d(x^*,x_n)+d(x^*,x_n)+d(x_{n+1},x_n)\to 0$ as $n\to\infty$

于是有 $d(Tx^*,x^*)=0\Rightarrow Tx^*=x^*$

唯一性: 若 $Ty=y$. $d(y,x^*)=d(Ty,Tx^*)\le\alpha d(y,x^*)\Rightarrow d(y,x^*)=0$. 证毕

定义 1.2.1 设 $(\mathscr{X},\rho),(\mathscr{X}_1,\rho_1)$ 是两个度量空间, 如果存在映射 $\varphi:\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 满足

(1) φ 是满射, tip: 单射是由(2)导出的

(2) $\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y) \quad (\forall x,y\in\mathscr{X})$,

则称 $(\mathscr{X},\rho)$ 和 $(\mathscr{X}_1,\rho_1)$ 是**等距同构的**, 并称 φ 为**等距同构映射**, 有时简称**等距同构**.

定义: (X,d). 如果 $(\tilde{X},\tilde{d})$完备, s.t. (X,d) 与 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 的某个稠密子空间 $(X_0,\tilde{d})$ 等距同构, 则称 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是 (X,d) 的完备化空间

例: $(\mathbb{R},d)$ 是 $(\mathbb{Q},d)$ 的完备化

$C[0,1]$ 是 $P[0,1]$ 的完备化.

$L^1[0,1]$ 是 $(C[0,1],d_1)$ 的完备化.

定理: 任一度量空间都有其完备化且在等距同构意义下唯一.

定义 1.3.2 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个度量空间, A 为其一子集. 称 A 是**列紧的**, 如果 A 中的任意点列在 $\mathscr{X}$ 中有一个收敛子列. 若这个子列还收敛到 A 中的点, 则称 A 是**自列紧的**. 如果空间 $\mathscr{X}$ 是列紧的, 那么称 $\mathscr{X}$ 为**列紧空间**.

Bolzano-Weierstrass定理: $\mathbb{R}^n$中任一点列有收敛子列.

Heine-Borel定理: $\mathbb{R}^n$中任一有界闭集的开覆盖都有有限子覆盖 $\Rightarrow$ 定义紧性

例: $\mathbb{R}^n$中 列紧 $\overset{B-W}{\Longleftrightarrow}$ 有界 自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭 $\overset{H-B}{\Longleftrightarrow}$ 紧.

例: $\ell^2=\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty x_k^2<\infty\}$ $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^\infty|x_k-y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots,0)$ $n=1,2,\cdots$

$\{e_n\}$有界, 但 $d(e_n,e_m)=\sqrt{2}$ $\forall n\neq m$ 于是不存在收敛子列, 则 ℓ^2非列紧.

定理: 列紧空间中的子集都列紧. 列紧空间都是完备的.

∴ 闭集都自列紧

定义 1.3.6 (ε 网) 设 M 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的一个子集, $\varepsilon>0$, $N\subset M$. 如果对于 $\forall x\in M, \exists y\in N$, 使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$, 那么称 N 是 M 的一个 ε 网. 如果 N 还是一个有穷集 (个数依赖于 ε), 那么称 N 为 M 的一个**有穷 ε 网**.

注 由定义显然有

$$M\subset\bigcup_{y\in N}B(y,\varepsilon).$$

定义 1.3.7 (完全有界) 集合 M 称为是**完全有界的**, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 都存在着 M 的一个有穷 ε 网.

有界⇏完全有界. 完全有界⇒有界

定理(Hausdorff) (1)列紧⇒完全有界 (2)完备空间中,列紧⇔完全有界

(1) 若∃$\varepsilon_0>0$, M中无有穷ε_0网, ∀$x_1\in M$, ∃$x_2\in M\setminus B(x_1,\varepsilon_0)$

对$\{x_1,x_2\}\in M$, ∃$x_3\in M\setminus B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)$. …,产生点列$\{x_n\}\in M$, 有$\rho(x_n,x_m)>\varepsilon_0$ 对∀$n\neq m$

无收敛子列. 与M列紧相矛盾!

(2). 若$\{x_n\}$为M中无穷点列, 只需找一收敛子列. 对1网, ∃$y_1\in M$. $\{x_n\}$子列$\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$

对$\frac12$网, ∃$y_2\in M$. $\{x_n\}$子列$\{x_n^{(1)}\}$子列$\{x_n^{(2)}\}\subset B(y_2,\frac12)$ …有对角线子列$\{x_k^{(k)}\}$为基本列

因为$n>\frac2\varepsilon$时 ∀$p\in\mathbb N$, 有$\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leq\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(y_n,x_n^{(n)})<\frac2n<\varepsilon$ 于是列紧.

定理: 度量空间中 紧⇔自列紧

X=$\mathbb R^n$

紧 ⇔ 自列紧 ⇒ 列紧 ⇒ 完全有界 ⇒ 有界

X=$\mathbb R^n$ ⇓ 有界闭 +闭 X完备 X=$\mathbb R^n$

定理: 列紧空间一定可分 (则完全有界的空间一定可分)

证: $\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{\frac1n}\overset{\text{dense}}{=}X$ ∀$x\in X$. ∀n. ∃$x_n\in N_{\frac1n}$ s.t. $d(x_n,x)<\frac1n$

(M,ρ)为列紧空间, $C(M)\overset{\text{def}}{=}$M上连续函数全体. $d(f,g)\overset{\text{def}}{=}\max_{x\in M}|f(x)-g(x)|$

⇒d是C(M)上度量. (C(M),d)是完备的.

定义 1.3.15 设 F 是 $C(M)$ 的一个子集. 称 F 是一致有界的, 如果 $\exists M_1>0$, 使得 $|\varphi(x)|\leqslant M_1(\forall x\in M,\forall\varphi\in F)$; 称 F 是等度连续的, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 总可以找到 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon\quad(\forall x_1,x_2\in M,\rho(x_1,x_2)<\delta,\forall\varphi\in F).$$

定理 1.3.16 (Arzelà-Ascoli) 为了 $F\subset C(M)$ 是一个列紧集, 必须且仅须 F 是一致有界且等度连续的函数族. (已经有M列紧)

证明: ⇒) $\mathcal F$列紧⇒$\mathcal F$有界⇒$\mathcal F$作为函数族一致有界

claim: $\mathcal F$等度连续 $\mathcal F$列紧⇒完全有界⇒$\mathcal F$有有穷ε-网

∀ε>0. $\mathcal F$完全有界 ⇒∃$N_{\frac\varepsilon3}=\{f_1,\cdots,f_m\}$ s.t. $\mathcal F\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B(f_k,\frac\varepsilon3)$

由$\mathcal F$一致连续 ∃$\delta_k>0$. s.t. $|f_k(x')-f_k(x'')|<\frac\varepsilon3$ ∀$x',x''\in M$且$\rho(x',x'')<\delta_k$

令$\delta:=\min_{1\leq k\leq m}\delta_k$ ⇒$|f_k(x')-f_k(x'')|<\frac\varepsilon3$ 对∀$\rho(x',x'')<\delta$. $x',x''\in M$.

∀$\varphi\in\mathcal F$, ∃$k\in\{1,\cdots,m\}$. $d(\varphi,\varphi_k)<\frac\varepsilon3$ 于是有$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-f_k(x')|$

$+|f(x'')-f_k(x'')|+|f_k(x')-f_k(x'')|<\varepsilon$. 于是等度连续.

⇐) 等度连续: ∀ε>0. ∃δ>0. s.t. $|f(x')-f(x'')|<\frac\varepsilon4$ ∀$x',x''\in M$且$\rho(x',x'')<\delta$. ∀$f\in\mathcal F$

M列紧 ⇒∃M的有穷δ网 $N_\delta=\{x_1,\cdots,x_N\}$. 定义映射T: $\mathcal F\to\mathbb R^N$, $f\mapsto(f(x_1),\cdots,f(x_N))$

$\mathcal F$一致有界 ⇒ $R\overset{\text{def}}{=}\sup_{f\in\mathcal F}\max_{x\in M}|f(x)|<\infty$ ⇒$(\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)|^2)^{\frac12}\leq\sqrt N\cdot R$ ∀$f\in\mathcal F$

则$T(\mathcal F)$是$\mathbb R^N$中的有界集故列紧

设$\tilde N_{\frac\varepsilon4}=\{Tf_1,\cdots,Tf_m\}$是$T(\mathcal F)$的有穷ε网. claim: $\{f_1,\cdots,f_m\}$是$\mathcal F$的ε网

∀$f\in\mathcal F$, ∃$k\in\{1,\cdots,m\}$ s.t. $d_{\mathbb R^N}(Tf,Tf_k)<\frac\varepsilon4$

∀$x\in M$. ∃$x_j\in N_\delta$ s.t. $\rho(x_j,x)<\delta$. 则$|f(x)-f_k(x)|<\frac34\varepsilon$⇒$d(f,f_k)<\varepsilon$.

$\ell^p\overset{\text{def}}{=}\{\{x_k\}_{k=1}^{\infty}:\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\}$ $d_p(x,y)\overset{\text{def}}{=}(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p)^{\frac1p}$ $1\leq p<\infty$

定理: 设$1\leq p<\infty$. $A\subset\ell^p$列紧 ⇔ $\begin{cases}(1)\ A\text{有界}\\(2)\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \text{s.t.}\ \sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^p<\varepsilon^p\ \forall x\in A.\end{cases}$

证明: ⇒) 有界是自然的.

⇐) ∀η>0. 取$\varepsilon=(2^{p+1}+1)^{-\frac1p}\eta$ ⇒∃N, s.t. $\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^p<\varepsilon^p$, ∀$x\in A$

定义T_N: $A\to\mathbb R^N$, $(x_1,\cdots)\mapsto(x_1,\cdots,x_N)$ ⇒∃M>0. s.t. $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<M^p$. ∀$x\in A$

⇒ $|x_k|\leq M$ ∀k. ∀$x\in A$ ⇒$(\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2)^{\frac12}\leq\sqrt N\cdot M$ ∀$x\in A$ ⇒$T_N(A)$有界故列紧.

∃$T_N(A)$的有穷$\frac\varepsilon N$网$\{T_Nx^{(1)},\cdots,T_Nx^{(m)}\}$. claim: $(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$是A的η网.

∀$x\in A$. ∃$j\in\{1,\cdots,m\}$ s.t. $\underline{d_{\mathbb R^N}(T_Nx,T_Nx^{(i)})}<\frac\varepsilon N$. ⇒ $|x-x^{(i)}|<\frac\varepsilon N$ ∀$i=1,2,\cdots,m$.

$d_p(x,x^{(i)})^p=\|x-x^{(i)}\|_p^p$ $(\sum_{k=1}^{N}|x-x^{(k)}|^2)^{\frac12}$

$=(\sum_{k=1}^{N}+\sum_{k=N+1}^{\infty})|x-x^{(i)}|^p\leq N\cdot(\frac\varepsilon N)^p+\sum_{k=N+1}^{\infty}2^p(|x_k|^p+|x_k^{(i)}|^p)<\frac{\varepsilon^p}{N^{p-1}}+2^{p+1}\varepsilon<(2^{p+1}+1)\varepsilon^p=\eta^p$

证毕.

定理 1.4.18 设 $\mathscr X$ 是一个有穷维线性空间, 若 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 都是 $\mathscr X$ 上的范数, 则必有正常数 C_1 与 C_2, 使得

$$C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1\quad(\forall x\in\mathscr X).$$

线性空间:

线性同构 设 $\mathscr X,\mathscr X_1$ 都是线性空间, $T:\mathscr X\to\mathscr X_1$ 称为是一个线性同构, 如果

(1) 它既是单射又是满射, 即它是一对一的并且是在上的;

(2) $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty\quad(\forall x,y\in\mathscr X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb K)$.

X为K上向量空间 A⊂X

线性子空间 设 $E\subset\mathscr X$, 若 E 帐 $\mathscr X$ 上的加法与数乘还构成一个线性空间, 则称 E 是 $\mathscr X$ 的一个线性子空间. $\mathrm{span}A=\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k:x_k\in A,\lambda_k\in\mathbb K,n\in\mathbb N\}$

$\mathscr X$ 以及 $\{\theta\}$ 都是 $\mathscr X$ 的线性子空间, 我们称它们为平凡的子空间, 而称其他的子空间为真子空间.

线性流形 设 $E\subset\mathscr X$, 若 $\exists x_0\in\mathscr X$ 及线性子空间 $E_0\subset\mathscr X$, 使得 $E=E_0+x_0\triangleq\{x+x_0|x\in E_0\}$, 则称 E 为线性流形. 简单地说, 线性流形就是子空间对某个向量的平移.

线性相关 一组向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathscr X$ 称为是线性相关的, 如果存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb K$ 不全为 0, 使得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0;$$

否则称为是线性无关的.

线性基 若 A 是 $\mathscr X$ 中的一个极大线性无关向量组, 即 A 中的向量是线性无关的, 而且任意的 $x\in\mathscr X$ 都是 A 中的向量的线性组合, 则称 A 是 $\mathscr X$ 的一组线性基. (Hamel基)

维数 线性空间中的线性基的元素个数 (势), 称为维数.

定义 1.4.9 线性空间 $\mathscr X$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 是一个非负值函数: $\mathscr X\to\mathbb R$ 满足

(1) $\|x\|\geqslant0(\forall x\in\mathscr X),\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\theta$ (正定性);

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad(\forall x,y\in\mathscr X)$ (三角形不等式);

(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|\quad(\forall\alpha\in\mathbb K,\forall x\in\mathscr X)$ (齐次性).

显然, 范数必是准范数.

定义: $\|\cdot\|$为X上范数. 称$(X,\|\cdot\|)$为赋范向量空间

$d(x,y)=\|x-y\|$为一个度量. 称为$\|\cdot\|$诱导的度量.

若(X,d)完备. 称$(X,\|\cdot\|)$为Banach空间. (完备赋范空间)

函数空间: L^p $(1\leq p<\infty)$ $\|f\|_p=(\int|f|^p)^{\frac1p}$ L^∞=本性有界可测函数空间

数列空间: ℓ^p $(1\leq p<\infty)$ $\|x\|_p=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac1p}$ $\|f\|_\infty\overset{\text{def}}{=}\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$

ℓ^∞=有界数列全体. $\|x\|_\infty=\sup_k|x_k|$ $=\inf\{M>0:\mu(|f|\geq M)=0\}$

例: $\Omega\subset\mathbb R^n$为有界域. $C^k(\bar\Omega)\overset{\text{def}}{=}\bar\Omega$上k次连续可微函数全体

$\|u\|\overset{\text{def}}{=}\max_{|\alpha|\leq k}\max_{x\in\bar\Omega}|\partial^\alpha u(x)|$ $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb Z_+^n$ $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

$\partial^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n}$. $(C^k(\bar\Omega),\|\cdot\|)$是Banach空间. $\|u\|_{k,p}=(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega|\partial^\alpha u|^p)^{\frac1p}$ $(1\leq p<\infty)$

$S:=\{u\in C^k(\Omega),\|u\|_{k,p}<\infty\}$. $H^{k,p}(\Omega)$是S的完备化. 称$H^{k,p}$为Sobolev空间.

定义 1.4.15 设在线性空间 $\mathscr X$ 上给定了两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$, 我们说 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 是指 记为$\|\cdot\|_1\lesssim\|\cdot\|_2$

$$\|x_n\|_2\to0\Longrightarrow\|x_n\|_1\to0\quad(n\to\infty).$$

如果 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 而且 $\|\cdot\|_1$ 又比 $\|\cdot\|_2$ 强, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

命题 1.4.16 为了 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 必须且仅须存在常数 $C>0$, 使得 $\|\cdot\|_1\lesssim\|\cdot\|_2$

$$\|x\|_1\leqslant C\|x\|_2\quad(\forall x\in\mathscr X).\tag{1.4.10}$$

证明: ⇐) 是平凡的

⇒) 若不然. ∀n. ∃$x_n\in X$ s.t. $\|x_n\|_1\geq n\|x_n\|_2$

$y_n\overset{\text{def}}{=}\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, n=1,2. $\|y_n\|_2=\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\leq\frac1n\to0$ as $n\to\infty$

由于$\|\cdot\|_1\lesssim\|\cdot\|_2$ 则$\|y_n\|_1\leq\|y_n\|_2$ 但$\|y_n\|_1=1$ 矛盾!

若X上∀两范数等价 一定有dimX<∞.

证明: 若dimX=∞. $\|\cdot\|$为X上范数. 则$(X,\|\cdot\|)$有无界线性泛函f.

令$\|x\|_0=\|x\|+|f(x)|$. 则$\|x\|_0$为X上范数 但$\|x\|_0$与$\|x\|$不等价. 否则∃c>0 s.t. $|f(x)|\leq\|x\|_0\leq c\|x\|$, 矛盾!

例: $\mathbb R^n$上$\|\cdot\|_p$ $(1\leq p<\infty)$都等价. 因为$\|x\|_\infty\leq\|x\|_p\leq n^{\frac1p}\|x\|_\infty$

定理: 有限维空间上所有范数彼此等价

有限维赋范空间一定是Banach空间

定义: $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ 若∃T: X→Y 线性,双射, $\underline{\text{连续且}T^{-1}\text{也连续}}$ 同胚

则称X, Y同构

定理: 同维数有限维赋范空间彼此同构.

证明: $c_1|Tx|\leq\|x\|\leq c_2|Tx|$ ∀$x\in X$. 设$\{x_n\}$为X的一基本列

⇒ $|Tx_k-Tx_j|\leq\frac1{c_1}\|x_k-x_j\|\to0$ as $k,j\to\infty$ ⇒$\{Tx_n\}$为$\mathbb K^n$中基本列

⇒ ∃$\xi\in\mathbb K^n$ s.t. $Tx_k\to\xi$. ⇒$\|x_k-T^{-1}\xi\|\leq c_2|Tx_k-\xi|\to0$.

定理: X 的单位球面列紧 $\Leftrightarrow \dim X < \infty$ 　　有限维空间中诱导的同构一定有范数等价

证明: ($\Leftarrow$) 代数同构: $T: X \to \mathbb{K}^n$, s.t. $\exists c_1, c_2 > 0$, $c_1|Tx| \le \|x\| \le c_2|Tx|$ $\forall x \in X$

$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \mapsto \xi$ 　　$|Tx| \le \frac{1}{c_1}$ 对 $\forall x \in S$ (单位球面)

则 $T(S)$ 为 $\mathbb{K}^n$ 中有界闭集, 列紧

引理 1.4.31 (Riesz 引理) 如果 $\mathscr{X}_0$ 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 的一个真闭子空间, 那么对 $\forall 0<\varepsilon<1, \exists y \in \mathscr{X}$, 使得 $\|y\|=1$, 并且

$$\|y-x\| \geqslant 1-\varepsilon \quad (\forall x \in \mathscr{X}_0).$$

$\Rightarrow$) 反证: 若 $\dim X = \infty$, $\exists \{e_n\}_{n=1}^\infty$ 线性无关, 令 $X_n = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$

推论: 赋范线性空间中任何有限维子空间一定是闭子空间

$\Rightarrow X_{n-1} \overset{闭}{\subsetneq} X_n$ $n=1,2,\cdots \Rightarrow \forall n$, $\exists x_n \in X_n$, with $\|x_n\|=1$ s.t. $\mathrm{dist}(x_n, X_{n-1}) \ge \frac12$

则 $d(x_n, x_m) \ge \frac12$ $\forall n \ne m$, 则 $\{x_n\}$ 中无收敛子列, 与 S 列紧矛盾!

定理: 在无穷维空间中单位球面一定不列紧

最佳逼近问题

提成 B^* 空间的问题: 给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$, 并给定 $\mathscr{X}$ 中的有穷个向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 对于给定的向量 $x \in \mathscr{X}$, 求一组数 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, 使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| = \min_{a \in \mathbb{K}^n}\left\|x-\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|, \tag{1.4.16}$$

其中 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

定理 1.4.23 设 $\mathscr{X}$ 是一个 B^* 空间. 若 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathscr{X}$ 中给定的向量组, 则 $\forall x \in \mathscr{X}$, 存在最佳逼近系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 适合 (1.4.16) 式.

证明: 固定 $x \in X$, 定义 $f: \xi \mapsto \|x - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\|$ 　$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ 　　欧氏范数

① $f \in C(\mathbb{K}^n)$ 　　$\Rightarrow \exists C>0$ s.t. $p(\xi) \ge C|\xi|$ $\forall \xi \in \mathbb{K}^n$

② $f(\xi) \ge \|\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\| - \|x\|$ 　　$\Rightarrow f(\xi) \ge C|\xi| - \|x\| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$

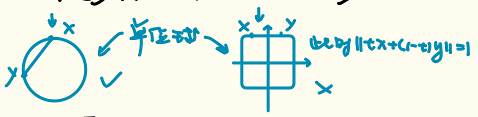
③ $p(\xi) \overset{def}{=} \|\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上一个范数 $\overset{f连续}{\Rightarrow}$ f 在 $\mathbb{K}^n$ 上有最小值, 最佳逼近存在.

定义 1.4.24 B^* 空间 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 称为严格凸的, 是指 $\forall x, y \in \mathscr{X}, x \neq y$, 必有

$$\|x\|=\|y\|=1 \Longrightarrow \|\alpha x+\beta y\|<1 \quad (\forall \alpha, \beta>0, \alpha+\beta=1). \tag{1.4.20}$$

$\|tx+(1-t)y\|<1$

例: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ 是严格凸的. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ 不是严格凸的.



例: L^p $(1<p<\infty)$ 严格凸.

$\forall f, g \in L^p$, 有 $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, $f \ne g$. 若 $\exists t \in (0,1)$ s.t. $\|tf+(1-t)g\|_p = 1 = \|tf\|_p + \|(1-t)g\|_p$

即 Minkowski 不等式取等, 条件为 $\exists \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ 不同时为 0, $\lambda_1 tf = \lambda_2(1-t)g$.

$\Rightarrow \|\lambda_1 t f\|_p = \|\lambda_2(1-t)g\|_p \Rightarrow \lambda_1 t = \lambda_2(1-t) \Rightarrow f=g$, 矛盾!

例: $L^1[0,1]$, $L^\infty[0,1]$ 不是严格凸的.

$f \equiv 1$, $g(t) = 2t$. $\Rightarrow \|f\|_1 = \|g\|_1 = 1 = \|\frac{f+g}{2}\|_1$

定理 1.4.25 设 $\mathscr{X}$ 是严格凸的 B^* 空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 上给定的一组线性无关向量, 则 $\forall x \in \mathscr{X}$, 存在着唯一的一组最佳逼近系数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 适合 (1.4.16) 式.

定义: 商空间:

设 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 是 B^* 空间, $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}$ 是一个闭线性子空间, $x', x'' \in \mathscr{X}$, 记 $x' \sim x''$, 若 $x'-x'' \in \mathscr{X}_0$. 这是一个等价关系, 用 $[x]$ 表示 x 所在的等价类, 所有等价类组成的空间称为关于 $\mathscr{X}_0$ 的商空间, 记为 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$, 其中加法和数乘定义如下:

(1) $[x]+[y]=[x+y] \quad ([x],[y] \in \mathscr{X}/\mathscr{X}_0)$;

(2) $\lambda[x]=[\lambda x] \quad (\lambda \in \mathbb{K}, [x] \in \mathscr{X}/\mathscr{X}_0)$.

容易验证, $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 关于上述运算组成一个线性空间.

$X/X_0 = \{[x] \mid x \in X\}$.

定理 1.4.32 设 $[x] \in \mathscr{X}/\mathscr{X}_0$, 定义

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in [x]} \|y\|,$$

则 $(\mathscr{X}/\mathscr{X}_0, \|\cdot\|_0)$ 是 B^* 空间, 又当 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 是 B 空间时, $(\mathscr{X}/\mathscr{X}_0, \|\cdot\|_0)$ 也是 B 空间.

证明: 1° (1) 正定 $\|[x]\|_0 \ge 0$ 平凡. 若 $\|[x]\|_0 = 0 \Rightarrow \exists x_n \in [x]$ s.t. $\|x_n\| \to 0$ $n \to \infty$

$\Rightarrow y_n \to 0 \Rightarrow 0 \in [x]$ (因为 X_0 为闭集) $\Rightarrow [x] = [0]$

(2) 齐次 ✓

(3) 三角 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in [x]$, $\exists y' \in [y]$ s.t. $\|x'\| \le \|[x]\|_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, $\|y'\| \le \|[y]\|_0 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \|x'\| + \|y'\| \le \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0 + \varepsilon$ 而 $x'+y' \in [x+y]$, $\|x'+y'\| \ge \|[x+y]\|_0$

$\Rightarrow \|[x]+[y]\|_0 \le \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0 + \varepsilon \Rightarrow \|[x]+[y]\|_0 \le \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0$ 证毕

2° 设 $\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ 是 X/X_0 中任一基本列, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, s.t. $\|[x_n]-[x_m]\|_0 < \varepsilon$ $\forall m, n \ge N$.

取 $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall k$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ 且 $n_k > n_{k-1}$ s.t. $\|[x_m]-[x_{n_k}]\|_0 < \frac{1}{2^{k+1}}$ $\forall m > n_k$

$\Rightarrow$ ∃子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 满足 $\|[x_{n_{k+1}}]-[x_{n_k}]\|_0 < \frac{1}{2^{k+1}}$ $\forall k$.

$\forall k$, $\exists y_{n_k} \in [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]$ s.t. $\|y_{n_k}\| < \|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\| + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$

令 $z_1 = x_{n_1}$, $z_2 = z_1 - y_{n_1}$, $\cdots$, $z_k = z_{k-1} - y_{n_{k-1}} \Rightarrow z_k = x_{n_1} - y_{n_1} - \cdots - y_{n_{k-1}} \in [x_{n_k}]$

则 $[z_k] = [x_{n_k}]$ 于是 $\|z_k - z_{k+p}\| \le \|z_k - z_{k+1}\| + \cdots + \|z_{k+p-1} - z_{k+p}\|$
$= \|y_{n_k}\| + \cdots + \|y_{n_{k+p-1}}\| \le \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p-1}} < \frac{1}{2^{k-1}}$

则 $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ 为 X 中基本列, 由于 X 完备, $\exists z \in X$, $\|z_k - z\| \to 0$ as $k \to \infty$.

$\Rightarrow \|[x_{n_k}] - [z]\| = \|[z_k] - [z]\|_0 \le \|z_k - z\| \to 0$ as $k \to \infty$ 于是 $\{[x_n]\}$ 收敛, 证毕

内积空间

定义 1.6.1 线性空间 $\mathscr{X}$ 上的一个二元函数 $a(\cdot,\cdot): \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{K}$, 称为是共轭双线性函数 (sesquilinear), 如果

第二变元共轭线性 (1) $a(x, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\bar{\alpha}_1 a(x, y_1)+\bar{\alpha}_2 a(x, y_2)$,

第一变元线性 (2) $a(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1 a(x_1, y)+\alpha_2 a(x_2, y)$,

其中 $\forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathscr{X}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. 我们还称由

$$q(x) \triangleq a(x, x) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

定义的函数为 $\mathscr{X}$ 上由 a 诱导的二次型.

定义 1.6.3 线性空间 $\mathscr{X}$ 上的一个共轭双线性函数

$$(\cdot, \cdot): \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{K}$$

称为是一个内积, 如果它满足:

(1) $(x, y)=\overline{(y, x)} \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$ (共轭对称性);

(2) $(x, x) \geqslant 0 \quad (\forall x \in \mathscr{X}), (x, x)=0 \Longleftrightarrow x=\theta$ (正定性).

具有内积的线性空间称为内积空间, 记作 $(\mathscr{X},(\cdot, \cdot))$.

注　若在 (2) 中仅保存非负定条件: $(x, x) \geqslant 0 (\forall x \in \mathscr{X})$, 则称 $(\cdot, \cdot)$ 为一个半内积, 对应的空间称为半内积空间.

命题 1.6.8 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 $(\mathscr{X},(\cdot, \cdot))$ 是内积空间. 若令

$$\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall x \in \mathscr{X}), \tag{1.6.3}$$

则有

$$|(x, y)| \leqslant\|x\| \cdot\|y\| \quad (\forall x, y \in \mathscr{X}), \tag{1.6.4}$$

而且 (1.6.4) 式中的等号当且仅当 x 与 y 线性相关时成立.

我们就更一般的情形证明不等式 (1.6.4).

命题 1.6.9 设 a 是线性空间 $\mathscr{X}$ 上的共轭双线性函数, $q(x)$ 是由 a 诱导的二次型. 如果

$$q(x) \geqslant 0 \quad (\forall x \in \mathscr{X}) \quad 且 \quad q(x)=0 \Longleftrightarrow x=\theta,$$

那么

$$|a(x, y)| \leqslant[q(x) q(y)]^{\frac{1}{2}} \quad (\forall x, y \in \mathscr{X}), \tag{1.6.5}$$

而且 (1.6.5) 式中的等号当且仅当 x 与 y 线性相关时成立.

证明: 设 $y \ne 0$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. $0 \le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \bar\lambda\langle x,y\rangle + \lambda\bar\lambda\langle y,y\rangle$
$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar\lambda\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$

取 $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, 有 $\Rightarrow 0 \le \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$ 证毕

定义: 完备的内积空间称为 Hilbert 空间 (内积诱导范数的 Banach 空间)

例: l^2. $\langle x,y\rangle := \sum_{k=1}^\infty x_k \bar{y}_k$ 有 l^2 为 Hilbert 空间.

L^2. $\langle f,g\rangle := \int f\bar{g}$ 有 L^2 为 Hilbert 空间.

定理: $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\|x\| := \langle x,x\rangle^{\frac12}$

1. 极化恒等式: (1) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle = \frac14(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(2) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\langle x,y\rangle = \frac14\sum_{k=0}^3 i^k\|x+i^k y\|^2$

2. 平行四边形等式: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

定理: $(X, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\|$ 可由某内积诱导 $\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式

用于证由/不能由

内积空间

定义 1.6.17 内积空间 $\mathscr{X}$ 上的两个元素 x 与 y 称为是正交的，是指

$$(x,y)=0,$$

记作 $x\perp y$. 又设 M 是 $\mathscr{X}$ 的一个非空子集，$x\in\mathscr{X}$. 若对 $\forall y\in M$ 都有 $x\perp y$，则称 x 与 M 正交，记作 $x\perp M$. 此外我们还称集合

$$\{x\in\mathscr{X}\,|\,x\perp M\}$$

为 M 的正交补，记作 $M^{\perp}$.

推论：$\left.\begin{array}{l} M\overset{\text{dense}}{=\!=}X \\ x\perp M\end{array}\right\}x=0.$

证明：$\forall y\in X$. $\exists y_n\in M$ s.t. $y_n\to y\Rightarrow 0=\langle x,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$

定理：H为Hilbert空间. $M\subset H$ 为闭凸集. $\forall x\in H$. $\exists!\,y\in M$ s.t. $\|x-y\|=\mathrm{dist}(x,M)$
(i.e. y 是 M 中距 x 最近的点)

证明：令 $d\overset{\text{def}}{=\!=}\mathrm{dist}(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|\Rightarrow\exists\,y_n\in M$. $n=1,2,\cdots$. $\|x-y_n\|\to d$.

claim: y_n 为Cauchy列. $\|y_m-y_n\|^2=\|y_m-x-(y_n-x)\|^2\overset{\text{P.L.}}{=}2(\|y_m-x\|^2+\|y_n-x\|^2)-4\|\frac{y_m+y_n}{2}-x\|^2$

$\le 2(\|y_m-x\|^2+\|y_n-x\|^2)-4d^2\to 4d^2-4d^2=0.$

于是 $\{y_n\}$ 为基本列. 由Hilbert空间完备 $\exists y\in H$. s.t. $\|y_n-y\|\to 0.\overset{M\text{闭}}{\Longrightarrow}y\in M.$

claim: y 是最近点. 唯一性：若 $\exists y'\in M$. $\|x-y'\|=d$. $\|y-y'\|^2=2(\|x-y\|^2+\|x-y'\|^2)-4\|\frac{y+y'}{2}-x\|^2$
$\le 4d^2-4d^2=0$

即 $y=y'$. 证毕

定理（正交分解）：H为Hilbert空间. $M\subset H$ 为闭子空间. 映射 $P_M: H\to M$ 称H到M的正交投影
$x\mapsto y$（最近点）

推论：
1. $P_Mx\in M$. $x-P_Mx\in M^{\perp}$
2. $\mathrm{Im}(P_M)=M$. $\mathrm{Ker}(P_M)=M^{\perp}$
3. $\|x-P_Mx\|=\mathrm{dist}(x,M)$
4. $P_M^2=P_M$
5. $\|P_Mx\|\le\|x\|$ $\forall x\in H$
6. $I-P_M=P_{M^{\perp}}$

理解：$H=\mathbb{R}^3$. $M=\mathbb{R}^2$.

定义：$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. 若 $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 满足 $e_\alpha\perp e_\beta$. $\forall\alpha,\beta\in I$. $\alpha\ne\beta$ 则称S是X中正交系.
若S还满足 $\|e_\alpha\|=1$. $\forall\alpha\in I$. 则称S为规范正交系 (O.N.S)

定义：若一个正交系S满足 $S^{\perp}=\{0\}$，则称S完备

定义：$X\ne\phi$. 若X上一个关系"$\le$"满足
(1) 传递性 $x\le y$ 且 $y\le z$ 则 $x\le z$
(2) 反身性 $x\le x$
(3) $x\le y$ 且 $y\le x$ 则 $x=y$
则称 $\le$ 为X上的一个偏序

1° 若 $\forall x,y\in X$. $x\le y$ 或 $y\le x$ 一定有一成立，则称"$\le$"为一个全序

2° 对 $Y\subset X$. 若 $\exists p\in X$ s.t. $y\le p$ 对 $\forall y\in Y$

3° 若 $m\in X$ 满足 $m\le x\Leftrightarrow x=m$. 则称m为X的极大元.

Zorn引理：$(X,\le)$. 若X的每一个全序子集都有上界 则X有极大元（公理）

定理：每个非平凡内积空间中都有完备正交系.

定义：对 $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为O.N.S，若 $\forall x\in X$，可表示为 $x=\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$ 则称S为规范正交基 (O.N.B.)

O.N.S与O.N.B区别：$\mathbb{R}^3$ 中 O.N.S 可为 $\{e_1,e_2\}$. O.N.B 为 $\{e_1,e_2,e_3\}$

称 $\{\langle x,e_\alpha\rangle\}_{\alpha\in I}$ 为X关于S的Fourier系数.

定理：Bessel不等式：$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为O.N.S. $\forall x\in X$ 有 $\sum\limits_{\alpha\in I}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\le\|x\|^2$

1. 引理：H为Hilbert空间. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为O.N.S. $M\overset{\text{def}}{=\!=}\overline{\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$. 则 $\forall x\in H$. 有
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k=P_Mx$（x在M上的正交投影）

证明：由Bessel不等式：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\le\|x\|^2\Rightarrow\|\sum\limits_{k=n}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k\|^2=\sum\limits_{k=n}^{m}|\langle x,e_k\rangle|^2\to 0$ as $m,n\to\infty$

则 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\overset{\text{def}}{=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\in H.\overset{M\text{闭}}{\Longrightarrow}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M$

H完备. 极限存在于H中

有 $\langle x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,e_m\rangle=\langle x,e_m\rangle-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_m\rangle=\langle x,e_m\rangle-\langle x,e_m\rangle=0.$ $\forall e_m\in M$

于是 $x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M^{\perp}$. 于是 $\forall x\in H$. $x=\underbrace{x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k}_{M^{\perp}}+\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k}_{M}$ 即 $H=M\oplus M^{\perp}$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k=P_Mx$

2. 引理：对 $\mathbb{N}$ 的任一置换 σ，有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_{\sigma(k)}\rangle e_{\sigma(k)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$.

证明：令 $M\overset{\text{def}}{=\!=}\overline{\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$. $\tilde{M}\overset{\text{def}}{=\!=}\overline{\mathrm{span}(\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty})}$ 则 $M=\tilde{M}$ 有 $LHS=P_Mx=P_{\tilde{M}}x=RHS$.

定理：H为Hilbert空间. $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为O.N.S. $\forall x\in H$. $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha\in H$. 且 $\|x-\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum\limits_{\alpha\in I}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2$

由1.2知 此处定义合理

证明：对 $\forall x\in H$. $\tilde{I}=\{\alpha\in I\,|\,\langle x,e_\alpha\rangle\ne 0\}$ 至多可数. 令 $\tilde{I}=\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}\in H$.

定理：H为Hilbert空间. $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为O.N.S. 下面等价：
① S是O.N.B. ② $S^{\perp}=\{0\}$（完备） ③ $\forall x\in H$. $\|x\|^2=\sum\limits_{\alpha\in I}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2$（Parseval等式）

证明：① ⇒ ③ 由上个定理知成立

③ ⇒ ② 若 $S^{\perp}\ne\{0\}$ 则 $\exists\,0\ne x_0\in H$ s.t. $\langle x_0,e_\alpha\rangle=0$ $\forall\alpha\in I$. 则 $\sum\limits_{\alpha\in I}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2=0$. 矛盾!

② ⇒ ① 若S非O.N.B ⇒ $\exists x_0\in H$. s.t. $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha\ne x_0$ 即 $x_0-\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha\ne 0$.
对 $\forall\beta\in I$, $\langle x_0-\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha,e_\beta\rangle=\langle x,e_\beta\rangle-\langle x,e_\beta\rangle=0$. 则 $x_0-\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha\in S^{\perp}$
与 $S^{\perp}=\{0\}$ 的完备性矛盾! 证毕

定理：非平凡的Hilbert空间都有O.N.B.

例：ℓ^2 中 $e_n\overset{\text{def}}{=\!=}(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots,0)$ $n=1,2,\cdots$. 有 $(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}$ 则有 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 ℓ^2 的O.N.B
但不是Hamel基：取 $x=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n})$ 有 $x\in\ell^2$（$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2<\frac{\pi^2}{6}$）但x不能由有限个 e_n 表示.

定理（Gram-Schmidt正交化）内积空间 $(X,\langle\cdot\rangle)$. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 线性无关 ⇒ $\exists\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为O.N.S.
s.t. $\forall n$. $\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{n})=\mathrm{span}(\{x_k\}_{k=1}^{n})$

定理：H为Hilbert空间. H可分 ⇔ H有至多可数的O.N.B.

例：（不可分Hilbert空间）μ 为 $\mathbb{R}$ 上计数测度. $\mu(E)=\begin{cases}\#E & \#E<\infty\\ \infty & \text{others}\end{cases}$
$L^2(\mathbb{R},\mu)=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测：f 在至多可数个点处非零且 $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|^2<\infty\}$
[对 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$. $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}}f(t)=\sup\{\sum\limits_{t\in F}f(t): F\subset\mathbb{R}.\ \#F<\infty\}$]
$\langle f,g\rangle=\sum\limits_{t\in\mathbb{R}}f(t)g(t)$ 令 $e_r(t)\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{cases}1 & t=r\\ 0 & t\ne r\end{cases}$ $\langle f,e_r\rangle=f(r)$
则 $e_r(t)$ 为 $L^2(\mathbb{R},\mu)$ 上的O.N.B. $(\{e_r(t)\}_{r\in\mathbb{R}})^{\perp}=\{0\}$.

定义：设 $(\mathscr{X}_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 与 $(\mathscr{X}_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是两内积空间. 若存在 $\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2$ 的一个线性同构 $T:\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_2$
有 $\langle T(x),T(y)\rangle_2=\langle x,y\rangle_1$ $\forall x,y\in\mathscr{X}_1$ 则称内积空间 $\mathscr{X}_1$ 与 $\mathscr{X}_2$ 同构

定理：① n维Hilbert空间 $\simeq\mathbb{K}^n$ ② 无穷维Hilbert空间 $\simeq\ell^2$

证明②：设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是H的一个O.N.B. 定义 $T:H\to\ell^2$
$x\mapsto\{\langle x,e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$

证T为线性同构

1° T线性

2° T等距 $\|Tx\|_{\ell^2}=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}\overset{\text{P.I.}}{=\!=}\|x\|$

3° T单射（由2°）

4° T满射 $\forall a\in\ell^2$, $a=(a_1,a_2,\cdots)$. $\|\sum\limits_{k=m}^{n}a_ke_k\|^2=\sum\limits_{k=m}^{n}|a_k|^2\to 0$ as $m,n\to\infty$.
$\Rightarrow\exists x\in H$ s.t. $\|\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k-x\|\to 0$ as $n\to\infty$. i.e. $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k\Rightarrow Tx=a$.

5° $\langle Tx,Ty\rangle_{\ell^2}=\langle x,y\rangle$ $\forall x,y\in H$. 证：$\langle x,y\rangle=\langle\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle y,e_j\rangle e_j\rangle$
$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\langle e_k,e_j\rangle$
$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle x,y\rangle_{\ell^2}$

例：$L^2(\mathbb{T})$ 的O.N.B. $\mathbb{T}\overset{\text{def}}{=\!=}\{e^{2\pi it}: t\in\mathbb{R}\}$ 单位圆周
对 $\mathbb{T}$ 上的函数F. 令 $f(t)\overset{\text{def}}{=\!=}F(e^{2\pi it})$ $t\in\mathbb{R}$.
则f为 $\mathbb{R}$ 上周期为1的函数. $F\leftrightarrow f$
$\mathbb{T}\leftrightarrow[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$e_k(t)\overset{\text{def}}{=\!=}e^{2\pi ikt}$ $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $k=0,\pm1,\pm2\cdots$
则 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 中O.N.S 称三角函数系.
对 $f\in L^2(\mathbb{T})$ 令 $\hat{f}(k)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)e^{-2\pi ikt}dt=\langle f,e_k\rangle$ 有 $f\sim\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,e_k\rangle e_k$

期中考试范围. 2025.10.26

第二章 线性算子与线性泛函

定义：X, Y 为向量空间，若映射 $T: X\to Y$ s.t. $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$ $\forall x,y\in X$，$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}$
则称 T 为线性算子。若 $Y=\mathbb{K}$，称 T 为线性泛函。

例：微分算子 $\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$，$X=Y=C^\infty(\Omega)$ $T=\sum\limits_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha$

定义：$(X,\|\cdot\|_X)$，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ $T:X\to Y$ 为线性算子，若 $\exists M>0$，$\|Tx\|_Y\le M\|x\|_X$ $\forall x\in X$，称 T 有界

命题：T 有界 $\Leftrightarrow$ T 把有界集映为有界集。

定理：$(X,\|\cdot\|_X)$，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ $T:X\to Y$ 为线性算子，则 T 连续 $\Leftrightarrow$ T 有界

证明：有 $\Rightarrow$ 连 $\|x_n-x\|_X\to 0 \Rightarrow \|Tx_n-Tx\|_Y\le M\|x_n-x\|_X\to 0$.

连 $\Rightarrow$ 有 若 T 无界 $\Rightarrow \forall n$，$\exists x_n\in X$，s.t. $\|Tx_n\|_Y\ge n\|x_n\|_X$

令 $\tilde{x}_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}$ $n=1,2,\cdots$，则 $\|\tilde{x}_n\|_X=\frac{1}{n}\to 0 \xRightarrow{T\text{连续}} \|T\tilde{x}_n\|_Y\to 0$

另一方面，$\|T\tilde{x}_n\|_Y=\dfrac{\|Tx_n\|_Y}{n\|x_n\|_X}\ge 1$ 矛盾！证毕

定理：有限维赋范空间之间的线性算子有界。

证明：1° 设 $X=\mathbb{K}^n$，$Y=\mathbb{K}^m$，$Tx=Ax$ with $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

$$\|Tx\|_{\mathbb{K}^m}=\Big(\sum_{i=1}^m\Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big|^2\Big)^{\frac12}\overset{C\text{-}S}{\le}\Big(\sum_{i=1}^m\Big(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\Big)\Big)^{\frac12}=\Big(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\Big)^{\frac12}\|x\|_{\mathbb{K}^n}$$

2° 一般情况，
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"', "\text{同构}"] & Y \arrow[d, "\psi", "\text{同构}"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\tilde{T}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow \tilde{T}=\psi\circ T\circ\varphi^{-1}$ $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 线性，有界
$\Rightarrow T=\psi^{-1}\circ\tilde{T}\circ\varphi$ 有界

赋以一致范数

例：(无界算子) $X=C^1[0,1]$ $Y=C[0,1]$，$T=\frac{d}{dt}$ 无界。

$u_n(t)=t^n$ $t\in[0,1]$ $n=1,2,\cdots$，$\dfrac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|}=n\to\infty$

一些符号：$\mathcal{L}(X,Y)\overset{\text{def}}{=}\{X\text{到}Y\text{的有界线性算子}\}$

$\mathcal{L}(X)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}(X,X)$

$X^*\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}(X,\mathbb{K})=\{X\text{上的连续线性泛函}\}$

定义：对 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$，$\|T\|_{X\to Y}\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{\substack{x\in X\\x\ne 0}}\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}=\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|_X=1}}\|Tx\|$ 称为 T 的算子范数。

定理：$(\mathcal{L}(X,Y),\|\cdot\|_{X\to Y})$ 是赋范空间。

1° 若 Y 完备，则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 完备 2° X^* 是 Banach 空间。

Riesz 表示定理：设 X 是 Hilbert 空间，$\forall y\in X$，定义 $f_y: x\mapsto\langle x,y\rangle$ $\forall x\in X$ 则 $f_y\in X^*$.

$\Rightarrow |f_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\le\|y\|\|x\|$，$\forall x\in X$，则 $f_y\in X^*$ 且 $\|f_y\|\le\|y\|$

内容：设 $f\in X^*$，则 $\exists!\, y_f\in X$，$f(x)=\langle x,y_f\rangle$ $x\in X$ 且 $\|y_f\|=\|f\|$

$f\in X^*$ $\Downarrow$ $\exists!\, y$，$f(x)=\langle x,y\rangle$

定理 2.2.2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$a(x,y)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的共轭双线性函数，并 $\exists M>0$，使得
$$|a(x,y)|\leqslant M\|x\|\cdot\|y\|\quad(\forall x,y\in\mathscr{X}),$$
则存在唯一的 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，使得
$$a(x,y)=(x,Ay)\quad(\forall x,y\in\mathscr{X}),$$
且
$$\|A\|=\sup_{\substack{(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}\\x\ne\theta,y\ne\theta}}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}.\tag{2.2.3}$$

三大定理 $\left\{\begin{array}{l}\text{UBP. B-S}\\\text{OMT(开). CGT(图). 等价范数}\\\text{HBT 及其推论}\end{array}\right.$

证明：固定 $y\in H$，定义 $f_y(x)=a(x,y)$ $x\in H$。$\Rightarrow |f_y(x)|=|a(x,y)|\le C\|x\|\|y\|$ $\forall x\in H$

$\Rightarrow f_y\in H^*$ 且 $\|f_y\|\le C\|y\|\xRightarrow{\text{Riesz}}\exists!\, z\in H$，s.t. $f_y(x)=\langle x,z\rangle$ 且 $\|z\|=\|f_y\|$

令 $A: H\to H$，$y\mapsto z$ $\Rightarrow a(x,y)=f_y(x)=\langle x,z\rangle=\langle x,Ay\rangle$

1° A 线性 2° $\forall y\in H$，$\|Ay\|=\|z\|=\|f_y\|\le C\|y\|$，$\Rightarrow A\in\mathcal{L}(H)$ 且 $\|A\|\le C$

于是 $\|A\|\le\sup\limits_{\substack{x,y\in H\\x,y\ne\theta}}\dfrac{|a(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$

另一方面，$|a(x,y)|=|\langle x,Ay\rangle|\le\|x\|\cdot\|Ay\|\le\|A\|\cdot\|y\|\cdot\|x\|$ 证毕。

Baire 纲定理 (BCT. Baire Category Theorem)

定义：(X,d)，$E\subset X$，若 $\bar{E}$ 无内点，则称 E 是疏集或无处稠密集。

例：$\mathbb{Q}$ 不是疏集。Cantor 三分集是疏集。$\mathbb{R}^2$ 上有限点集是疏集。

定义：(X,d) 中，第一纲集 $\overset{\text{def}}{=}$ 可数疏集之并

第二纲集 $\overset{\text{def}}{=}$ 非第一纲集

BCT：完备度量空间一定是第二纲集。

Lemma (闭集套定理) (X,d) 完备，设一列闭球 $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ s.t.

1. $B_{k+1}\subset B_k$ $k=1,2,\cdots$ 2. $\operatorname{diam} B_k\to 0$ as $k\to\infty$ 则 $\bigcap\limits_{k=1}^\infty B_k=\{x_0\}$ $x_0\in X$

例：ℓ^2 中 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 O.N.B.，不是 Hamel 基。$\hookrightarrow$ $\operatorname{span}B=\ell^2$ 每向量为有限线性组合

(无穷维 Banach 空间) ℓ^2 的 Hamel 基一定不可数

定理：证：若 ℓ^2 存在一 Hamel 基 B 可数，令 $B=\{x_k\}_{k=1}^\infty$，$X_n\overset{\text{def}}{=}\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}\Rightarrow X_n$ 闭

并且 $\ell^2=\bigcup\limits_{n=1}^\infty X_n\xRightarrow{\text{BCT}}\exists n_0$ s.t. X_{n_0} 有内点，但真子空间无内点，矛盾！

ℓ^2 一定第二纲集，有内点。

纲推理

定理：(Banach, 1931) $\{C[0,1]$ 中处处不可微的函数$\}$ 是第二纲集。

证明：$X=C[0,1]$ $A=\{f\in C[0,1]\mid f$ 在 $[0,1]$ 上处处不可微$\}$

claim：$X\setminus A$ 为第一纲集。

$X\setminus A=\{f\in C[0,1]: f$ 至少在一点处可微$\}$

$A_n\overset{\text{def}}{=}\Big\{f\in C[0,1]\,\Big|\,\exists t\in[0,1-\frac1n]$，s.t. $\sup\limits_{h\in[-\frac1n,\frac1n]}\Big|\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\Big|\le n\Big\}$ $n=1,2,\cdots$

$\Rightarrow X\setminus A\subset\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$ 只需证每个 A_n 都是疏集。

1° A_n 闭。设 $A_n\ni f_k\to f$ 对每个 f_k，$\exists t_k\in[0,1-\frac1n]$ s.t. $|f_k(t_k+h)-f_k(t_k)|\le n|h|$ $\forall h\in[-\frac1n,\frac1n]$

$\{t_k\}_{k=1}^\infty$ 有收敛子列 $t_{k_j}\to t_0\in[0,1-\frac1n]$.

$|f(t_0+h)-f(t_0)|\le|f(t_0+h)-f(t_{k_j}+h)|+|f(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j}+h)|+|f_{k_j}(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j})|$
$+|f_{k_j}(t_{k_j})-f_{k_j}(t_0)|+|f_{k_j}(t_0)-f(t_0)|:=I_1+\cdots+I_5$

f 连续 $\Rightarrow I_1,I_5<\frac{|h|}{4}\varepsilon$ 当 j 充分大
$f_{k_j}\rightrightarrows f\Rightarrow I_2,I_4<\frac{|h|}{4}\varepsilon$ 当 j 充分大
定义 $\Rightarrow I_3\le n|h|$

$|f(t_0+h)-f(t_0)|\le(n+\varepsilon)|h|$ $h\in[-\frac1n,\frac1n]$
$\Rightarrow|f(t_0+h)-f(t_0)|\le n|h|$ 于是 $f\in A_n$，则 A_n 闭

2° $\operatorname{Int}A_n=\varnothing$ 只需证 $\forall f\in A_n$，$\forall\varepsilon>0$，$B(f,\varepsilon)\setminus A_n\ne\varnothing$ (范数为一致范数，$\|f\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$)

首先 $\exists p\in P[0,1]$ s.t. $\|f-p\|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow M\overset{\text{def}}{=}\max\limits_{t\in[0,1]}|p'(t)|\Rightarrow|p(t+h)-p(t)|\le M|h|$ $\forall h\in[-\frac1n,\frac1n]$，$t\in[0,1-\frac1n]$

设 $g\in C[0,1]$ s.t. ① 分段线性 ② $\|g\|<\frac{\varepsilon}{2}$ ③ 每段斜率绝对值 $>M+n$.

$\Rightarrow p+g\in B(f,\varepsilon)$ ($\|f-(p+g)\|\le\|f-p\|+\|g\|<\varepsilon$) 但 $p+g\notin A_n$ (有限个不可微点外，$|(p+g)'(t)|\ge|g'(t)|-|p'(t)|>M+n-n=M$)

证毕

于是 A_n 为疏集。证毕

定理 (UBP)：X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$\mathcal{F}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ (共鸣定理)

$\forall x\in X$，$\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|<\infty\Longrightarrow\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|T\|<\infty$ 等价地 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|T\|=\infty\Rightarrow\exists x_0\in X$ s.t. $\|Tx_0\|=+\infty$

逐点有界　一致有界

定理 (Banach-Steinhaus)：X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$T_n, T\subset\mathcal{L}(X,Y)$ $n=1,2,\cdots$ $M\overset{\text{dense}}{=}X$

$\forall x\in X$，$T_nx\to Tx\Leftrightarrow\begin{cases}\sup\limits_n\|T_n\|<\infty\\T_nx\to Tx\quad\forall x\in M\end{cases}$

逐点收敛

定理：X,Y 为 Banach 空间，$T_n\in\mathcal{L}(X,Y)$ $n=1,2,\cdots$，若 $\forall x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$ 存在，定义 $T: X\to X$，$x\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$

则 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 且 $\|T\|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$

逆算子定理：X,Y 为 Banach 空间，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$ T 为双射，则 $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$

开映射定理：X,Y 为 Banach 空间，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$，T 为满射 则 T 为开映射 开 $\to$ 开

定理 (Lax-Milgram)：H 为 Hilbert 空间，若 H 上共轭双线性泛函 $a(\cdot,\cdot): H\times H\to\mathbb{K}$ 满足

(i) (连续)：$\exists C>0$，s.t. $|a(x,y)|\le C\|x\|\|y\|$ $\forall x,y\in H$.

(ii) (强制)：$\exists\delta>0$，s.t. $\delta\|x\|^2\le a(x,x)$ $\forall x\in H$

则 $\exists!\, A\in\mathcal{L}(H)$，s.t. ① $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle$ $x,y\in H$

② A^{-1} 存在且有界，$\|A\|\le\frac{1}{\delta}$

定理 (等价范数定理)：$(X,\|\cdot\|_1)$，$(X,\|\cdot\|_2)$ 完备，且 $\|\cdot\|_1\lesssim\|\cdot\|_2$ 则 $\|\cdot\|_1\simeq\|\cdot\|_2$

定义：$(X,\|\cdot\|_X)$，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ $X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$ $\|(x,y)\|_{X\times Y}\overset{\text{def}}{=}\|x\|_X+\|y\|_Y$

称 $X\times Y$ 为 X 与 Y 的乘积空间。若 X,Y 完备，则 $X\times Y$ 完备。

定义：$T: X\to Y$ 线性算子，$Gr(T)\overset{\text{def}}{=}\{(x,Tx): x\in \underbrace{Dom(T)}_{\text{定义域}}\}\subset X\times Y$ 称为 T 的图像

若 $Gr(T)\overset{\text{closed}}{\hookrightarrow}X\times Y$，称 T 为闭线性算子　$\{$有界线性算子$\}\subset\{$闭算子$\}$

推论：T 为闭算子 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}Dom(T)\ni x_k\to x\\ Tx_k\to y\end{array}\ \text{就推出}\ \begin{array}{l}x\in Dom(T)\\ y=Tx\end{array}}$

$Gr(T)\ni(x_k,Tx_k)\to(x,y)\Rightarrow(x,y)\in Gr(T)$

例：无界闭算子. $T=\frac{d}{dt}: C[0,1]\to C[0,1]$ $Dom(T)=C^1[0,1]$ T无界

推论：$\left.\begin{array}{l} T\text{有界} \\ Dom(T)\overset{closed}{\hookrightarrow} X \end{array}\right\} \Rightarrow T$为闭算子

定理(BLT)：(Bounded Linear Transformation) X为赋范空间. Y为Banach空间. $T\in\mathcal{L}(Dom(T),Y)$

则$\exists!\ \tilde{T}\in\mathcal{L}(\overline{Dom(T)},Y)$ s.t. $\tilde{T}|_{Dom(T)}=T$ 且$\|\tilde{T}\|=\|T\|$ (保范延拓)

证明：$\forall x\in\overline{Dom(T)}$, $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Dom(T)$ s.t. $x_n\to x$. $\|Tx_m-Tx_n\|\le\|T\|\|x_m-x_n\|\to 0$ as $m,n\to\infty$

于是$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$为Y中基本列. 又Y完备$\Rightarrow\exists y\in Y$. s.t. $Tx_n\to y$

定义$\tilde{T}$: $\begin{array}{l}\overline{Dom(T)}\to Y\\ x\mapsto y\end{array}$ $\Rightarrow\tilde{T}$良定线性. $\forall x\in\overline{Dom(T)}$ $\|\tilde{T}x\|=\|y\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\|\le\lim\limits_{n\to\infty}\|T\|\|x_n\|=\|T\|\|x\|$

$\|\tilde{T}\|=\sup\limits_{0\ne x\in\overline{Dom(T)}}\frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|}\ge\sup\limits_{0\ne x\in Dom(T)}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\|T\|$

于是$\tilde{T}\in\mathcal{L}(\overline{Dom(T)},Y)$且$\|\tilde{T}\|\le\|T\|$. 另一边$\|\tilde{T}\|\ge\|T\|$是平凡的

闭图像定理(CGT)：X,Y为Banach空间. $T:X\to Y$为闭线性算子. 若$Dom(T)$闭, 则T有界 (连续)

证明：$Gr(T)\overset{closed}{\hookrightarrow}X\times Y$. $(Gr(T),\|\cdot\|_{X\times Y})$为Banach空间.

定义$\pi_1: \begin{array}{l}Gr(T)\to Dom(T)\\ (x,Tx)\mapsto x\end{array}$ $\pi_2: \begin{array}{l}Gr(T)\to Y\\ (x,Tx)\mapsto Tx\end{array}$

$$\begin{tikzcd} & Gr(T) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Dom(T) \arrow[rr, "T"'] & & Y \end{tikzcd}$$

则$T=\pi_2\circ\pi_1^{-1}$

π_2有界性显然. π_1是双射, 有界$\Rightarrow\pi_1^{-1}$有界. 则$T=\pi_2\circ\pi_1^{-1}$有界

例：(Hellinger–Toeplitz) H为Hilbert空间. 若$T:H\to H$自伴, i.e. $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$ $\forall x,y\in H$.

则$T\in\mathcal{L}(H)$

证明：只需验证T为闭算子. 随后用CGT即可.

设 $\begin{array}{l}x_n\to x\\ Tx_n\to y\end{array}$ $\forall z\in H$. $\langle z,Tx\rangle=\langle Tz,x\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle Tz,x_n\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle z,Tx_n\rangle=\langle z,y\rangle$

即$\langle z,Tx-y\rangle=0\Rightarrow y=Tx$ T为闭算子.

定义 1.4.21 设 $P:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$ 是线性空间 $\mathscr{X}$ 上的一个函数, 若它满足

(1) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$ $(\forall x,y\in\mathscr{X})$ (次可加性),

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$ $(\forall\lambda>0,\forall x\in\mathscr{X})$ (正齐次性),

则称 P 为 $\mathscr{X}$ 上的一个次线性泛函.

若正齐次性加强为齐次性$p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ $\forall x\in X$, $\lambda\in\mathbb{K}$. 则称p为X上半范数

性质：1. 半范数一定非负. $2p(x)=p(x)+p(-x)\ge 2p(0)=0$.

2. 若半范数p还满足"$p(x)=0\Rightarrow x=0$", 则p为范数.

3. 次线性泛函是凸函数.

子空间上$f\le p$!!!

定理(HBT on $\mathbb{R}$) X-实向量空间. M-子空间. P-X上次线性泛函. f-M上线性泛函 $(M\to\mathbb{R})$

有$f\le p$ $\forall x\in M$. 则$\exists X$上线性泛函F. s.t. $F|_M=f$ (延拓). $F(x)\le p(x)$ $\forall x\in X$ (受控).

定理(HBT on $\mathbb{C}$) X-复向量空间. M-子空间. P-X上半范数. f-M上线性泛函 $(M\to\mathbb{C})$

有$|f|\le p$ $\forall x\in M$. 则$\exists X$上线性泛函F. s.t. $F|_M=f$ (延拓). $|F(x)|\le p(x)$ $\forall x\in X$ (受控).

定理 2.4.4 (Hahn-Banach) 设 $\mathscr{X}$ 是 $\boxed{B^*}$ 空间, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函, 则在 $\mathscr{X}$ 上必有有界线性泛函 f 满足:

(1) $f(x)=f_0(x)$ $(\forall x\in\mathscr{X}_0)$ (延拓条件),

(2) $\|f\|=\|f_0\|_0$ (保范条件),

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 $\mathscr{X}_0$ 上的范数.

即子空间上连续线性泛函可保范地延拓至全空间.

HBT的延拓不唯一

例：$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$. $\|(x_1,x_2)\|_1=|x_1|+|x_2|$ $M=\mathbb{R}\times\{0\}$ $f: \begin{array}{l}M\to\mathbb{R}\\ (x,0)\mapsto x\end{array}$ 则$f\in M^*$且$\|f\|=1$ 一闭一空.

对$t\in(-1,1)$定义$F_t: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x_1,x_2)\mapsto x_1+tx_2\end{array}$ $\Rightarrow F_t|_M=f$.

$|F_t(x_1,x_2)|=|x_1+tx_2|\le\|(x_1,x_2)\|_1$ 则$F\in X^*$且$\|F\|\le 1=\|f\|$ 则$\|F\|=\|f\|$

推论：1° $\forall x_0\in X$, $\exists f\in X^*$, with $\|f\|=1$ s.t. $f(x_0)=\|x_0\|$.

证明：令$M\overset{def}{=}span\{x_0\}$. 定义$f_0: \begin{array}{l}M\to\mathbb{K}\\ x=\lambda x_0\mapsto\lambda\|x_0\|\end{array}$. $\Rightarrow|f_0(x)|=|\lambda|\|x_0\|=\|x\|$ $\forall x\in M$.

则$f_0\in M^*$且$\|f_0\|=1$ $\overset{HBT}{\Longrightarrow}\exists f\in X^*$. $\begin{cases}f|_M=f_0\\ \|f\|=\|f_0\|=1\end{cases}$ $\Rightarrow f(x_0)=f_0(x_0)=\|x_0\|$

2° $X\ne\{0\}\Rightarrow X^*\ne\{0\}$.

3° $X\ni x\ne y$. $\exists f\in X^*$, $\|f\|=1$. $f(x)\ne f(y)$

4° $\forall f\in X^*$, $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$.

定理 2.4.7 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, M 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间. 若 $x_0\in\mathscr{X}$, 且

$$d\triangleq\rho(x_0,M)>0,$$

则必 $\exists f\in\mathscr{X}^*$ 适合条件:

(1) $f(x)=0$ $(\forall x\in M)$;

(2) $f(x_0)=d$;

(3) $\|f\|=1$.

定理：X为赋范空间. $M\subset X$. $0\ne x_0\in X$. 则$x_0\in\overline{span M}\Leftrightarrow\forall f\in X^*$ with $f(M)=\{0\}$. 有$f(x_0)=0$.

证明：$\Rightarrow$) 若$\forall f\in X^*$. $f(M)=\{0\}$. 由线性：$f(span M)=\{0\}$. 由连续性. $f(\overline{span M})=0\Rightarrow f(x_0)=0$.

$\Leftarrow$) 若$x_0\notin\overline{span M}$. 则$d=dist(x_0,\overline{span M})>0$

由上一个定理. $\exists f\in X^*$ s.t. $f(\overline{span M})=\{0\}$ 且$f(x_0)=d>0$矛盾. 证毕

凸集分离定理 (几何形式的HBT)

定义：X为向量空间. $C\subset X$ (1) $\forall x,y\in C$. $\forall t\in[0,1]$. $tx+(1-t)y\in C$ 则称C为凸集

(2) 若$-C=C$. 称C是对称的

(3) 若$\forall x\in X$. $\exists t>0$. s.t. $\frac{x}{t}\in C$. 称C是吸收的.

推论：任一族凸集之交仍为凸集

定义：对$A\subset X$. $conv(A)\overset{def}{=}\bigcap\limits_{\substack{C\supset A\\ C凸}}C$ 称为A的凸包. $convA=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\,\middle|\,\begin{array}{l}x_1,\cdots,x_n\in A\\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in[0,1],\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1\\ n\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$

定义：X为向量空间. C为包含原点的凸集. 定义$P_C: \begin{array}{l}X\to[0,+\infty]\\ x\mapsto\inf\{t\mid\frac{x}{t}\in C\}\end{array}$ 称为C的Minkowski泛函

性质：(1) $P_C(0)=0$ (2) 正齐次 $P_C(tx)=tP_C(x)$ $\forall x\in X$, $t>0$

(3) 次可加 $P_C(x+y)\le P_C(x)+P_C(y)$ $\forall x,y\in X$

定义：X为复向量空间. C为包含0的凸集. 若$\forall x\in C$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$. $e^{i\theta}x\in C$ 则称C是均衡的.

命题 1.5.10 复线性空间 $\mathscr{X}$ 上的任一个均衡吸收凸集 C, 决定了这空间上的一个半范数.

定义 2.4.10 在线性空间 $\mathscr{X}$ 中, $\mathscr{X}$ 的线性子空间 M 称为是极大的, 如果对于任何一个以 M 为真子集的线性子空间 M_1 必有 $M_1=\mathscr{X}$.

推论：M为极大子空间$\Leftrightarrow\exists x_0\in X$ s.t. $X=M\oplus span\{x_0\}\Leftrightarrow dim(X/M)=1$

定义 2.4.12 $\mathscr{X}$ 的极大线性子空间 M 对向量 $x_0\in\mathscr{X}$ 的平移

$$L\triangleq x_0+M$$

称为极大线性流形, 或简称超平面.

推论：L是超平面$\Leftrightarrow L=H_f^r=\{x\in X\mid f(x)=r\}$

若$f\in X^*$. H_f^r为闭超平面.

定义 2.4.14 所谓超平面 $L=H_f^r$ 分离集合 E 与 F, 是指:

$$\forall x\in E\Longrightarrow f(x)\leqslant r\ (\text{或}\ \geqslant r),$$
$$\forall x\in F\Longrightarrow f(x)\geqslant r\ (\text{或}\ \leqslant r).$$

$\sup\limits_{x\in E}f(x)\le r\le\inf\limits_{x\in F}f(x)$

如果在上面两个式子中, 用 "<"与 ">" 分别代替 "⩽" 与 "⩾", 那么就说 H_f^r 严格分离 E 与 F.

定理 2.4.15 (Hahn-Banach 定理的几何形式) 设 E 是实 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上以 θ 为内点的真凸子集, 又设 $x_0\bar{\in}E$, 则必存在一个超平面 H_f^r 分离 x_0 与 E.

两凸 其中一为开

定理 2.4.16 (凸集分离定理) 设 E_1 和 E_2 是 B^* 空间中两个互不相交的非空凸集, E_1 有内点, 那么 $\exists s\in\mathbb{R}$ 及非零连续线性泛函 f, 使得超平面 H_f^s 分离 E_1 和 E_2. 换句话说, 存在一个非零连续线性泛函 f, 使得 ← 总结性定理

$$f(x)\leqslant s\quad(\forall x\in E_1),\qquad f(x)\geqslant s\quad(\forall x\in E_2).$$

推论 2.4.17 (Ascoli 定理) 设 E 是实 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集, 则 $\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash E$, $\exists f\in\mathscr{X}^*$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$, 适合

$$f(x)<\alpha<f(x_0)\quad(\forall x\in E).\tag{2.4.17}$$

推论 2.4.18 (Mazur 定理) 设 E 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个有内点的闭凸集, F 是 $\mathscr{X}$ 上的一个线性流形, 又设 $\mathring{E}\cap F=\varnothing$, 那么存在一个包含 F 的闭超平面 L, 使 E 在 L 的一侧.

线性子流形 即线性子空间的平移

X-实赋范空间. C-开凸集. F-线性子流形 若$C\cap F=\phi$ 则$\exists H_f^r$闭 s.t. $\begin{cases}F\subset H_f^r\\ \sup\limits_{x\in C}f(x)\le r\end{cases}$

定义：H_f^r是凸集C在x_0处的支撑超平面是指 ① C完全落在H_f^r一侧

即$\sup\limits_{x\in C}f(x)\le r=f(x_0)$ 或 $\inf\limits_{x\in C}f(x)\ge r=f(x_0)$ ② $x_0\in H_f^r\cap\bar{C}$

定理 2.4.21 设 E 是实 B^* 空间中含有内点的闭凸集, 那么通过 E 的每个边界点都可以作出 E 的一个承托超平面.

定义：对赋范线性空间X. X上所有连续线性赋范全体X^*按范数$\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|$ 构成一Banach空间. 称为X的共轭空间.

Riesz表示定理：H为Hilbert空间. $\underset{\uparrow}{H=H^*}$ 则$J: \begin{array}{l}H\to H^*\\ y\mapsto f_y(x)\overset{\Delta}{=}\langle x,y\rangle\end{array}$ 为线性等距同构.

① $\forall y\in H$. $f_y(x)=\langle x,y\rangle$ $x\in H$. 则$f_y\in H^*$且$\|f_y\|=\|y\|$

② $\forall f\in H^*$, $\exists!\,y_f\in H$. $f=f_{y_f}$

Riesz

定理: $L^p[0,1]$ 的共轭空间为 $L^q[0,1]$. 其中 $\begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 & 若 p>1 \\ q=\infty & 若 p=1 \end{cases}$ $(1\le p<\infty)$

定理: $L^1 \subsetneq (L^\infty)^*$

定义: $BV[a,b] \overset{def}{=} \{f \mid V_a^b f<\infty\}$ $V_a^b f \overset{def}{=} \sup\limits_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)-f(t_{k-1})|$ （Δ为划分） $t_0, t_1, \cdots, t_n$ (a 到 b) $\|f\|_{BV} \triangleq |f(a)|+V_a^b f$

$BV_0[a,b] \overset{def}{=} \{f\in BV[a,b] \mid f 在[a,b]右连续, f(a)=0\}$ 则 $BV_0[a,b] \xrightarrow{closed} BV[a,b]$, 为Banach空间.

定义: Riemann-Stieltjes 积分 f,g 为$[a,b]$上实函数. $I\in\mathbb{R}$. 对$[a,b]$中划分Δ. $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$

则 $\sigma(\Delta,\xi) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(t_k)-g(t_{k-1})]$. 若 $\sigma(\Delta,\xi)\to I$ as $\|\Delta\|\to 0$（与Δ的分法和ξ选取无关）. 则称I为f关于g的Riemann-Stieltjes积分(R-S积分), 记$I=\int_a^b f\,dg$

结论: $\left.\begin{matrix} f\in C[a,b] \\ g\in BV[a,b]\end{matrix}\right\}$ $\int_a^b f\,dg$ 存在

Riesz

定理: $C[a,b]^* = BV_0[a,b]$

i.e. 1. $\forall g\in BV_0[a,b]$ $\Lambda_g(f) \overset{def}{=} \int_a^b f\,dg$ $f\in C[a,b]$ 有 $\Lambda_g\in C[a,b]^*$ 且 $\|\Lambda_g\|=\|g\|_{BV}$

2. $\forall \Lambda\in C[a,b]^*$ $\exists!\, g\in BV_0[a,b]$ $\Lambda=\Lambda_g$ 且 $\|g\|_{BV}=\|\Lambda\|$

定义: $X^{**} \overset{def}{=} (X^*)^* = \mathcal{L}(X^*,\mathbb{K})$ 称为X的二次对偶或第二共轭空间.

对 $x\in X$. 定义映射 $x^{**}: X^*\to\mathbb{K}$, $f\mapsto f(x)$ $\Rightarrow |x^{**}(f)|=|f(x)|\le\|x\|\|f\|$ $\forall f\in X^*$

则有 $x^{**}\in X^{**}$ 且 $\|x^{**}\|\le\|x\|$

另一方面. 由HBT, $\exists f_0\in X^*$. $\|f_0\|=1$ s.t. $x^{**}(f_0)=f_0(x)=\|x\|\Rightarrow\|x^{**}\|\ge\|x\|$ 弱收敛有关

于是存在映射 $i: X\to X^{**}$, $x\mapsto x^{**}$ 是线性等距嵌入（不是同构）

称为从X到X^{**}的自然嵌入. 自反空间定义

定义: ~~若自然映射~~ $i: X\to X^{**}$ 是满射.（从而是线性等距同构）则称X是自反的, 记$X^{**}=X$

tip: 存在非自反的Banach空间X s.t. $X\cong X^{**}$线性等距同构.

例: 1. 不完备赋范空间一定非自反 又自反: $L^1, L^\infty, C[0,1]$

2. 有限维赋范空间自反

3. Hilbert空间自反 ($i: L^p\to L^{p**}$ 满 $\Leftrightarrow \forall\Lambda\in L^{p**}$, $\exists u\in L^p$ s.t. $\Lambda=u^{**}$ i.e. $\Lambda(f)=u^{**}(f)=f(u)$)

定理: $1<p<\infty$ 时 L^p 自反

证明: 即证 $\forall\Lambda\in(L^p)^{**}$. $\exists u\in L^p$ s.t. $\Lambda(f)=f(u)$ $\forall f\in(L^p)^*$

$$\begin{tikzcd} L^{p'} \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (L^p)^* \arrow[d, "\Lambda"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

由结论知 $J: L^{p'}\to L^{p*}$, $v\mapsto f_v$ 为线性等距同构. $f_v(u)=\int uv$

令 $\varphi \overset{def}{=} \Lambda\circ J \Rightarrow \varphi\in(L^{p'})^* \xRightarrow{(L^{p'})^*=L^p} \exists!\,u\in L^p$ s.t. $\varphi=f_u$ i.e. $\varphi(v)=\int vu$ $\forall v\in L^{p'}$

$\forall f\in(L^p)^*$. 令 $v_f \overset{def}{=} J^{-1}(f)$, 则 $\Lambda(f)=\Lambda(J\circ J^{-1}(f))=\Lambda\circ J(v_f)=\varphi_{v_f}=\int v_f u=\int u v_f=f(u)$. 证毕

定理(Banach) X^*可分 $\Rightarrow X$可分（逆命题不成立. 如L^1可分而L^∞不可分）

证明: Step 1: X^*可分 $\Rightarrow X^*$中单位球面S_1^*可分

$\exists\{f_n\} \overset{dense}{\subset} X^*$ 不妨设 $f_n\ne 0$, $\forall n$. 令 $g_n=\frac{f_n}{\|f_n\|}$ $n\in\mathbb{N}$. $\forall g\in S_1^*$ $\exists f_{n_k}\to g$

$\|g-g_{n_k}\|\le\|g-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-g_{n_k}\|=\|g-f_{n_k}\|+|\|f_{n_k}\|-1|\to 0$ as $k\to\infty \Rightarrow \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{dense}{=} S_1^*$. 证毕

Step 2: $\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$. $\|x_n\|=1$. s.t. $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{dense}{=} X$

注意到 $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|g_n(x)|=\|g_n\|=1 \Rightarrow \exists x_n\in X$. $\|x_n\|=1$ s.t. $|g_n(x_n)|>\frac{1}{2}$

claim: $\overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}=X$. 若不然. 若 $\exists x_0\in X\setminus\overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$

$f\in S_1^*$

由HBT $\Rightarrow \exists f\in X^*$, $\|f\|=1$, s.t. $f(\overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})})=0$. 且 $f(x_0)=\mathrm{dist}(x_0,\overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})})>0$.

$\|g_n-f\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|g_n(x)-f(x)|\ge|g_n(x_n)-f(x_n)|=|g_n(x_n)|>\frac{1}{2}$ 矛盾!

Step 3: $\underbrace{\mathrm{span}^{\circledast}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}_{可数} \overset{dense}{\subset} X$ 其中 $\mathrm{span}^{\circledast}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})=\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i\in\mathbb{Q}或\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\}$ 是可数集

于是只需证其在X中稠密. $\forall y\in\mathrm{span}\{x_n\}$, $y=\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ $a_i\in\mathbb{K}$.

若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 有$\mathbb{Q}$为$\mathbb{R}$稠密子集. $\forall a_i\in\mathbb{R}$. $\exists\{r_{i,k}\}\subset\mathbb{Q}$. $r_{i,k}\to a_i$ as $k\to\infty$

若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 有$\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$为$\mathbb{C}$稠密子集. $\forall a_i=b_i+c_i i$, $b_i, c_i\in\mathbb{R}$. $\exists\{b_{i,k}\}\to b_i$. $\{c_{i,k}\}\to c_i$. 令 $r_{i,k}=b_{i,k}+i c_{i,k}$.

令 $y_k=\sum_{i=1}^{n} r_{i,k}x_i$ 有 $y_k\in\mathrm{span}^{\circledast}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. $\|y_k-y\|=\|\sum_{i=1}^{n}(r_{i,k}-a_i)x_i\|\le\sum_{i=1}^{n}|r_{i,k}-a_i|\|x_i\|\to 0$ as $k\to\infty$

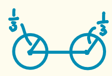
则 $\mathrm{span}^{\circledast}\{x_n\} \overset{dense}{\subset} \mathrm{span}\{x_n\} \overset{dense}{\subset} X \Rightarrow$ 证毕. X可分.

定理: $1\le p<\infty$ 时 $L^p[0,1]$ 可分

$\{\sum_{k=1}^{2^n} r_k\chi_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})} : r_k\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}_0\} \overset{dense}{\subset} L^p[0,1]$

定理: $L^\infty[0,1]$ 不可分

证明: 若可分. $\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{dense}{\subset} L^\infty[0,1]$. $\forall t\in(0,1)$. $\exists f_{n_t}$ s.t. $f_{n_t}\in B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$



而 $\mathrm{dist}\{\chi_{[0,s]},\chi_{[0,t]}\}=1$ if $t\ne s$. $\Rightarrow$ 不同的$B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$互不相交

则映射 $\varphi: (0,1)\to\mathbb{N}$, $t\mapsto n_t$ 是单射 $\Rightarrow (0,1)$与$\mathbb{N}$的某子集一一对应. 矛盾! ($\aleph\gg\aleph_0$)

定理: $1<p<\infty$. L^p自反. L^1不自反.

定义 2.5.9 (共轭算子) 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, 算子 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 算子 $T^*:\mathscr{Y}^*\to\mathscr{X}^*$ 称为是 T 的共轭算子是指:

$$f(Tx)=(T^*f)(x) \quad (\forall f\in\mathscr{Y}^*,\forall x\in\mathscr{X}).$$

定理 2.5.10 映射 $*: T\mapsto T^*$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$ 内的等距同构.

定理(pettis) 自反空间的闭子空间自反

对偶基: $e_1,\cdots,e_n$为X的Hamel基. $\exists f_1,\cdots,f_n$ s.t. $f_i(e_j)=\delta_{ij}$

定义: 称$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$弱收敛于$x_0\in X$是指 $f(x_n)\to f(x_0)$ $\forall f\in X^*$ 记为 $x_n\xrightarrow{w}x_0$ 或 $x_n\rightharpoonup x_0$

x_0称为$\{x_n\}_{n=1}^\infty$的弱极限.

推论: 弱极限若存在则一定唯一

证明: 设 $\begin{cases} x_n\xrightarrow{w}x_0 \\ x_n\xrightarrow{w}y_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x_n)\to f(x_0) \\ f(x_n)\to f(y_0)\end{matrix}$ $\forall f\in X^*$. $\Rightarrow f(x_0)=f(y_0)$ $\forall f\in X^* \xRightarrow{HBT} x_0=y_0$.

定义: 范数拓扑意义下的收敛称为强收敛.

推论: 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛

证明: $\|x_n-x\|\to 0 \Rightarrow |f(x_n)-f(x_0)|\le\|f\|\cdot\|x_n-x_0\|\to 0$ $\forall f\in X^*$

例: $L^2(\mathbb{T})$中 $e_k(t) \overset{def}{=} e^{-2\pi ikt}$ $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow e_k\xrightarrow{w}0$ as $k\to\infty$

证明: $\forall f\in L^2(\mathbb{T})^*$, $\exists!\,v\in L^2(\mathbb{T})$ s.t. $f(u)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(t)v(t)\,dt$ $u\in L^2(\mathbb{T})$

$\Rightarrow f(e_k)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v(t)e^{-2\pi ikt}\,dt=\hat{v}(k)\to 0$ as $|k|\to\infty$ (Riemann-Lebesgue引理)

推论: $\dim X<\infty \Rightarrow$ 强与弱收敛等价.

Mazur定理: $x_n\xrightarrow{w}x_0 \Rightarrow x_0\in\overline{\mathrm{conv}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}$（凸包）

定义: 称$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset X^*$弱*收敛于$f\in X^*$是指 $f_n(x)\to f(x)$ $\forall x\in X$ 记为 $f_n\xrightarrow{w^*}f$

推论: X^*中强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱*收敛

证明: 设 $f_n\xrightarrow{w}f \overset{def}{\Leftrightarrow} \Lambda(f_n)\to\Lambda(f)$ $\forall\Lambda\in X^{**}$ $\overset{满射}{\Leftarrow}$ $x^{**}(f_n)\to x^{**}(f)$ $\forall x\in X$

推论: 若X自反. X^*中弱收敛 $\Leftrightarrow$ 弱*收敛 (因为) $\Leftrightarrow f_n(x)\to f(x)$ $\forall x\in X \Rightarrow f_n\xrightarrow{w^*}f$

定理: $(X,\|\cdot\|)$. $x_n\xrightarrow{w}x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sup_n\|x_n\|<\infty \\ \exists\,\mathcal{F}\overset{dense}{\subset}X^* \text{ s.t. } f(x_n)\to f(x_0)\ \forall f\in\mathcal{F}\end{cases}$

定理: X为Banach空间. $f_n\xrightarrow{w^*}f \Leftrightarrow \begin{cases}\sup_n\|f_n\|<\infty \\ \exists\,M\overset{dense}{\subset}X \text{ s.t. } f_n(x)\to f(x)\ \forall x\in M\end{cases}$

定义: 称$M\subset X$弱列紧是指M中每个序列都有弱收敛子列.

·· 弱*列紧 ·· ·· ·· 弱* ·· ··

Banach-Alaoglu定理: X可分 $\Rightarrow X^*$中有界集弱*列紧.（Rmk: X^*中闭单位球是弱*紧的）

定理 2.5.28 (Eberlein-Smulian) 自反空间的单位(闭)球是弱(自)列紧的.

X自反 $\Rightarrow X$中有界集弱列紧.

请

定义: X-Banach空间, $A,B\in\mathcal{L}(X)$, $(AB)(x)\triangleq A(Bx)$

1. $(AB)C=A(BC)$ 2. $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ 3. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ 4. $AI=A=IA$ 5. $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$.

则称$\mathcal{L}(X)$为Banach代数

定义: $A\in\mathcal{L}(X)$可逆是指$\exists B\in\mathcal{L}(X)$ s.t. $AB=I=BA$

$\sigma(A)$为非空紧集.

定义: $\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda I-A不可逆\}$ 称为A的谱集. $\sigma(A)$中元素称为谱点.

$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda I-A可逆\}$ 称为A的预解集. $\rho(A)$中元素称为正则点.

tip: $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$

定义: 若$\lambda\in\mathbb{C}$ s.t. $\mathrm{Ker}(\lambda I-A)\ne\{0\}$ 即$\exists\,0\ne x\in X$ s.t. $Ax=\lambda x$ 则称λ为A的特征值.

$\sigma_p(A)=\{A的特征值\}$ 称为A的点谱.

n阶复方阵一定有特征值至多有n个复根.

例: $X=\mathbb{C}^n$, $A\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $\sigma(A)=\sigma_p(A)\ne\phi$. $\#\sigma(A)\le n$

即$\lambda I-A$非单射

$\lambda\in\mathbb{C}$ $\to$ $\mathrm{Ker}(\lambda I-A)\ne\{0\}\to\lambda\in\sigma_p(A)$

Ran为Im

$\lambda\in\mathbb{C}$ $\to$ $\mathrm{Ker}(\lambda I-A)=\{0\}\to\begin{cases}\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\ne X \\ \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}=X\end{cases}$ 称λ为A的连续谱点. 记$\lambda\in\sigma_c(A)$

$\to$ $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\ne X$ 称λ为A的剩余谱点. 记$\lambda\in\sigma_r(A)$

$\to$ $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)=X\to\lambda\in\rho(A)$

故 $\sigma(A)=\sigma_p(A)\sqcup\sigma_c(A)\sqcup\sigma_r(A)$

例: 乘法算子$A: C[0,1]\to C[0,1]$, $u(t)\mapsto tu(t)$. $\sigma_p(A)=\phi$

若u有$(\lambda I-A)u=0\Rightarrow(\lambda-t)u(t)=0$ $t\in[0,1]\Rightarrow u(t)=0$.

证明 $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$

1° $\mathbb{C}\setminus[0,1]\subset\rho(A)$. 对$\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$, 令 $T: C[0,1]\to C[0,1]$, $u(t)\mapsto\frac{1}{\lambda-t}u(t)$ 则有 $(\lambda I-A)T=I=T(\lambda I-A)$

$\|Tu\|\le(\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{1}{|\lambda-t|})\cdot\|u\|$ 即 $T=(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\Rightarrow\lambda\in\rho(A)$

2° $[0,1]\subset\sigma_r(A)$. 设$\lambda\in[0,1]$. $\forall v\in\mathrm{Im}(\lambda I-A)$, $\exists u\in C[0,1]$ s.t. $v(t)=(\lambda-t)u(t)$ $t\in[0,1]$

则有 $v(\lambda)=0$. $\Rightarrow 1\notin\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\Rightarrow\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\ne X$. $\lambda\in\sigma_r(X)$. 故 $[0,1]\subset\sigma_r(A)\subset\sigma(A)\subset[0,1]$ 证毕

例: 乘法算子$A: L^2[0,1]\to L^2[0,1]$, $u(t)\mapsto tu(t)$. $\sigma_p(A)=\phi$ 证明 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$

1° 同上. 2° $\forall\lambda\in[0,1]$. $\mathrm{Im}(\lambda I-A)\ne X$. claim: $1\notin\mathrm{Im}(\lambda I-A)$. 若$1\in\mathrm{Im}(\lambda I-A)$, 则$\exists u\in L^2[0,1]$ s.t. $(\lambda-t)u(t)=1\Rightarrow\frac{1}{\lambda-t}\in L^2[0,1]$ 矛盾!

3° $\forall\lambda\in[0,1]$. $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\overset{dense}{=}X$.

$\forall v\in L^2[0,1]$. $\forall\varepsilon>0$. 有 $u_\varepsilon(t)=\frac{1}{\lambda-t}v(t)\chi_{[0,1]\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}\in L^2[0,1]$

$\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\ni(\lambda I-A)u_\varepsilon=v\cdot\chi_{[0,1]\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}\xrightarrow{L^2}v$ as $\varepsilon\to 0^+$

则 $v\in\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}$. 则 $[0,1]\subset\sigma_c(A)\subset\sigma(A)\subset[0,1]$ 证毕

定义 2.6.5 算子值函数 $R_\lambda(A):\rho(A)\to\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 定义为

$$\lambda\mapsto(\lambda I-A)^{-1} \quad (\forall\lambda\in\rho(A)),$$

称为 A 的预解式.

引理 2.6.6 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X}), \|T\|<1$, 则 $(I-T)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 并且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}. \tag{2.6.1}$$

并且 $(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k$ (Neumann级数)

推论 2.6.7 设 A 是闭线性算子, 则 $\rho(A)$ 是开集.

证 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 则

$$\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}].$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时,

$$B \triangleq [I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X}).$$

从而

$$(\lambda I - A)^{-1} = BR_{\lambda_0}(A) \in \mathscr{L}(\mathscr{X}), \qquad (2.6.4)$$

即得 $\lambda \in \rho(A)$. ■

定义: X-复Banach空间. $\Omega \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$. 称算子值函数 $T: \Omega \to \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto T_\lambda$ 在 $\lambda_0 \in \Omega$ 上全纯是指 ∃邻域 $U \ni \lambda_0$, s.t. $\forall \lambda \in U$, $\exists S_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ s.t. $\left\|\frac{T_{\lambda+z} - T_\lambda}{z} - S_\lambda\right\| \to 0$ as $|z| \to 0$

定理: 预解算子 $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 中为算子值全纯函数.

引理(第一预解算子公式, R.I): $R_\mu(A) - R_\lambda(A) = (\lambda - \mu)\underbrace{R_\lambda(A)R_\mu(A)}_{\text{此二者可交换}}$ 对 $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$.

谱不空定理: $A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \sigma(A) \neq \phi$

定义 2.6.11 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 称数

$$r_\sigma(A) \triangleq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

为 A 的谱半径.

定理 2.6.12 (Gelfand) 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 那么

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

例: 右移位算子 $A: \ell^2 \to \ell^2$, $(x_1, \cdots) \to (0, x_1, \cdots)$, 有 $\sigma_p(A) = \phi$. $\sigma_c(A) = \partial\mathbb{D}$, $\sigma_r(A) = \mathbb{D}$

$\mathbb{D}$ 为单位圆盘(开)

证明: 由Gelfand定理, $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}$

① 若 $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\exists 0 \neq x \in \ell^2$ 有 $(\lambda I - A)x = 0$. $(0, x_1, \cdots) = Ax = \lambda x = (\lambda x_1, \cdots)$

故有 $\begin{cases} \lambda x_1 = 0 \\ \lambda x_{k+1} = x_k \\ \cdots \end{cases}$ 若 $\lambda = 0 \Rightarrow x = 0$. 若 $\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0, \cdots, x_k = 0, \cdots$ 则 $x = 0$. $\Rightarrow x$ 一定为0. 则 $\sigma_p(A) = \phi$

② $\mathbb{D} \subset \sigma_r(A)$. 设 $\lambda \in \mathbb{D}$. 要证明 $\overline{Im(\lambda I - A)} \neq \ell^2 \Leftrightarrow Im(\lambda I - A)^\perp \neq \{0\}$

令 $\xi \overset{def}{=} \{1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \cdots\} \Rightarrow \forall x \in \ell^2$ ($\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k \bar{y}_k$) 有 $\langle(\lambda I - A)x, \xi\rangle = \langle(\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots), (1, \bar\lambda, \cdots)\rangle = \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \lambda x_1 + \cdots = 0$

于是 $\xi \in Im(\lambda I - A)^\perp$

③ $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_c(A)$. 设 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Step 1: $Im(\lambda I - A) \neq \ell^2$. 设 $y \in Im(\lambda I - A) \Rightarrow \exists x \in \ell^2$. $y = (\lambda I - A)x$. 则 $\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_k = \lambda x_k - x_{k-1} \ (k \geq 2) \end{cases}$

即有 $\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ \lambda^{k-1} y_k = \lambda^k x_k - \lambda^{k-1} x_{k-1} \ (k \geq 2) \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} y_k = \lambda^n x_n$

若 $Im(\lambda I - A) = \ell^2 \overset{y = e_1}{\Longrightarrow} \exists x \in \ell^2$ s.t. $(\lambda I - A)x = e_1$ 则由上式. $1 = \lambda^n x_n \Rightarrow x = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \cdots)$ 与 $x \in \ell^2$ 矛盾. ($\sum_{k=1}^\infty |\lambda^{-k}|^2 = \sum_{k=1}^\infty 1 \not< +\infty$)

Step 2: $\overline{Im(\lambda I - A)} = \ell^2 \Leftrightarrow Im(\lambda I - A)^\perp = \{0\}$. 对 $\forall \xi \in Im(\lambda I - A)^\perp$, $0 = \langle \xi, \underbrace{(\lambda I - A)e_n}_{(0, \cdots, 0, \lambda, -1, 0, \cdots)} \rangle = \bar\lambda \xi_n - \xi_{n+1}$ $\forall n$.

故可得 $\xi_{n+1} = \bar\lambda \xi_n$, $|\xi_{n+1}| = |\xi_n|$, $\forall n \overset{\xi \in \ell^2}{\Longrightarrow} \xi = 0$

由②.③ $\Rightarrow \overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(A)$, 又 $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(A) = \overline{\mathbb{D}}$, $\sigma_r(A) = \mathbb{D}$. $\sigma_c(A) = \partial\mathbb{D}$. 证毕

第三章 紧算子与Fredholm算子

定义: $X.Y$ 为Banach空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

① 若 A 把每个有界集映为列紧集. 则称 A 是紧的. 记为 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$

② 若 A 把 X 中每个弱收敛序列映为 Y 中强收敛序列. 则称 A 全连续

③ 若 $\overbrace{\dim Im(A)}^{rank A} < \infty$. 则称 A 为有限秩算子. 记 $A \in \mathcal{F}(X, Y)$

推论: $\mathcal{F}(X, Y) \hookrightarrow \mathfrak{C}(X, Y)$

证明: 设 $A \in \mathcal{F}(X, Y)$. $\forall M$ 为 X 中有界集 $\overset{A有界}{\Longrightarrow} A(M)$ 为 $Im(A)$ 中有界集.

又 $Im(A)$ 有限维 $\Rightarrow A(M)$ 列紧.

例: $I \in \mathfrak{C}(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty$ —— ☆. 用于证有限维.

推论: $\mathfrak{C}(X, Y) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(X, Y)$

证明: 设 $A_n \in \mathfrak{C}(X, Y)$, $n = 1, 2, \cdots$, s.t. $\|A_n - A\| \to 0$ as $n \to \infty$. 下证 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$

设 M 为 X 中有界集. $C \overset{def}{=} \sup_{x \in M} |x| < \infty$. claim: $A(M)$ 列紧.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N$. s.t. $\|A_N - A\| < \frac{\varepsilon}{3C}$. $A_N(M)$ 列紧 $\Rightarrow$ 有有穷 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $\{A_N x_1, \cdots, A_N x_m\}$

i.e. $A_N(M) \subset \bigcup_{k=1}^m B(A_N x_k, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow \forall x \in M$, $\exists k \in \{1, \cdots, m\}$ s.t. $\|A_N x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \|Ax - Ax_k\| \leq \underbrace{\|Ax - A_N x\|}_{\leq C \cdot \|A - A_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|A_N x - A_N x_k\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|A_N x_k - Ax_k\|}_{\leq C \cdot \|A - A_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$ 即 $\{Ax_1, \cdots, Ax_m\}$ 为A的ε网

则 A 列紧. 故 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$ 即 $\mathfrak{C}(X, Y)$ 闭. 证毕.

推论: 紧算子值域可分.

证明: $Im(A) = A(X) = \bigcup_{k=1}^\infty \underbrace{A(B(0, k))}_{列紧 \Rightarrow 可分}$. 设 M_k 为 $A(B(0, k))$ 可数稠密子集

则 $\bigcup_{k=1}^\infty M_k$ 为 $Im A$ 可数稠密子集

推论: 有界算子与紧算子的复合为紧算子(不关顺序)

定理: 对 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ① 紧 $\Rightarrow$ 全连续 ② 若 X 自反. 则 A 紧 $\Leftrightarrow$ 全连续

Riesz−Fredholm理论

定理: 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T \overset{def}{=} I - A$

(1) $\dim Ker(T) < \infty$

(2) $Ran(T) \overset{closed}{\hookrightarrow} X$ (称T为闭值域算子)

(3) T 单 $\Leftrightarrow$ T 满 (F.A = Fredholm Alternative = 择一律)

(4) $Ran(T) = Ker(T^*)^\perp$. 此处对 $F \subset X^*$, $F^\perp \overset{def}{=} \{x \in X: f(x) = 0 \ \forall f \in F\}$ 称为 F 在 X 中的零化子.

(5) $\dim Ker(T) = \dim Ker(T^*)$

T:
- $\forall y \in X$. $Tx = y$ 有唯一解 ($\Leftrightarrow T$ 为双射)
- $Tx = 0$ 有非零解 ($\Leftrightarrow T$ 非单射 $\overset{F.A.}{\Leftrightarrow} T$ 非满射 $\Rightarrow \exists y \in X$. s.t. $Tx = y$ 无解)

证明: (1) 令 $M \overset{def}{=} Ker T$. S_M − M 中单位闭球面. S_X − X 中单位闭球面

$x \in S_M \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S_X \\ x - Ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S_X \\ x = Ax \in A(S_X) \end{cases} \Rightarrow S_M \subset A(S_X)$. 由 S_X 有界. $A \in \mathfrak{C}(X)$ 知 S_M 列紧

于是有 $\dim Ker T = \dim M < \infty$

(2) 设 $Ran(T) \ni y_n \to y$. $\exists x_n \in X$. $Tx_n = y_n$ 要证 $y \in Ran(T)$.

Case 1: $\{x_n\}_{n=1}^\infty \overset{bdd}{\subset} X$. $\overset{A\ cpt}{\Longrightarrow} \{Ax_n\}_{n=1}^\infty$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. 设 $Ax_{n_k} \to u$.

由 $I = T + A \Rightarrow x_{n_k} = Tx_{n_k} + Ax_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \to u + y$ 则 $Tx_{n_k} \to T(u + y) \overset{Tx_{n_k} \to y}{\Longrightarrow} y = T(u + y) \in Ran(T)$

Case 2: $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 无界. 令 $d_n \overset{def}{=} dist(x_n, \underbrace{Ker(T)}_{有限维子空间}) \overset{存在最佳逼近元}{\Longrightarrow} \exists z_n \in Ker T$ s.t. $\|x_n - z_n\| = d_n$

claim: $\{x_n - z_n\}_{n=1}^\infty \overset{bdd}{\subset} X$

若不然. $\sup_n d_n = +\infty$ 不妨设 $d_n \to \infty$. 令 $v_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}$ $\forall n \Rightarrow Tv_n = \frac{Tx_n - \overset{0}{Tz_n}}{d_n} = \frac{y_n}{d_n} \to 0$ as $n \to \infty$

令一方面. $\{v_n\}_{n=1}^\infty \overset{bdd}{\subset} X \overset{A\ cpt}{\Longrightarrow} \{Av_n\}_{n=1}^\infty$ 有收敛子列. 设 $Av_{n_k} \to w \overset{Tv_{n_k} \to 0}{\Longrightarrow} v_{n_k} = Tv_{n_k} + Av_{n_k} \to w \overset{Tv_{n_k} \to Tw,\ Tv_n \to 0}{\Longrightarrow} Tw = 0$. $w \in Ker T$

对 $\forall z \in Ker T$. $\|v_n - z\| = \frac{1}{d_n}\|x_n - \underbrace{(z_n + d_n z)}_{\in Ker T}\| = \frac{\|x_n\|}{d_n} \geq \frac{d_n}{d_n} = 1 \Rightarrow dist(v_n, Ker T) \geq 1$ 与 $v_{n_k} \to w \in Ker T$ 矛盾!

则claim成立. 仍归为Case 1

Riesz−Schauder理论

定理: X 为复Banach空间. $A \in \mathfrak{C}(X)$

(1) 若 $\dim X = \infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ 即非零谱点一定是特征值

(3) 非零特征值的特征子空间一定是有限维的

(4) 不同特征值的特征向量线性无关

(5) 若 $\sigma(A)$ 中有极限点. 其极限点一定是0.

推论: $A \in \mathfrak{C}(X) \Rightarrow \sigma(A)$ 至多可数

推论: 设 $\dim X = \infty$, 则 $\sigma(A)$ 有如下3种情形:
① $\sigma(A) = \{0\}$
② $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$
③ $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots\}$ with $\lambda_k \to 0$ 其中 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \sigma_p(A)$

例: Volterra算子. $(Au)(t) = \int_0^t u(s)ds = \int_0^1 K(t, s)u(s)ds$ $K(t, s) = \begin{cases} 1 & t \geq s \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$A: L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$

特征值方程: $Au = \lambda u$ 即 $\int_0^t u(s)ds = \lambda u(t)$ → $\lambda u' = u$; $t = 0$ 时 $u(0) = 0$ → $u \equiv 0$ 即 $\sigma_p(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \phi$

由于 $\dim L^2[0, 1] = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(A) \Rightarrow \sigma(A) = \{0\}$

例: 给定 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 定义 $A_n: \ell^2 \to \ell^2$, $(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n, 0, \cdots)$. $\sigma(A)$?

$\left.\begin{array}{l} \|Ax\|_2 \leq (\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|) \cdot \|x\|_2 \\ \dim Ran(A) < \infty \end{array}\right\} A \in \mathcal{F}(\ell^2) \subset \mathfrak{C}(\ell^2)$. $\begin{cases} A_n e_k = \lambda_k e_k & k = 1, \cdots, n \\ A_n e_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \sigma_p(A)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ $(\lambda I - A_n)x = 0 \Leftrightarrow ((\lambda - \lambda_1)x_1, \cdots, (\lambda - \lambda_n)x_n, \lambda x_{n+1}, \cdots) = 0 \Rightarrow x = 0$. 于是 $\lambda I - A_n$ 单射

由F.A. $\Rightarrow \lambda I - A_n$ 为双射. 由逆算子定理知 $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

$\dim X=\infty$ $Y\neq\{0\}$. $\Rightarrow$ 一定存在 $X\to Y$ 的无界线性算子.

设 $\mathcal{B}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in Z}\overset{def}{=}X$ 的 Hamel 基 $\Rightarrow \#\mathcal{B}=\infty$

取 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$. 定义 $f_0:\mathcal{B}\to\mathbb{K}$ $f_0(x)=\begin{cases}k\|e_k\| & x=e_k\\ 0 & x\in\mathcal{B}\setminus\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\end{cases}$

有 $\forall x\in X$. $x=\sum_{\alpha\in Z}x_\alpha e_\alpha$ (有限 $x_\alpha\neq0$).

$f:X\to\mathbb{K}$

$x\mapsto\sum_{\alpha\in Z}x_\alpha f_0(e_\alpha)$ 有 $\frac{f(e_k)}{\|e_k\|}=k\to\infty$.

已知有限维空间上所有范数彼此等价, 证明若 X 上 $\forall$ 两范数等价, 一定有 $\dim X<\infty$.

证明: 若 $\dim X=\infty$. $\|\cdot\|$ 为 X 上范数, 则 $(X,\|\cdot\|)$ 存在无界线性泛函 f.

令 $\|x\|_\alpha=\|x\|+|f(x)|$, 则 $\|x\|_\alpha$ 为 X 上范数 但 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|$ 不等价. 否则 $\exists c>0$ s.t. $|f(x)|\leq\|x\|_\alpha\leq c\|x\|$, 矛盾!

若 $(X,\|\cdot\|)$ 的任一子空间都是闭子空间. 证明 $\dim X<\infty$

有结论: 若 $f\in X^*$. 则 $\ker f\xrightarrow{closed}X$ $\to$ $f\in X^*\Leftrightarrow\ker f$ 为 X 闭子空间]

若 $\dim X=\infty$. 存在 X 上无界线性泛函. $\Rightarrow\ker f$ 为 X 的不闭子空间. 矛盾!

若 $T:X\to Y$ 线性, $\ker(T)\xrightarrow{closed}X$. 是否能推出 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$?

不能. 令 $X=Y=C_{00}\overset{def}{=}\{$只有有限项非0的数列$\}$

$T:C_{00}\to C_{00}$

$(x_1,\cdots,)\mapsto(x_1,2x_2,3x_3,\cdots)$ $\Rightarrow T\notin\mathcal{L}(X,Y)$ 但 $\ker(T)=\{0\}$ 闭.

X 为 Banach 空间. $f_n\in X^*$. s.t. $f_n(x)\to f(x)$. $\forall x\in X$. 证明 $f\in X^*$

$f_n(x)\to f(x)$ $x\in X\Rightarrow\sup_n|f_n(x)|<\infty\overset{UBT}{\Longrightarrow}M=\sup_n\|f_n\|<\infty$ 则 $|f_n(x)|\leq M\|x\|\Rightarrow|f(x)|\leq M\|x\|$. 证毕

闭算子零空间一定闭 验证闭算子: 验证 $\mathrm{Dom}\,T\ni x_n\to x$, $Tx_n\to y$ $\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathrm{Dom}\,T\\ y=Tx\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}\ker(T)\ni x_n\to x_0\\ Tx_n=0\to y=0\end{array}\right\}\overset{闭算子}{\Longrightarrow}Tx_0=0\Rightarrow x_0\in\ker(T)$

$\dim X<\infty$. $T:X\to Y$ 线性. 证 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$

令 $\|x\|_G=\|x\|_X+\|Tx\|_Y$ 由 $\dim X<\infty\Rightarrow\exists c>0$. s.t. $\|Tx\|_Y\leq\|x\|_G\leq c\|x\|_X$. 则 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$

$T\in\mathcal{L}(X,Y)$. $x_n\xrightarrow{w}x$. 证明 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$

$\forall f\in Y^*$. $f(Tx_n)=(\overset{\in X^*}{T^*f})(x_n)\to(T^*f)(x)=f(Tx)$

2022期中

5. (15分) 设 H 是 Hilbert 空间, $A\in\mathcal{L}(H)$, 并且存在 $m>0$, 使得

$$|\langle Ax,x\rangle|\geq m\|x\|^2,\quad\forall x\in H.$$

证明: A^{-1} 存在且 $A^{-1}\in\mathcal{L}(H)$.

满射: 稠密 + 闭值域

由 IMT. 只需证 A 为双射. 单射: 若 $Ax=0$. $\|x\|^2\leq0\Rightarrow x=0$.

满射: 设 $x\in(\mathrm{Im}A)^{\perp}$. 则 $0=|\langle Ax,x\rangle|\geq m\|x\|^2\Rightarrow x=0$. 即 $\mathrm{Im}A\overset{dense}{=}H$

闭: 对 $\{Ax_n\}\to y$ 为 H 中 Cauchy 列. 有 x_n 为 H 中 Cauchy 列. $\to x$. 则 $Ax=y$. 闭. 证毕.

6. (15分) 设 $1<p=\dfrac{q}{q-1}<\infty$. 证明: 若对任意的 $f\in L^p(0,1)$ 都有 $fg\in L^1(0,1)$, 则 $g\in L^q(0,1)$.

$T:L^p(0,1)\to L^1(0,1)$ T 是闭算子 $\overset{CGT}{\Longrightarrow}T$ 有界 即 $\|fg\|_{L^1}\leq C\cdot\|f\|_{L^p}$

$f\mapsto fg$.

取 $f=g^{\frac{1}{p-1}}\Rightarrow\|f\|_{L^p}=(\int_0^1g^q dx)^{\frac{1}{p}}$ $\|fg\|_{L^1}=\int_0^1g^q dx$ 则 $(\int_0^1g^q dx)^{\frac{1}{q}}<C\Rightarrow g\in L^q(0,1)$

7. (10分) 证明: Banach 空间不可能有可数无穷的代数基.

若有可数无穷代数基. 设为 $\mathcal{B}=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 设 $X_n=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 则 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$. 则 X_{n_0} 有内点, $\exists n_0$.

但真子空间无内点 矛盾!