§3.1 分布列与独立性

二项分布: $X\sim B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $q=1-p$

几何分布: $P(X=k)=pq^{k-1}$ $k=1,2,\cdots$, $0<p<1$, $q=1-p$. $P(X>k)=q^k$. 背景: 抛硬币, X为首次出现H时抛的次数

无记忆性: $P(X=k)=P(X=m+k\mid X>m)$, 事实上, 对正整数随机变量X, $\forall m=0,1,2\cdots$ $P(X=m+1\mid X>m)$与m无关, 则X服从几何分布

泊松分布: $X\sim P(\lambda)$ $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$, $\lambda>0$. 称X服从参数为λ的泊松分布.

二项分布在n很大时逼近泊松分布

独立性: 称离散型X和Y独立, 若$\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\{X=x\},\{Y=y\}$独立.

引理: X与Y独立 $\Leftrightarrow \forall x,y\in\mathbb{R}$, $P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$

例: (泊松翻转) 抛硬币1次, $P(H)=p$. 记X,Y为H,T出现的次数, 则X,Y不独立, 因为$P(X=1,Y=1)=0$. $P(X=1)P(Y=1)=pq$

抛N次, $N\sim P(\lambda)$ 则X与Y独立. 因为 $P(X=x,Y=y)=P(X=x,Y=y,N=x+y)$

$=P(X=x,Y=y\mid N=x+y)\,P(N=x+y)$

$=C_{x+y}^x p^x q^y\frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!}e^{-\lambda}=\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda p}\frac{(\lambda q)^y}{y!}e^{-\lambda q}=P(X=x)P(Y=y)$

引理: X与Y独立, $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 则$g(X),h(Y)$也独立.

§3.2 数学期望

定义: 离散型X分布列$p_k=P(X=x_k)$ $k=1,2,\cdots$. 称[绝对收敛时]的$\sum_k p_k x_k$为X的数学期望, 记为$\mathbb{E}[X]$

引理: g为$\mathbb{R}$上函数, X有分布列$f(x)$, 则$\mathbb{E}[g(X)]=\sum_x g(x)f(x)$

定义: 离散型X的k阶矩为$m_k=\mathbb{E}[X^k]$, k阶中心矩为$\sigma_k=\mathbb{E}[(X-m_1)^k]$. 方差$\mathrm{Var}(X)$为二阶中心矩, m_1为均值

$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)$, 标准差为$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

例: Bernoulli分布 $P(X=0)=p$. $P(X=1)=1-p$. $\mathbb{E}(X)=p$. $\mathbb{E}(X^2)=p\Rightarrow \mathrm{Var}(X)=p(1-p)$

二项分布 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $\mathbb{E}(X)=np$. $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$

Poisson分布: $\mathbb{E}(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$ $\left(P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)$

二项分布: $\mathbb{E}(X)=np$ $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$

几何分布: $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}$ $\mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$ $\left(P(X=k)=(1-p)^{k-1}p\right)$

$\mathbb{E}[X]\Rightarrow$性质: (i) 非负性: 若$X\ge 0$, 则$\mathbb{E}[X]\ge 0$

(ii) 归一性: $\mathbb{E}[c]=c$ $c\in\mathbb{R}$

(iii) 线性性: $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}[X]+b\mathbb{E}[Y]$

定理: X,Y独立且期望均存在, 则$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$\mathrm{Var}(X)\Rightarrow$性质: (i) $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

(ii) 若X,Y独立: $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$

(iii) 若X,Y不相关$(\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y])$上式也成立.

例: **例 2.3.1** (随机置换). 将标号为 $1,2,\cdots,n$ 的信和信封随机配对, 记 N 为正确匹配成对数, 求 $\mathbb{P}(N=r)$, $\mathbb{E}[N]$, $\mathrm{Var}[N]$

解: 令$A_i=\{$第i个封于第i个信配对$\}$, 记$I_i=I_{A_i}$

令 $X=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_{r+1}<\cdots<i_n}} I_{i_1}I_{i_2}\cdots I_{i_r}(1-I_{i_{r+1}})\cdots(1-I_{i_n})=\begin{cases}1 & N=r\\ 0 & N\ne r\end{cases}$

取期望

则 $P(N=r)=\mathbb{E}[X]=C_n^r\,\mathbb{E}[I_{i_1}\cdots I_{i_r}(1-I_{i_{r+1}})\cdots(1-I_{i_n})]$

$=C_n^r\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s C_{n-r}^s\,\mathbb{E}[I_{i_1}\cdots I_{i_r}\cdots I_{i_{r+s}}]$

$=\frac{1}{r!}\sum_{s=0}^{n-r}\frac{(-1)^s}{s!}$

$\mathbb{E}$: $N=I_1+I_2+\cdots+I_n$, $\mathbb{E}[N]=n\mathbb{E}[I_1]=n\cdot\frac{(n-1)!}{n!}=1$

Var: $\mathbb{E}[N^2]=2\Rightarrow\mathrm{Var}(N)=1$

练习 1.5 独立重复伯努利试验中, p 为每次试验成功的概率, S_n 表示第 n 次试验成功时试验总次数. 求:

(1) 条件概率 $\mathbb{P}(S_{n+1}=k\mid S_n=j)$;

(2) 条件概率 $\mathbb{P}(S_n=k\mid S_{n+1}=j)$.

(1) $P(S_{n+1}=k\mid S_n=j)=(1-p)^{k-j-1}p$ $k>j$时

(2) $P(S_n=k\mid S_{n+1}=j)=\frac{(1-p)^{j-k-1}p\cdot C_{k-1}^{n-1}\cancel{p}\cancel{(1-p)^{k-n}}}{C_{j-1}^{n}\cancel{p}\cancel{(1-p)^{j-1}}}=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{j-1}^{n}}\cdot\frac{p}{1-p}$

练习 1.6 有足够多套同类型的卡片组, 每套卡片组共 n 张各不相同的卡片, 每花 1 张券就可以在完整的一套卡片组中随机抽取 1 张卡片. 某人想集齐一套完整的卡片组, 设他恰好集齐卡片组时花费的总券数为 X_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n\ln n}$.

若已经有了$k-1$张, 获得第k张新卡的概率为$\frac{n-k+1}{n}$, 则$\mathbb{E}[T_k]=\frac{n}{n-k+1}$ (T_k)

于是$\mathbb{E}[X_n]=n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n\ln n}=1$

有 $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\sum_{x,y}g(x,y)f(x,y)$

§3.3 协方差

定义: $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ 相关系数 $\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$ 这里 $\mathrm{Var}(X),\mathrm{Var}(Y)>0$.

注：协方差概念由 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

更一般地，对n维随机向量 $\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$，协方差矩阵为 $\Sigma=(\sigma_{ij})$，$\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)$

claim：Σ 非负定：$T^T\Sigma T=\sum_{i,j}t_it_j\sigma_{ij}=\sum_{i,j}t_it_jE[(X_i-E[X_i])(X_j-E[X_j])]=E[(\sum_i t_i(X_i-E[X_i]))^2]\geq 0$

引理：$\rho=\rho(X,Y)$ 相关系数，则有
(i) $-1\leq\rho\leq 1$
(ii) 当 X,Y 独立（$P(XY)=P(X)P(Y)$）或不相关（$E[XY]=E[X]E[Y]$）时，$\rho=0$
(iii) $|\rho|=1 \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R}$ s.t. $P(Y=aX+b)=1$

定理：（Cauchy-Schwarz不等式）$(E[XY])^2\leq E[X^2]E[Y^2]$ 等号成立 $\Leftrightarrow \exists a,b$ 不全为0，$P(aX=bY)=1$

证明：Case 1：$E[X^2]>0$　$E[(Y-tX)^2]=t^2E[X^2]-2tE[XY]+E[Y^2]\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 由判别式可知 $(E[XY])^2\leq E[X^2]E[Y^2]$

Case2：$E[X^2]=0$ 则 $P(X=0)=1$（$E[X^2]=\sum_x x^2f(x)=0$ 则 $x\neq 0$ 时 $f(x)=0$）于是 $E[XY]=\sum_{x,y}xyf(x,y)=\sum_{x\neq 0,y}xyf(x,y)+\sum_{x=0,y}xyf(x,y)=0$

定义：(X,Y) 为离散型，给定 $X=x$（假定 $P(X=x)>0$）情况下，

有Y的
(i) 条件分布列 $f_{Y|X}(y|x)=P(Y=y|X=x)$
(ii) 条件分布 $F_{Y|X}(y|x)=P(Y\leq y|X=x)$
(iii) 条件期望 $\psi(x)=E[Y|X=x]=\sum_y yf_{Y|X}(y|x)$

，并且称 $\psi(X)$ 为Y关于X的条件期望，记为 $E[Y|X]$（$E[Y|X]$ 是一个与X有关的随机变量）

注：$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$　$f_X(x)>0$，当 $f_X(x)=0$ 时必有 $f(x,y)=0$ 对 $\forall y\in\mathbb{R}$ 成立

定理：全期望公式，记 $\psi(x)=E[Y|X]$ 则 $E[\psi(X)]=E[Y]$　$E[Y]=E[E[Y|X]]=\sum_x E[Y|X=x]f_X(x)$

推广 $E[Y|X]$ 为 Y：记 $\psi(x)=E[Y|X]$

$E[\psi(X)g(X)]=E[Yg(X)]$

证明：$E(\psi(X))=\sum_x\psi(x)f_X(x)=\sum_x f_X(x)\sum_y yf_{Y|X}(y|x)=\sum_{x,y}yf_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\sum_{x,y}yf_Y(y)=E[Y]$

例：一只鸡下N枚蛋，$N\sim P(\lambda)$，每枚以独立的p概率变为小鸡，记k为小鸡数，求 $E[k|N]$，$E[k]$，$E[N|k]$

$f_N(n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$，$n=0,1,\cdots$　$f_{k|N}(k|n)=C_n^kp^kq^{n-k}$　$k=0,1,\cdots,n$

因此 $\psi(n)=E[k|N=n]=np$　于是 $E[k|N]=Np$

进而 $E[k]=E[E[k|N]]=E[pN]=p\lambda$　（Poisson分布的E为λ）

对于 $E[N|k]$，先算条件分布列 $f_{N|k}(n|k)=P(N=n|k=k)=\frac{P(N=n,k=k)}{P(k=k)}=\frac{P(N=n)P(k=k|N=n)}{\sum_m P(N=m)P(k=k|N=m)}\overset{n\geq k}{=}\frac{\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^kp^kq^{n-k}}{\sum_{m\geq k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}C_m^kp^kq^{m-k}}=\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda q}$

于是 $E[N|k=k]=\sum_{n\geq k}n\cdot\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda q}=k+\lambda q$，则 $E[N|k]=k+\lambda q$

§3.4 随机游走

直线上的随机游走是最简单的随机过程：$t=0$ 时粒子 $S_0=a\in\mathbb{Z}$，$t=n$ 时处于x轴上，$S_n=S_{n-1}+X_n=S_0+\sum_{i=1}^n X_i$ 这里 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，则 X_i 取 ±1

等概率，即 $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$ 称之为对称的。

例（自由随机游走）：$S_0=a$，$P(右)=p$，求 $P(S_n=b)$？

令 r 为向右移动次数，l 为向左移动次数，则 $r+l=n$ 且 $r-l=b-a$ 即 $r=\frac{1}{2}(n+b-a)$ 于是 $P(S_n=b)=C_n^{\frac{1}{2}(n+b-a)}p^{\frac{1}{2}(n+b-a)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-b+a)}$

例（带两个吸收壁）：$t=0$ 时 $x=k$，在 $x=0,N$ 处各有一个吸收壁（移动到0或N处则停止）求粒子在 $x=0,N$ 处吸收概率。

记 P_k 为初始处于 $x=k$ 且最后在 $x=0$ 处的吸收概率。P_k^* … N …

第1步之后：$P_k=p\cdot P_{k+1}+q\cdot P_{k-1}$　$0<k<N$，边界条件：$P_0=1$，$P_N=0$。记 $r=\frac{q}{p}$，则 $P_{k+1}-P_k=r(P_k-P_{k-1})$ 于是有 $P_k=\begin{cases}\frac{r^k-r^N}{1-r^N} & r\neq 1\\ 1-\frac{k}{N} & r=1\end{cases}$

同理有 $P_k^*=\begin{cases}\frac{1-r^k}{1-r^N} & r\neq 1\\ \frac{k}{N} & r=1\end{cases}$

例：$d=2$ 平面上，$P(\vec{S}_{2n}=0)=P(\bigcup_{i+j=n}\{e_1方向i次,e_2方向j次\})$

$\frac{C_{2n}^kC_{2n-k}^{2n-2k}C_{2n-2k}^{n-k}C_{n-k}^{n-k}}{4^{2n}}$

$=\sum_{i+j=n}\frac{(2n)!}{(i!)^2(j!)^2}(\frac{1}{4})^{2n}$

$=\sum_{i=0}^n(C_n^i)^2(\frac{1}{4})^{2n}C_{2n}^n$

$=(C_{2n}^n)^2\cdot(\frac{1}{4})^{2n}$

性质：
(i) 空间齐性 $P(S_n=j|S_0=a)=P(S_n=j+b|S_0=a+b)$
(ii) 时间齐性 $P(S_n=j|S_0=a)=P(S_{n+m}=j|S_m=a)$
(iii) Markov性 $P(S_{m+n}=j|S_0=j_0,\cdots,S_m=j_m)=P(S_{m+n}=j|S_m=j_m)$

(i) $RHS=\frac{P(S_n=j+b,S_0=a+b)}{P(S_0=a+b)}=\frac{P(\sum_{i=1}^n X_i=j-a,S_0=a+b)}{P(S_0=a+b)}=P(\sum_{i=1}^n X_i=j-a)=LHS$

(ii) $RHS=\frac{P(S_{n+m}-S_m=j-a,S_m=a)}{P(S_m=a)}=P(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a)$　$LHS=P(\sum_{i=1}^n X_i=j-a)$　于是有 $RHS=LHS$

(iii) 同理

轨道计数：平面表示 $\{(n,S_n)|n\in\mathbb{N}\}$　记 $N_n(a,b)=\#\{(0,a)到(n,b)的轨道\}$

$S_0=a$，$S_n=b$.　$N_n^0(a,b)=\#\{(0,a)到(n,b)且访问x轴至少一次的轨道\}$

定理（反射原理）若 $a,b>0$，则 $N_n^0(a,b)=N_n(-a,b)$　（$N_n(a,b)=C_n^{\frac{1}{2}(n+b-a)}$）

定理（投票定理）若 $b>0$，则 $\#\{从(0,0)到(n,b)且不再过x轴的轨道\}=\frac{b}{n}N_n(0,b)$

第一步一定到(1,1)，所求为从(0,1)到(n-1,b)且不过x轴的轨道个数，为 $N_{n-1}(1,b)-N_{n-1}^0(1,b)=N_{n-1}(1,b)-N_{n-1}(-1,b)=\frac{b}{n}C_n^{\frac{1}{2}(n+b)}=\frac{b}{n}N_n(0,b)$

例：选举中A得a票，B得b票，$a>b$，求投票过程中A票数始终领先B的概率

问题转化为从(0,0)点到(a+b,a-b)点不过x轴轨道数与总轨道数之比，为 $\frac{a-b}{a+b}$

定理（不回出发点）$S_0=0$　$n\geq 1$　则 $P(S_1S_2\cdots S_n\neq 0,S_n=b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$，$P(S_1S_2\cdots S_n\neq 0)=\frac{1}{n}E[|S_n|]$

定理（最后一次访问原点）$p=\frac{1}{2}$，$S_0=0$，记 $A_{2n,2k}=\{\max\{0\leq i\leq 2n|S_i=0\}=2k\}$，则 $P(A_{2n,2k})=P(S_{2k}=0)P(S_{2n-2k}=0)$

证明：$P(A_{2n,2k})=P(S_{2k}=0,S_{2k+1},\cdots,S_{2n}\neq 0)=P(S_{2k+1}\cdots S_{2n}\neq 0|S_{2k}=0)P(S_{2k}=0)$

$=P(S_1\cdots S_{2n-2k}\neq 0|S_0=0)P(S_{2k}=0)$

由上述定理，$P(S_1\cdots S_{2n-2k}\neq 0|S_0=0)=\frac{1}{2n-2k}E[|S_{2n-2k}|]\overset{m=n-k}{=\!=}\frac{2}{2m}\sum_{i=1}^m 2iP(2m=2i)=2\sum_{i=1}^m\frac{2i}{2m}\cdot C_{2m}^{m+i}\cdot(\frac{1}{2})^{2m}=(\frac{1}{2})^{2m}\cdot C_{2m}^m=P(S_{2m}=0)$

定理(游走最远距离) 令 $M_n=\max\{S_i:0\le i\le n\}$ 当 $S_0=0,\ r\ge 1$ 则有 $P(M_n\ge r, S_n=b)=\begin{cases}P(S_n=b) & b\ge r\\ (\frac{q}{p})^{r-b}P(S_n=2r-b) & b<r\end{cases}$

特别地,有 $p=q$ 时,$P(M_n\ge r)=P(S_n=r)+2P(S_n\ge r+1)$

定理(首次击中) $S_0=0$,在时刻 n 首次击中点 b 的概率为 $f_b(n)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$

§3.5 母函数

数列的母函数:$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的母函数为 $G_a(s)=\sum_{i=0}^{\infty}a_is^i$. 如:$C_n^0,\cdots,C_n^n$ $G(s)=\sum_{k=0}^{n}C_n^ks^k=(1+s)^n$

卷积:$\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 的卷积 $\{c_i\}$ 为 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 记为 $c=a*b$. 则 $G_c(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=G_a(s)G_b(s)$

例:对称随机游走 S_n. $S_0=0$. 求 $P(S_1\ge 0,\cdots,S_{2n}\ge 0,S_{2n}=0)$.

记 $C_n=\#\{(S_1,S_2,\cdots,S_{2n}):S_i\ge 0,\forall i. S_{2n}=0\}$

若取"+",在 $S=0$ 时不成立.

设在 $t=2k$ 时刻首次返回原点,则从 $t=0$ 到 $t=2k$ 轨迹个数为 C_{k-1},则有 $C_n=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}C_{n-k}$. $C_0=1$

Catalan数

令 $G(s)=\sum_{i=0}^{\infty}C_is^i$. 则由 $C_n=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}}_{\text{前项与后项的卷积}}$ 可知 $\frac{G(s)-1}{s}=G^2(s)\implies G(s)=\frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}s^n$ 于是 $C_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$. 则 $P=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n\cdot 2^{-2n}$

$=-\frac{1}{2s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac12(\frac12-1)\cdots(\frac12-k+1)}{k!}(-4s)^k$

$(1+x)^\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

定义: X 取非负整数. $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]$ 为 X 的(概率)母函数.

注意 $G_X(s)=\sum_kP(X=k)\cdot s^k$. 其收敛半径为 $R\ge 1$. 在 $(-R,R)$ 上可微.

因此 $P(X=k)=\frac{G^{(k)}(0)}{k!}$ 且 $P(X=0)=G(0)$. $\lim_{s\to 1^-}G(s)=1$

例:二项分布 $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$. $G(s)=\sum_ks^kC_n^kp^kq^{n-k}=(ps+q)^n$

几何分布 $P(X=k)=q^{k-1}p$. $G(s)=\sum_ks^kq^{k-1}p=\frac{ps}{1-qs}$

泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. $G(s)=\sum_ks^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(s-1)}$

定理: X 的母函数为 $G_X(s)$. 则:
① $\mathbb{E}[X]=G'(1)$
② $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k)]=G^{(k)}(1)$
③ $\mathrm{Var}(X)=G''(1)+G'(1)(1-G'(1))$

定理: 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立. 则 $G_{\sum_{i=1}^nX_i}(s)=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(s)$

$\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^nX_i}]=\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n}s^{X_i}]=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[s^{X_i}]$

任意有限个相互独立

定理: 设 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立同分布,其共同的母函数记为 $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]$,又设 N 与 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立. 则 $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 的母函数为 $G_N(G_X(s))$

因为同分布

$G_S(s)=\mathbb{E}[s^S]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[s^S|N=n]P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[s^{X_1+\cdots+X_n}|N=n]P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[s^{X_1+\cdots+X_n}]P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}G_X^n(s)P(N=n)=G_N(G_X(s))$

类似 $\sum_{n=0}^{\infty}s^nP(N=n)=G_N(s)$

定义: X,Y 的联合母函数 $G(s,t)=\mathbb{E}[s^Xt^Y]=\sum_{i,j=0}^{\infty}s^it^jP(X=i,Y=j)$

定理: 若 X,Y 独立. 则 $G(s,t)=G_X(s)G_Y(t)$

例:掷均匀骰子3次. 点数和为9的概率?

令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 有 $G_{S_n}(s)=(G_{X_1}(s))^n$ $n=3$. $G_{X_1}(s)=\frac16(s+\cdots+s^6)=\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}$ 则 $G_{S_3}(s)=\frac{s^3(1-s^6)^3}{216(1-s)^3}=(\frac{s}{6})^3(1-3s^6+3s^{12}-s^{18})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-k+1)}{k!}(-s)^k$

s^9 的系数为 $\frac{1}{6^3}(C_8^6-3)=\frac{25}{216}$

定义: 矩母函数为 $M_X(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]$ (若在 $(-R,R)$ 内存在,其与母函数有类似性质)

第三章 连续型随机变量.(接简明概率论分章)

§3.1 典型密度

有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ $\int_{\mathbb{R}}f(t)dt=1$. $P(X\in[a,b])=\int_a^bf(t)dt$.

(1) 均匀分布 $U[a,b]$: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

(2) 指数分布. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ $\lambda>0$: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$ $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $x\ge 0$ 有 $P(X>t+s|X>t)=\frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}=e^{-s}=P(X>s)$

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x\in\mathbb{R}$. $\begin{cases}\text{(i) } x=\mu \text{ 时最大, 为对称轴}\\ \text{(ii) } x=\mu\pm\sigma \text{ 为拐点}\end{cases}$

(4) Winger半圆律: $f(x)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2-x^2}$ $x\in[-2\sigma,2\sigma]$.

验证半圆律并计算 $P(x\in[0,\sigma])$: $\int_{-2\sigma}^{2\sigma}\sqrt{4\sigma^2-x^2}dx\xlongequal{x=2\sigma\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sigma)^2\cos^2\theta d\theta=2\sigma^2\pi$ 于是积分 $\int_{-2\sigma}^{2\sigma}f(x)dx=1$.

$P(x\in[0,\sigma])=\int_0^{\sigma}f(x)dx=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sigma^2\cos^2\theta d\theta=\frac16+\frac{\sqrt3}{4\pi}$

例:若 X 与 Y 独立. 则 $f_{X+Y}(z)=?$

$P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}f(x,y-x)dy=\int_{-\infty}^{z}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y-x)dx=F_{X+Y}(z)\Rightarrow f_{X+Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y-x)dx$

于是 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)f_X(z-y)dy$ 称其为 X 与 Y 的卷积,记 $f_{X+Y}=f_X*f_Y$

例: $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$, $X+Y$ 分布?

$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac12z)^2-\frac{z^2}{4}}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\sim N(0,2)$

§3.2 期望与条件期望

定义: X 密度为 f. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<+\infty$. 则称 $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为其期望, 期望的线性性成立

引理: X 密度为 f, 分布函数为 F. 则 $\mathbb{E}[X]=\int_0^{\infty}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx$

定理: 设 X 与 $g(X)$ 均为连续型, 且 $g(X)$ 期望存在. 则 $\mathbb{E}[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx$.

定理: 设 (X,Y) 密度为 $f(x,y)$. $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是 Borel 可测的, $g(X,Y)$ 期望存在. 则 $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\,dxdy$.

相关概念也是一样的: ① 矩 $m_k=\mathbb{E}[X^k]$, 中心矩 $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$

② 方差 $Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2$. 标准差 $\sqrt{Var(X)}$

③ 协方差 $Cov(X,Y)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

④ 相关系数 $\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

⑤ Cauchy-Schwarz 不等式: $(\mathbb{E}[XY])^2\le\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$

对正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu+\mu)\cdots dx=\mu$

$Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx=\sigma^2$

$\mu=0$. $\sigma^2=1$ 时为标准正态分布. $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(u)du$

对 $X,Y\sim N(0,1)$. $Cov(X,Y)=\rho$, 为相关系数. $\rho=0\Leftrightarrow X,Y$ 独立.

定义: 连续型 (X,Y) 密度为 $f(x,y)$. 给定 $X=x$ 下 Y 的条件分布 $F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$ $(f_X(x)\ne0)$

条件密度 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

条件期望 $\mathbb{E}[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{Y|X}(y|x)dy$. 称 Y 关于 X 的条件期望 $\mathbb{E}[Y|X]$

定理: 与离散型类似. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]=\mathbb{E}[Y]$. 则 $\mathbb{E}[Y]=\int f_X(x)\cdot\mathbb{E}[Y|X]dx$

§3.3 多元正态分布

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

定义: 若 $\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度为 $f(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\}$ 其中 Σ 为正定矩阵, 称 X 服从 n 维正态分布, 记作 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$.

若 $\Sigma=\begin{pmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{pmatrix}$, 为二元标准正态分布.

定理: 设 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$, 则有 ① $\vec{\mu}=\mathbb{E}[\vec{X}]$ 即 $\mu_i=\mathbb{E}[X_i]$. ② Σ 为协方差阵, 即 $\Sigma=(\sigma_{ij})$ $\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)$

定理: A 为 $n\times m$ 矩阵, 秩为 m $(m<n)$. $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$. 则 $\vec{Y}=\vec{X}A\sim N(\vec{\mu}A,A^T\Sigma A)$

引理: $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$. 若 $\Sigma=\begin{pmatrix}\overbrace{\Sigma_{11}}^{m\times m}&\\&\underbrace{\Sigma_{22}}_{(n-m)\times(n-m)}\end{pmatrix}$. 则 $\vec{X_i}\sim N(\vec{\mu_i},\Sigma_{ii})$, $i=1,2$.

引理: 设 A 为 n 阶方阵, $\det(A)\ne0$. 当 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$ 时, $\vec{X}A\sim N(\vec{\mu}A,A^T\Sigma A)$

定理: $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$, $\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ Σ 为对角阵

例: $X,Y\sim N(0,1)$, 令 $\begin{cases}X=R\cos\theta\\Y=R\sin\theta\end{cases}$ 求 (R,θ) 的密度

$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$. $f_{R,\theta}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}\cdot|J|=\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$

Vice production: U_1,U_2 为独立 $[0,1]$ 均匀分布, 令 $X=\sqrt{-2\log U_1}\cdot\cos2\pi U_2$ 则 X,Y 独立 $\sim N(0,1)$

$Y=\sqrt{-2\log U_1}\cdot\sin2\pi U_2$

§3.4 Wick 公式与 GOE 模型

$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $X\sim N(0,1)$ 有 $\mathbb{E}[X^{2n}]=(2n-1)!!$

若 n 奇数 $\mathbb{E}[X_1\cdots X_n]=0$. (对称性)

定理: 设 $(X_1,\cdots,X_n)\sim N(0,\Sigma)$, 则 $\mathbb{E}[X_1X_2\cdots X_n]=\sum_{\pi\in P_2(n)}\prod_{(i,j)\in\pi}\mathbb{E}[X_iX_j]$ $P_2(n)$ 为 $\{1,\cdots,n\}$ 的配对全体

条件!

补充: 复随机变量

(i) $Z=X+iY$. $\mathbb{E}[Z]:=\mathbb{E}[X]+i\mathbb{E}[Y]$, 可证 Z_1 与 Z_2 独立时 $\mathbb{E}[Z_1Z_2]=\mathbb{E}[Z_1]\mathbb{E}[Z_2]$

(ii) 复正态: $N_{\mathbb{C}}(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{C}$, $\sigma>0$. 有密度: $f(z)=\frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{\sigma^2}|z-\mu|^2}$ $z\in\mathbb{C}$

(iii) 若 $Z\sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$, 则 $\mathbb{E}[Z^k\bar{Z}^l]=\begin{cases}k! & k=l\\0 & k\ne l\end{cases}$

(iv) $X_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Z_j$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$ $Z_i\sim N(0,1)$ 则 $\mathbb{E}[X_1\cdots X_n]=\sum_{\pi\in P_2(n)}\prod_{(i,j)\in\pi}\mathbb{E}[X_iX_j]$

定义: 若 n 阶实对称方阵 H 的矩阵元联合密度为 $f(H)=\frac{e^{-\frac{1}{4}tr(H^2)}}{2^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{4}n(n+1)}}$, 则称 H 服从 GOE 分布 (高斯正交系综)

对 H 服从 GOE 分布, 有 ① 对角元 $\sim N(0,1)$. ② 非对角元 $\sim N(0,\frac{1}{2})$ ③ 所有元素相互独立

第四章 大数定律.

§4.1 积分与期望

分布函数 F. 随机变量 x. 密度 f.

$\mathbb{E}[X]=\begin{cases}\sum x f(x) & 离散\\ \int x f\,dx & 连续\end{cases}$ 引入 $dF=\begin{cases}f(x) & 离散\\ f(x)dx & 连续\end{cases}$ 统一记为 $\mathbb{E}[X]=\int x\,dF$. 对 Borel 可测函数 g. 有 $\mathbb{E}[g(x)]=\int g(x)\,dF$

在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中. 定义积分: 采用 Lebesgue 积分的"三步走".

Step 1. 非负简单随机变量.

$X=\sum_{i=1}^{n}x_i I_{A_i}$. 其中 $A_1,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分. $\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^{n}x_iP(A_i)$

Step 2. …

若 $\mathbb{E}[|X|]<+\infty$. 称 X 的数学期望存在. 统一记为 $\mathbb{E}[X]=\int_\Omega x\,dP$ 或 $\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$

定理(收敛): 设 $X_n(\omega)\longrightarrow X(\omega)$ $\forall\omega\in\Omega$ 或 $\forall\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$. $P(\Omega_0)=0$.

(i) Levi 单调收敛定理 若 $X_{n+1}(\omega)\geq X_n(\omega)\geq 0$. $\forall n.\omega$. 则 $\mathbb{E}[X_n]\to\mathbb{E}[X]$

(ii) DCT $|X_n|\leq Y$. $\forall n.\omega$. $\mathbb{E}[Y]<+\infty$. 则 $\mathbb{E}[X_n]\to\mathbb{E}[X]$

(iii) 有界收敛 $|X_n(\omega)|\leq C$. $\forall n.\omega$. 则 $\mathbb{E}[X_n]\to\mathbb{E}[X]$

定理(Fatou 引理): $X_n\geq 0$ a.e. 则 $\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty}X_n]\leq\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]$

§4.2 四种收敛

例: $X_n=\frac{1}{n}$. $X=0$. 显然有 $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$ $\forall\omega\in\Omega$. 而 $F_n(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{n}\\ 1 & x\geq\frac{1}{n}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0.\end{cases}$ $F_n(0)=0$. 而 $F(0)=1$.

定义: X. $\{X_n\}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量.

(i) 依分布收敛. $X_n\xrightarrow{D}X$: 对 $F(x)=P(X\leq x)$ 的所有连续点有 $F_{X_n}(x)\to F(x)$

(ii) L^p 收敛 (P 阶矩收敛. $p>0$) $X_n\xrightarrow{L^p}X$: $\mathbb{E}[|X|^p]$. $\mathbb{E}[|X_n|^p]<+\infty$. 则 $\mathbb{E}[|X-X_n|^p]=0$.

(iii) 依概率收敛. $X_n\xrightarrow{P}X$: $\forall\varepsilon>0$. $P(|X_n-X|>\varepsilon)=0$.

(iv) 几乎处处收敛. $X_n\xrightarrow{a.s.}X$: $P(\{\omega\in\Omega\mid\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\})=1$

例: $P(X=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}$. 令 $X_n=X$. $Y=1-X$. 则 Y 与 X 同分布. 且 $X_n\xrightarrow{D}Y$ 但因 $|X_n-Y|=|2X-1|=1$ 表明其他三种收敛不成立

定理: (i) $\begin{matrix}X_n\xrightarrow{a.s.}X & \Rightarrow\\ X_n\xrightarrow{L^p}X & \Rightarrow\end{matrix}\ X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{D}X$

(ii) 当 $r>s\geq 1$ 时 $X_n\xrightarrow{L^r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{L^s}X$

引理: $X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{D}X$

证明: 令 $F_n=P(X_n\leq x)$. $F(x)=P(X\leq x)$

则 $F_n(x)=P(X_n\leq x,X\leq x+\varepsilon)+P(X_n\leq x,X>x+\varepsilon)$

$\leq F(x+\varepsilon)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$ —①

换 X 与 X_n. 令 $x\to x-\varepsilon$. 得到 $F(x-\varepsilon)\leq F_n(x)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$ —②

于是由①.②知 $F(x-\varepsilon)-P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq F_n(x)\leq F(x+\varepsilon)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$

令 $n\to\infty$. 由 $X_n\xrightarrow{P}X$ 知 $F(x-\varepsilon)\leq F_n(x)\leq F(x+\varepsilon)$. 在 $F(x)$ 连续点处. 有 $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$

引理: Markov 不等式: $\forall p>0$. $\forall a>0$. $P(|X|\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{a^p}$ → $X_n\xrightarrow{L^p}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$

$P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{E}[|X_n-X|^p]}{\varepsilon^p}\to 0.$

证明: 不妨设 $p=1$. $|X|=|X|I_{\{|X|>a\}}+|X|I_{\{|X|\leq a\}}$

取期望: $\mathbb{E}[|X|]\geq\mathbb{E}[|X|I_{\{|X|>a\}}]>a\mathbb{E}[I_{\{|X|>a\}}]=aP(|X|>a)$

Chebyshev 不等式: $P(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)\leq\frac{Var(X)}{a^2}$

Hölder 不等式: $p.q>1$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $\mathbb{E}[|XY|]\leq(\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$

Minkovski 不等式: $p\geq 1$. $\|X+Y\|_p\leq\|X\|_p+\|Y\|_p$

Lyapunov 不等式: $p>q\geq 1$. $\|X\|_p\geq\|X\|_q$

定理: (i) 若 $X_n\xrightarrow{D}c$. 则 $X_n\xrightarrow{P}c$ c 为常数

(ii) 若 $\exists k>0$. $P(|X_n|\leq k)=1$ $\forall n$. 且 $X_n\xrightarrow{P}X$. 则 $X_n\xrightarrow{L^p}X$

例: 若 $\exists r>0$. $\mathbb{E}[|X|^r]=0$. 则 $P(X=0)=1$

$P(|X|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\varepsilon^r}=0$ $\varepsilon>0$. $P(|X|\leq\varepsilon)=1$ 令 $\varepsilon\to 0$. 由右连续性 $P(X=0)=1$

定理: Δ 指 a.s.; P 与 L^p 若 $X_n\xrightarrow{\Delta}X$, $Y_n\xrightarrow{\Delta}Y$.

则 (i) $P(X=Y)=1$ (ii) $X_n+Y_n\xrightarrow{\Delta}X+Y$ (iii) 对依分布收敛. 上述一般不对.

§4.3 Lemma of Borel-Cantelli

$\{\omega\in\Omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\omega \mid |X_n(\omega)-X(\omega)|\le \frac{1}{k}\}$

于是有 a.s 收敛等价于 $P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{|X_n-X|\le\frac{1}{k}\})=1$ 或 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|X_n-X|>\frac{1}{k}\})=0$

那么，我们可以由上面定义推得到以下引理:

引理: $X_n\xrightarrow{a.s.}X \iff \forall\varepsilon>0,\ P(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|X_n-X|>\varepsilon\})=0$

$\iff \forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{m\to\infty}P(\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|X_n-X|>\varepsilon\})=0$ （类似实分析中的 a.un 收敛）

$X_n\xrightarrow{a.s.}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$

证明第二个: $\{|X_n-X|>\varepsilon\}\subseteq\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|X_i-X|>\varepsilon\}$

定理:(Borel-Cantelli)

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$, 则 $P(A_n\ i.o.)=0$ 发生无穷多次的概率为0.

(ii) $\{A_n\}$ 相互独立时, $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty \iff P(A_n\ i.o.)=1$

证明: (i) 令 $A=\bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$. $P(A)\le P(\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n)\xrightarrow{m\to\infty}0$

(ii) $\Leftarrow$) 反证 + (i)

$\Rightarrow$) $A^c=\bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}A_n^c$ 有: $P(\bigcap_{n=m}^{\infty}A_n^c)=\lim\limits_{r\to\infty}P(\bigcap_{n=m}^{r}A_n^c)=\lim\limits_{r\to\infty}\prod_{n=m}^{r}(1-P(A_n^c))\le e^{-\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n)}\to 0$ 于是 $P(A^c)=0$, 即 $P(A)=1$

例: $\{X_n\}$ 相互独立, 服从参数为1的指数分布 证明 $P(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}=1)=1$

有 $P(X_n\ge x)=e^{-x}$, $x\ge0$. 易知 $P(A_n)=n^{-(1+a)}$, $A_n=\{\frac{X_n}{\ln n}\ge 1+a\}$, $|a|<1$ 且 A_n 相互独立

(1) $-1<a\le0$ 时, 有 $\sum_n P(A_n)=\infty \xRightarrow{B.C.} P(A_n\ i.o.)=1$, 即 $P(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\ge1)=1$

(2) $0<a<1$ 时 有 $\sum_n P(A_n)=\infty \xRightarrow{B.C.} P(A_n\ i.o.)=0$, 即 $P(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\le1)=1$

于是有 $P(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}=1)=1$. 证毕.

表示定理

定理:(Skorokhod 定理) 设 $X_n\xrightarrow{D}X$, 则存在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上 Y_n, Y 满足 (i) Y_n 与 X_n, Y 与 X 同分布 (ii) $Y_n\xrightarrow{a.s.}Y$

（$\mathbb{R}$上有界连续函数）

定理: $X_n\xrightarrow{D}X \iff \forall g\in C_b(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[g(X_n)]\to\mathbb{E}[g(X)]$

证明: $\Rightarrow$) 由表示定理, $Y_n\xrightarrow{a.s.}Y$. $Y_n\xrightarrow{D}X_n$, $Y\to X$ 于是 $g(Y_n)\xrightarrow{a.s.}g(Y)$. 由有界收敛定理. $\overset{\mathbb{E}[g(X_n)]}{\overset{\|}{\mathbb{E}[g(Y_n)]}}\to\overset{\mathbb{E}[g(X)]}{\overset{\|}{\mathbb{E}[g(Y)]}}$

$\Leftarrow$) ...

§4.4 弱与强大数律.

定理(辛钦弱大数定律): 设 $\{X_i\}$ 独立同分布, $\mathbb{E}[|X_i|]<+\infty$, $\mu=\mathbb{E}[X_i]$, 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$

截断

证明: 取 $a_i=i^{\delta}$, $\delta>0$. $X_i=X_i^{(1)}+X_i^{(2)}$, $X_i^{(1)}=X_i I\{|X_i|<a_i\}+X_i I\{|X_i|\ge a_i\}$ $S_n^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{(1)}$ $S_n^{(2)}$ 同理定义

$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|>\varepsilon)=P(\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}((X_i^{(1)}-\mathbb{E}[X_i^{(1)}])+(X_i^{(2)}-\mathbb{E}[X_i^{(2)}]))|>\varepsilon)$

$\le P(|S_n^{(1)}-\mathbb{E}[S_n^{(1)}]|>\frac{1}{2}n\varepsilon)+P(|S_n^{(2)}-\mathbb{E}[S_n^{(2)}]|>\frac{1}{2}n\varepsilon):=\mathrm{I}+\mathrm{II}$

对I: 由Chebyshev不等式: $\mathrm{I}\le\frac{4}{\varepsilon^2n^2}Var(S_n^{(1)})\overset{独立}{=}\frac{4}{\varepsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i^{(1)})\overset{放}{\le}\frac{4}{\varepsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^{(1)2}]\overset{放(|X_i^{(1)}|<a_i)}{<}\frac{4}{\varepsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[a_i|X_i^{(1)}|]=\frac{4}{\varepsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{E}[|X_i^{(1)}|]\le\frac{4\mathbb{E}[|X_1^{(1)}|]}{\varepsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}a_i$

令 $0<\delta<1$, 则转化为积分 $\le\frac{4(1+n)^{1+\delta}}{\varepsilon^2n^2(1+\delta)}\mathbb{E}[|X_1|]\to0$.

对II: 由Markov不等式: $\mathrm{II}\le\frac{2}{n\varepsilon}\mathbb{E}[|S_n^{(2)}-\mathbb{E}[S_n^{(2)}]|]\le\frac{4}{n\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_i^{(2)}|]\le\frac{4}{\varepsilon n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_1|I\{|X_1|\ge a_i\}]$ 控制函数为 $|X_1|$, DCT, Stolz定理 $\to0$, $n\to\infty$

于是依概率收敛. 不能用 Chebyshev Ineq, 因为不知Var是否存在.

在矩收敛与a.s.收敛意义下:

定理: $\{X_i\}$ 独立同分布, $Var(X_i)<+\infty$, $\mathbb{E}[X_i]=\mu$. 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{L^2}\mu$ 且 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{a.s.}\mu$.

证明: (i). $\mathbb{E}[(\frac{1}{n}S_n-\mu)^2]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{1}{n}Var(X_1)\to0$.

(ii). 先证 $\{X_i\}$ 非负独立同. 若wolc. $\{X_i^+\}$ 与 $\{X_i^-\}$ 独立同. $\frac{1}{n}S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^+-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^-\to\mathbb{E}[X_i^+]-\mathbb{E}[X_i^-]=\mu$

采取子序列方法

取 $n_i=i^2$, $\sum_i P(|\frac{S_{n_i}}{n_i}-\mu|>\varepsilon)\le\sum_i\frac{1}{n_i^2\varepsilon^2}Var(S_{n_i})=\sum_i\frac{Var(X_1)}{n_i\varepsilon^2}<+\infty$ 由Borel-Cantelli引理: $\frac{S_{n_i}}{n_i}\xrightarrow{a.s.}\mu$

对一般的n, 存在 $i^2<n<(i+1)^2$ 易知 $\frac{S_{n_i}}{(i+1)^2}<\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n_{i+1}}}{i^2}$ 即 $\frac{n_i}{n}\cdot\frac{S_{n_i}}{n_i}<\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n_{i+1}}}{n_{i+1}}\cdot\frac{n_{i+1}}{n}$ 令 $i\to+\infty$ 则有 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mu$

定理(Kolmogorov强大数律): $\{X_n\}$ 独立同, 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{a.s.}\mu\in\mathbb{R}\iff\mathbb{E}[|X_1|]<+\infty$, $\mu=\mathbb{E}[X_1]$

证明: $\Leftarrow$) 设 X_i 非负. 三步走

Step 1. 截尾术

令 $Y_n=X_nI\{X_n<n\}$. 由Fact: $\sum_{n=1}^{\infty}P(X\ge n)\le\mathbb{E}[X]\le\sum_{n=0}^{\infty}P(X\ge n)$ 知 $\sum_n P(X_n\ne Y_n)=\sum_n P(X_n\ge n)=\sum_n P(X_1\ge n)<\infty$

用Borel-Cantelli引理知 $P(X_n\ne Y_n\ i.o.)=0$. 即n足够大时, $\{X_n\ne Y_n\}$ 只发生有限次. 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\xrightarrow{a.s.}0$

于是只需证 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{a.s.} \mu$

Step 2. 收敛子列

对 $\alpha>1$，取 $\beta_k=[\alpha^k]$，则 $\alpha^k \le \beta_k < \alpha^k+1$. $\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}\to\alpha \quad k\to\infty$ 则 $\exists A=A(\alpha)$ s.t. $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^2}<\frac{A}{\beta_m^2} \quad \forall m\ge 1$

记 $T_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$，$\forall \varepsilon>0$. $\sum_n P\left(\left|\frac{T_{\beta_n}-\mathbb{E}[T_{\beta_n}]}{\beta_n}\right|>\varepsilon\right) \overset{\text{Chebyshev}}{\le} \sum_n \frac{1}{\varepsilon^2\beta_n^2}Var(T_{\beta_n}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^2}\sum_{j=1}^{\beta_n}Var(Y_i) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n:\beta_n\ge i}\frac{1}{\beta_n^2}\right)Var(Y_i) \le \frac{A}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}Var(Y_i)$

$\le \frac{A}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\mathbb{E}[Y_i^2] \overset{①}{<} +\infty$

由 Borel-Cantelli 引理知 $\frac{T_{\beta_n}-\mathbb{E}[T_{\beta_n}]}{\beta_n} \xrightarrow{a.s.} 0$

又 $\frac{\mathbb{E}[T_n]}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i I\{X_i<i\}] \overset{\text{同分布}}{=\!=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_1 I\{X_1<i\}]\to\mu$ 进而 $\frac{1}{\beta_n}T_{\beta_n}\xrightarrow{a.s.}\mu$

Step 3. 几乎处处收敛

对 $\forall n$. $\exists k$. s.t. $\beta_k<n<\beta_{k+1}$ 同上面证明有：$\frac{\beta_k}{n}\cdot\frac{T_{\beta_k}}{\beta_k}\le\frac{T_n}{n}\le\frac{\beta_{k+1}}{n}\cdot\frac{T_{\beta_{k+1}}}{\beta_{k+1}}$

取极限：$\frac{1}{\alpha}\mu\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}\le\alpha\mu$. a.s. 令 $\alpha\searrow 1$ 得证.

$\Rightarrow$) 由 $\frac{1}{n}S_n\xrightarrow{a.s.}\mu$ 知 $\frac{1}{n}X_n=\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n}\xrightarrow{a.s.}0$

Claim：$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\ge n)<\infty$. 否则由独立性：$P(\frac{1}{n}X_n\ge 1 \text{ i.o.})=1$ 与 $\frac{1}{n}X_n\xrightarrow{a.s.}0$ 矛盾！

于是有 $\mathbb{E}[|X_1|]\le\sum_{n=0}^{\infty}P(|X_1|>n)<\infty$. 又 $\mu=\mathbb{E}[X_1]$ 证毕

第五章 中心极限定理

§5.1 特征函数

定义：X, Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量，称 $Z=X+iY$ 为复随机变量

(i) 为二维随机向量 (ii) Z_1 与 Z_2 独立：$P(X_1\le x_1, Y_1\le y_1, X_2\le x_2, Y_2\le y_2)=P(X_1\le x_1, Y_1\le y_1)P(X_2\le x_2, Y_2\le y_2)$

(iii) 若 $Z_1,\cdots,Z_n$ 是相互独立的，$\mathbb{E}[Z_1\cdots Z_n]=\mathbb{E}[Z_1]\cdots\mathbb{E}[Z_n]$

定义：X 的特征函数为 $\phi(t)=\mathbb{E}[e^{iXt}] \quad -\infty<t<+\infty$

(i) $\mathbb{E}[e^{itX}]=\mathbb{E}[\cos tX]+i\mathbb{E}[\sin tX]$ (ii) $|e^{itX}|\le 1$ 于是 $\phi(t)$ 总是存在的 (iii) 若 X 有密度 f：则 $\mathbb{E}[e^{itX}]=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}dF(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}f(x)dx$

定理：(i) $\varphi(0)=1 \quad |\varphi(x)|\le 1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

(ii) $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续

(iii) $\varphi(t)$ 非负定，即 $\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(t_i-t_j)z_i\bar{z}_j\ge 0$

定理：若 $\mathbb{E}[|X|^k]<+\infty$，$\forall j\le k$，有 $\varphi^{(j)}(0)=i^j\mathbb{E}[X^j]$ 进而 $\varphi(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(it)^j}{j!}\mathbb{E}[X^j]+o(t^k)$

定理：若 $Y=aX+b$，则 $\varphi_Y(t)=e^{itb}\varphi_X(at)$；若 Y 与 X 独立，$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

定义：多元特征函数：$X=(X_1,\cdots,X_n)$，$\varphi_X(t)=\mathbb{E}[e^{i\sum_{j=1}^{n}t_jX_j}]$

此时 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \varphi_{X,Y}(s,t)=\varphi_X(s)\cdot\varphi_Y(t)$

例：Bernoulli 分布（参数为 p）$\varphi(t)=pe^{it}+q$

对 $N(0,1)$. $\mathbb{E}[e^{itaX}]=e^{-\frac{1}{2}a^2t^2}$

$B(n,p)$ 分布：$\varphi(t)=(pe^{it}+q)^n$

指数分布：$X\sim Exp(\lambda)$. $\varphi(t)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cdot e^{itx}dx=\frac{\lambda}{\lambda-it}$ $\left(f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}\right)$

$N(0,1)$：$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2+itx}dx=e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Poisson: $\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$N(\mu,\sigma^2)$：$\phi(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

§5.2 反演与连续性定理

定理：F 为 X 的分布函数，$\phi(x)=\mathbb{E}[e^{itX}]$，$\forall -\infty<a<b<+\infty$，有 $\frac{F(b)+F(b-0)}{2}-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\phi(t)dt$

推论（唯一性）：若 $\phi_X(t)=\phi_Y(t)$，则 $X\overset{D}{=}Y$

$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$

例：求 $\cos t$ 对应的分布函数

法一：直接算

法二：猜随机变量再算. $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$. $\mathbb{E}[e^{itX}]=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\cos t$

定义：$F_n(x)$，$F(x)$ 为分布函数，若对 $\forall F$ 连续点 x，有 $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$，则称 F_n 弱收敛于 F. $F_n\xrightarrow{w}F$

Lévy-Cramér 连续性定理：F_n 分布函数列，$\phi_n(x)=\int e^{itx}dF_n$

(i) F 为分布函数，且 $F_n\xrightarrow{w}F$，则 $\phi_n\to\phi \quad \forall t\in\mathbb{R}$ 且 ϕ_n 内闭一致收敛到 ϕ

(ii) 若 $\phi(t)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$，且 ϕ 在 $t=0$ 处连续，则 ϕ 为某分布函数 F 的特征函数且 $F_n\xrightarrow{w}F$

必要的. 如 $X\sim U[-n,n]$ 则 $\varphi_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin nt}{nt} & t\ne 0 \to 0\\ 1 & t=0 \to 1\end{cases}$ $\varphi(t)$ 不是特征函数.

§5.3 Lindeberg-Feller CLT

定理：设 $\{X_i\}$ 独立同分布，$\mu=\mathbb{E}[X_1]$，$\sigma^2=Var(X_1)$ $\sigma\in(0,+\infty)$ 则有 $\frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}^{S_n-n\mu}}{\sqrt{n\sigma^2}}\xrightarrow{D}Z \quad Z\sim N(0,1)$

证明：设 $T_k=\frac{X_k-\mu}{\sigma}$. $U_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}(T_1+\cdots+T_n)$ 令 $\phi(t)=\mathbb{E}[e^{itT_1}]$ $\phi_n(t)=\mathbb{E}[e^{itU_n}]$

$\phi(t)=1+\frac{it}{1!}\mathbb{E}[X]+\frac{(it)^2}{2!}\mathbb{E}[X^2]+o(t^2)$

则 $\phi(t)=1+\frac{it}{1!}\cdot 0+\frac{(it)^2}{2!}\cdot 1+o(t^2)$ $\phi_n(t)=\phi^n(\frac{t}{\sqrt{n}})=(1-\frac{1}{2n}t^2+o(\frac{t^2}{n}))^n\to e^{-\frac{1}{2}t^2}$ 由连续性定理得证

Lindeberg 条件：$\mu_k=\mathbb{E}[X_k]$. $\sigma_k^2=Var(X_k)$. $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$

$\forall \varepsilon>0,\ \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_k-\mu_k)^2 I\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon B_n\}]=0}_{(L)}$ (一般不直接验证)

定理:(Lindeberg-Feller CLT) 设 X_k 相互独立, 满足 L-条件. 则 $\underbrace{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_k)\xrightarrow{D}Z\sim N(0,1)}_{(LF)}$ 且 $\underbrace{\frac{1}{B_n^2}\max\limits_{1\le k\le n}\sigma_k^2\to 0}_{(F)}$.

特别地, $\{X_k\}$ 相互独立, $\mathbb{E}[X_k]=\mu_k$, $\sigma_k^2=Var(X_k)$. 若 $\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k-\mu_k|^3]\to 0$ $n\to\infty$, 则 L-条件成立

注: (i) 概率意义: $\mu_k=0,\ \forall k$. $\frac{1}{B_n^2}\sum_k\mathbb{E}[X_k^2 I\{|X_k|>\varepsilon B_n\}]\ge\varepsilon^2\sum_k P(|X_k|>\varepsilon B_n)\ge\varepsilon^2 P(\bigcup_{k=1}^{n}\{\frac{X_k}{B_n}>\varepsilon\})=\varepsilon^2 P(\max\limits_k\frac{|X_k|}{B_n}>\varepsilon)\to 0$. 即 $\max\frac{|X_k|}{B_n}\xrightarrow{P}0$.

(ii) (L) $\Rightarrow$ (F): $\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}=\frac{\mathbb{E}[|X_k-\mu_k|^2(I\{\cdots>\varepsilon B_n\}+I\{\cdots\le\varepsilon B_n\})]}{B_n^2}\le\varepsilon^2+\underbrace{\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k-\mu_k|^2 I\{\cdots>\varepsilon B_n\}]}$

$\hookrightarrow$ $n\to\infty$ 时为0. 由Lindeberg条件.

于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\max\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}\le\varepsilon^2$ 令 $\varepsilon\searrow 0$ 即可

(iii) (L) 是 (LF) 充分条件. 同时有 (LF)+(F) $\Rightarrow$ (L)

(iv) Lyapunov条件: $\exists\delta>0$. $\frac{1}{B^{2+\delta}}\mathbb{E}[|X_k-\mu_k|^{2+\delta}]\to 0$ 此条件可推出(L)

De Moivre-Laplace定理.

$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ $X_i\sim B(1,p)$. $P(S_n=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

定理(局部极限定理) 设 $0<p<1$. 记 $x_k=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ $0\le k\le n$ 则对于所有满足 $|x_k|\le A$ 的 k, 有 $P(S_n=k)\sim\frac{e^{-\frac{1}{2}x_k^2}}{\sqrt{2\pi npq}}$ $n\to\infty$

积分形式CLT: $P(\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\in(a,b))\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ $n\to\infty$

§5.4 矩方法

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\gamma_k=\begin{cases}(2m-1)!! & k=2m\\ 0 & k=2m+1\end{cases}$$

定理: 设 $\{X_k\}$ 独立, 满足
(i) $\mathbb{E}[X_k]=0$, $Var(X_k)=1$ $\forall k\in\mathbb{N}$
(ii) (一致有界高阶矩) $\forall m\ge 3$, $\sup\limits_k\mathbb{E}[|X_k|^m]=C_m<\infty$

则有 $\mathbb{E}[(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i)^k]\to\gamma_k$ $n\to\infty$.

Theorem $\Rightarrow\forall\delta>0$, $\frac{S_n}{\sqrt{n}\cdot n^\delta}\xrightarrow{a.s.}0$ 再由矩收敛定理: $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,1)$

定理: $\{X_n\}$ 随机变量列 (i) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n^k]\to\gamma_k$ $n\to\infty$ 则有 $X_n\xrightarrow{D}X$
(ii) $\exists X$, s.t. $\gamma_k=\mathbb{E}[X^k]$ 且 $\{\gamma_k\}$ 满足 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{1}{k}\gamma_{2k}^{\frac{1}{2k}}<\infty$

Lindeberg替换术

定理(依分布收敛(D)等价刻画): $X_n\xrightarrow{D}X$ 当且仅当下列条件之一成立
(i) $\forall g\in C_b(\mathbb{R})$. $\mathbb{E}[g(X_n)]\to\mathbb{E}[g(X)]$
(ii) 给定 k. $\forall g,g',\cdots,g^{(k)}\in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[g(X_n)]\to\mathbb{E}[g(X)]$
(iii) $\phi_n(t)\to\phi(t)$ $t\in\mathbb{R}$