Poisson过程：1. 对指数分布 $T\sim Exp(\lambda)$，有 $E[T]=\frac{1}{\lambda}$，$Var(T)=\frac{1}{\lambda^2}$

2. $\{N(s)|s\ge0\}$ 是参数为 λ 的Poisson过程，则 $N(s+t)-N(s)\sim Poisson(\lambda t)$

3. 复合Poisson过程：$\{N(t)|t\ge0\}$ Y_i 与 N 独立，则 $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 为复合Poisson过程，$Var(S)=\lambda E[Y_i^2]$，$E[S]=\lambda E[Y_i]$

4. 分裂与合并 $N_1(t)\sim p_1\lambda$ 的Poisson过程 $\quad p_1+\dots+p_k=1$

$N_k(t)\sim p_k\lambda$ 的 ..

合并：$N(t)=N_1(t)+\dots+N_k(t)\sim\lambda_1+\dots+\lambda_k$ 的 ..

更新过程：状态1：工作时间 S_i，$E[S_i]=\mu_F$ 则长期处于状态1的比例为：$\frac{\mu_F}{\mu_F+\mu_G}$

休息时间 u_i，$E[u_i]=\mu_G$

$\frac{R(t)}{t}\to\frac{E[r_i]}{E[t_i]}$ $R(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}r_i$ 长期平均奖励 $=\frac{\text{每次更新奖励期望}}{\text{每次更新期望时间}}$

顾客单位时间来 λ 个，服务单位时间 μ 个，1个服务台。若 $\lambda<\mu$，空闲概率（平稳分布）$\pi(0)=1-\frac{\lambda}{\mu}$，$E_0[T_0]=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$（从空→空的时间）

$\lambda=\mu$ 空态零常返

$\lambda>\mu$ 空态为暂态

连续时间马氏链：

概念	离散时间马氏链DTMC	连续时间马氏链CTMC
时间	$n=0,1,2\cdots$	$t\ge0$
核心矩阵	转移概率矩阵 P	转移速率矩阵 Q
行和	$\sum_j P(i,j)=1$	$\sum_j Q(i,j)=0$
停留时间	固定1步	指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$
转移规则	一步跳 $P(i,j)$	指数停留后按 $q(i,j)$ 跳
t 时刻转移	$P^n(i,j)$	$p_t=e^{Qt}$
平稳分布	$\pi P=\pi$	$\pi Q=0$

$P_t(i,j)=P(X_t=j|X_0=i)$

$q(i,j)=\lim_{h\to0}\frac{P_h(i,j)}{h}$

Kolmogorov向前方程：$P_t'=QP_t$ $\quad P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)q_{kj}$，$P_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\ne j\end{cases}$

" 后 " ：$P_t'=P_tQ$

嵌入跳链：$P_{ij}=\begin{cases}-\frac{q_{ij}}{q_{ii}} & i\ne j\\0 & i=j\\1 & i=j \text{ 且 } q_{ii}=0\\0 & i\ne j \text{ 且 } q_{ii}=0\end{cases}$ $\left.\begin{matrix}\\ \end{matrix}\right\}$ 一行

Chapman-Kolmogorov方程：$\sum_k P_{ik}(s)P_{kj}(t)=P_{ij}(s+t)$

不可约+平稳分布：$\lim_{t\to\infty}P_t(i,j)=\pi_j$ $\quad$ 若无平稳分布，$\forall i,j\in S$ $\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=0$

细致平衡条件：$\pi_k q(k,j)=\pi_j q(j,k)$

不可约则一定原链不可约

是否爆炸：有限状态的链一定不爆炸，若无穷状态，嵌入跳链不可约常返则不爆炸 ⇒ 则原链常返

$X(0)=i$，i 常返则不爆炸

若 $q_i=0$，i 为常返态

$q_i>0$，则 i 在 X 与跳链 Y 中常返/瞬时是一致的

对于首达问题：首达概率：$h(i)=P(V_A<V_B|X_0=i)$ $\forall i\in C$，则 $\begin{cases}h(a)=1 & a\in A\\h(b)=0 & b\in B\end{cases}$ 有 $\sum_{j\in S}q_{ij}h(j)=0$，$\forall i\in C$ 为暂态

（C为暂态） $\quad$ $\left(h(i)=\sum_{j\in S}P_{ij}h(j)\right)$ $P_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i}$

首达时：$h(i)=E[V_A|X_0=i]$ $\forall i\in C$，$h(a)=0$ $\forall a\in A$，有 $\sum_{j\in S}q_{ij}h(j)=-1$ $\forall i\in C$ $\left(h(i)=\frac{1}{q_i}+\sum_{j\ne i}\frac{q_{ij}}{q_i}h(j)\right)$ 平均逗留时间）

鞅论：

定义3. 称 $\{S_n, n\ge0\}$ 为关于 $\{X_n, n\ge0\}$ 的鞅 （上鞅） （下鞅）

若 (a) $E|S_n|<\infty$ $\forall n\ge0$

(b) S_n 为 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 的函数

(c) $E(S_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)=S_n$ P.a.s. $\forall n\ge0$ $\le$ $\ge$

i.e. $E(S_{n+1}-S_n|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)=0$

注1. 对于鞅，(b)可以去掉，因为由(c)知 S_n 为 $X_0,\cdots,X_n$ 的函数

2. $\{X_n, n\ge0\}$ 关于 $\{X_n, n\ge0\}$ 通常不是鞅，

很多情况下，$\exists\phi$ s.t. $\{S_n=\phi(X_n,n), n\ge0\}$ 关于 $\{X_n, n\ge0\}$ 为鞅。

i.e. $E(\phi(X_{n+1},n+1)|X_n,\cdots,X_1,X_0)=\phi(X_n,n)$

定理1，若 $\{S_n, n\ge1\}$ 为关于 $\{X_n, n\ge1\}$ 的鞅且 $\sup_{n\ge1}E(S_n^2)<M<\infty$

则 $\exists$ r.v. S 使得 $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}S_n=S & P\text{-a.s.}\\E(S_n-S)^2\to0 & \text{当 } n\to+\infty\end{cases}$ #

定理2. Doob-Kolmogorov 不等式

假设同定理1，则 $P(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}E(S_n^2)$，$\forall\varepsilon>0$ #

M_n 为鞅，T 为停时，若 $P(T<\infty)=1$，$\exists k$ s.t. $\forall n$，$|M_{T\wedge n}|\le k$，则 $E[M_T]=E[M_0]$

首达概率：设 $h(i)=P(V_A<V_B|X_0=i)$ $\quad h(i)=\sum_{j\in S}P_{ij}h(j)$

Wald等式：$X_0, X_1, \cdots, X_n\cdots$ 相互独立：$\begin{cases}E|X_0|<\infty\\X_i, i=1,2,\cdots \text{ i.i.d } E|X_i|<\infty \text{ 且 } EX_i=\mu.\end{cases}$

令 $S_n=X_0+X_1+\cdots+X_n$.

T 为停时，$ET<\infty$.

则 $E(S_T-S_0)=\mu ET$ #

Th5.11. $M=\{M_n, n\ge0\}$ 关于 $X=\{X_0, X_1, \cdots\}$ 为鞅

T 为停时. $P(T<\infty)=1$. $|M_{T\wedge n}|\le K<\infty$.

Then $EM_T=EM_0$.

灭绝概率结论：构造指数鞅 $M_n=e^{\alpha S_n}$（$\alpha<0$ s.t. $E[e^{\alpha X}]=1$）

① $P_x(V_0<\infty)=e^{\alpha x}$

② $\varphi(z)=E[z^Y]$ $\mu=E[Y]$ 为单个个体后代均值，则灭绝概率 ρ 为 $\varphi(\rho)=\rho$ 的最小非负解。$\mu\le1$ 则必然灭绝，$\rho=1$

$\mu>1$ 则正概率不灭绝 $\rho<1$

③ 初始资金 S_0，年净收益 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\mu>0$，则 $P(\text{破产})\le e^{-\frac{2\mu S_0}{\sigma^2}}$