电磁学 C 期中复习课讲义

张竞一

2025 年 10 月 26 日

1　一些注意事项

1. 电势和场强的关系：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{E}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{E}_z\mathbf{e}_z = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z = -\nabla \mathbf{U}$$

2. 对 $\mathbb{R}^2$ 中 $dxdy$ 换元为极坐标系中 $drd\theta$ 时需要记住 Jacobi 行列式带入后的表达式：

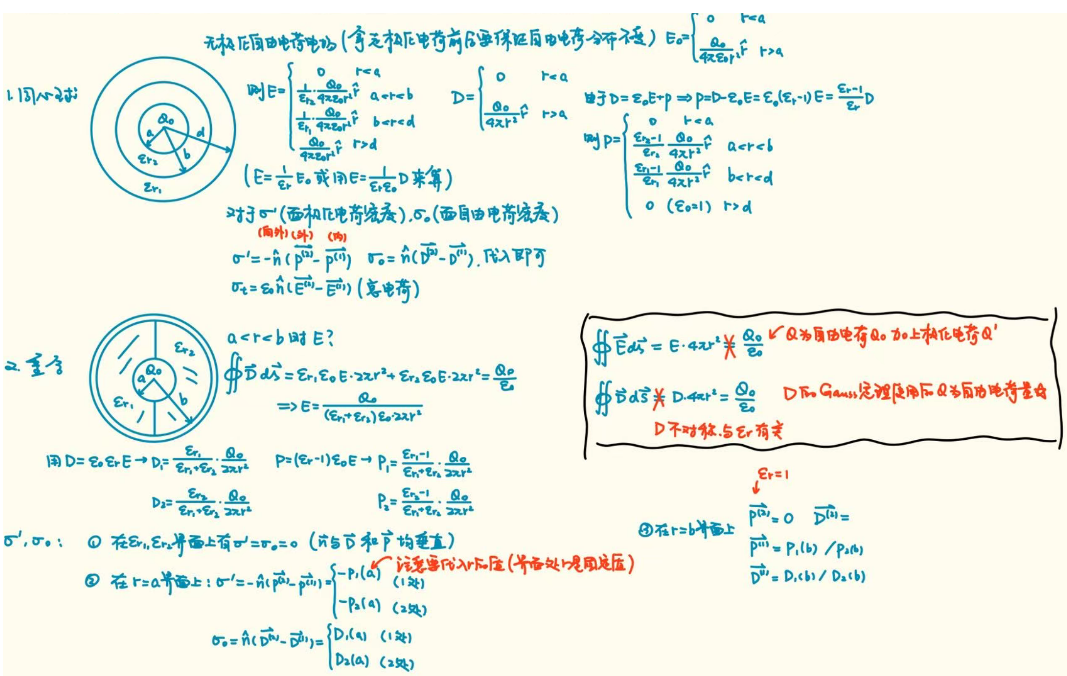
$$dxdy = rdrd\theta$$

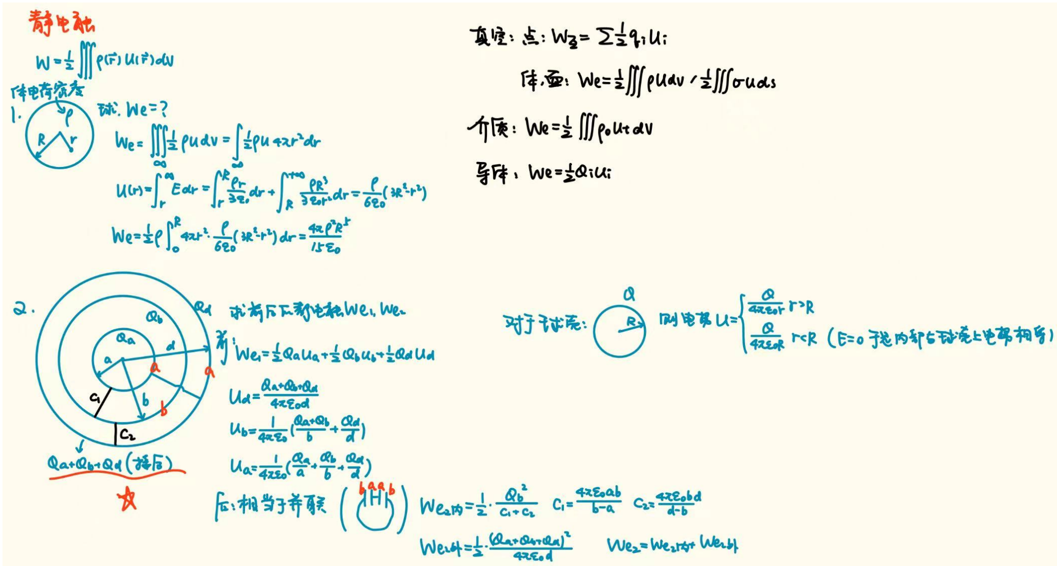
3. 导体板电荷分布中最外侧为 $\frac{1}{2}\sum Q$, 相邻导体板面的电荷互为相反数。

4. 只有线性极化的电介质才满足 $D = \epsilon_0\epsilon_r E$，非线性极化不能用这个公式。

5. 需要熟记平行板电容器，球形电容器，圆柱形电容器等常见电容器的电容公式。

2　一些常见题型





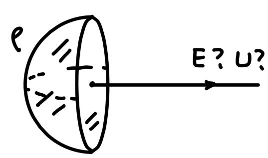
3 补充习题内容

下面的习题是助教在电磁学 B 期中考试前徐春凯老师给出的题型，能够帮助大家过一遍重要知识点，虽然是电磁学 B 要求内容，但是并不超纲，相信大家掌握后能对电磁学中**电**这一部分有一个更深刻的理解。

一. 电场与电势

电场和电势的部分是我们最开始学习的内容，一般来说考核方式比较简单，大多数情况是计算对称情形下电场和电势的表达式。

一个半球，体电荷密度为 ρ，半径为 R，求半球的大圆面那一端圆心向外垂直于平面的射线上电场强度 E 和电势 U 的大小



写出原表达式！考试中如果结果错误可以按照步骤给分，一定把步骤写全。

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l^2}, \quad dq = \rho dV, \quad dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$l^2 = r^2 + x^2 + 2rxcos\theta, \quad E = E_x, \quad dE_x = dE \cdot cos\alpha, \quad cos\alpha = \frac{x + rcos\theta}{l}$$

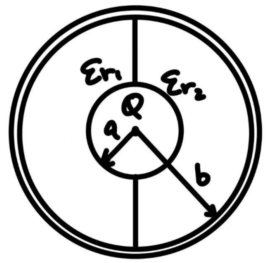
则

$$dE_x = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x + rcos\theta) r^2 sin\theta dr d\theta d\phi}{(r^2 + x^2 + 2rxcos\theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad E = E_x = \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x + rcos\theta) r^2 sin\theta d\phi}{(r^2 + x^2 + 2rxcos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dU = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 sin\theta dr d\theta d\phi}{(r^2 + x^2 + 2rxcos\theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad U = \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 sin\theta d\phi}{(r^2 + x^2 + 2rxcos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

(这里只是给出解题方法，这个表达式有些复杂，感兴趣的同学可以继续向下计算)

二. 电介质球综合



(1)E,D,P?

有公式 $\iint \mathbf{D}d\mathbf{s} = Q$，则

$$\iint \mathbf{D}d\mathbf{s} = 2\pi r^2(\epsilon_0\epsilon_{r_1}E + \epsilon_0\epsilon_{r_2}E) = Q$$

于是有

$$E = \frac{Q}{2\pi r^2\epsilon_0(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})}$$

由 $D = \epsilon_0\epsilon_r E$, 有 $D_1 = \epsilon_0\epsilon_{r_1}E$，$D_2 = \epsilon_0\epsilon_{r_2}E$

由 $P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$, 有 $P_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r_1} - 1)E$，$P_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r_2} - 1)E$

(2)σ',σ_0?

$$\sigma' = -\hat{n}(\mathbf{P}^{(2)} - \mathbf{P}^{(1)}), \sigma_0 = \hat{n}(\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)})$$

在介质 1,2 的界面上 $\sigma' = 0$,$\sigma_0 = 0$

①当 $r = a$ 时，

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}; \quad \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{D}$$

于是

$$\sigma_1'(a) = -\mathbf{P}_1(a), \quad \sigma_2'(a) = -\mathbf{P}_2(a); \quad \sigma_{0_1}(a) = \mathbf{D}_1(a), \quad \sigma_{0_2}(a) = \mathbf{D}_2(a)$$

②当 $r = b$ 时，

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{0}$$

于是

$$\sigma_1'(b) = \mathbf{P}_1(b), \quad \sigma_2'(b) = \mathbf{P}_2(b); \quad \sigma_{0_1}(b) = -\mathbf{D}_1(b), \quad \sigma_{0_2}(b) = -\mathbf{D}_2(b)$$

(3) 电势差 U, C?

$$U = \int_a^b Edr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}), \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

(4) 储能 W_{e_1}, W_{e_2}?

有

$$w_{e_1} = \frac{1}{2}E_1D_1 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_{r_1}\frac{Q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})^2r^4} = \frac{\epsilon_{r_1}Q^2}{8\pi^2\epsilon_0(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})^2r^4}$$

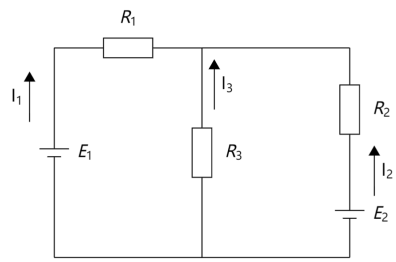
则

$$W_{e_1} = \int w_{e_1} dV = \int_a^b 2\pi r^2 w_{e_1} dr = \frac{\epsilon_{r_1} Q^2}{4\pi^2\epsilon_0(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})^2}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

W_{e_2} 同理可求。

三.Kirchhoff 定律

求 I_1, I_2, I_3



$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ E_1 = I_1R_1 - I_3R_3 \\ -E_2 = I_3R_3 - I_2R_2 \end{cases}$$

可以由此方程组解出 I 的值。