时间齐次

1. 转移概率 $P_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_1=j|X_0=i)$

若 $P_{ii}=1$，称 i 为吸收态

2. 转移矩阵为 P，则 n 步转移矩阵为 P^n

3. Chapman-Kolmogorov 方程：$p^{m+n}(i,j)=\sum_k p^m(i,k)p^n(k,j)$ 常用于构造不等式.

4. 首次返回时间：$T_y=\min\{n\ge1 | X_n=y\}$

$\sum p^k(x,x)=\infty$

正常返：E[首次返回的步数] $<\infty$ 即 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}>0$.

返回概率：$\rho_{yy}=P_y(T_y<\infty)$，若 $\rho_{yy}=1$，为常返态 （回 y 至少 n 次概率：ρ_{yy}^n）

零常返：E[首次返回的步数] $=\infty$ 即 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$

若 $\rho_{yy}<1$，为瞬时态

停时：$T=n$ 仅由 $X_0,\dots,X_n$ 决定

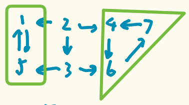
强马氏性：T 为停时，$X_T=y$，则 $\{X_{T+k}|k\ge0\}$ 与从 y 出发的马氏链完全一致. $P(X_{T+1}=z|X_T=y,T=n)=p_{yz}$

5. $x\to y$：$\rho_{xy}=P_x(T_y<\infty)>0$.

6. $\exists k\ge1,\ \alpha>0,\ \forall x,\ P_x(T_y\le k)\ge\alpha$，则 $P_x(T_y>nk)\le(1-\alpha)^n$，且 $E_x(T_y)<\infty$.

7. $\rho_{xy}>0$，$\rho_{yx}<1$ 则 x 瞬时 $\overset{等价}{\Longleftrightarrow}$ x 常返，$\rho_{xy}>0$，则 $\rho_{yx}=1$

8. 有限闭、不可约的集合中状态常返 如：



非闭并

9. x 常返，$x\to y$，则 y 常返 $\overset{等价}{\Longleftrightarrow}$ y 瞬时，$x\to y$，则 x 瞬时

10. $N(y)$ 为 X_n 访问 y 的次数，$E_x[N(y)]=\frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$

$\Downarrow$

y 常返 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_{yy}^k=E_y[N(y)]=\frac{\rho_{yy}}{1-\rho_{yy}}=\infty$

11. 平稳分布：$\pi P=\pi$

列和为 1 的 P 的平稳分布 $\pi=N=|S|$

若 $\exists k$，k 步后 $P^k(i,j)>0$ 对 $\forall i,j$ 成立，则收敛到平稳分布

细致平衡：$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$

若链满足↑，反演过程与原链完全一致，链是可逆的

12. M-H 算法：

- **候选分布** $q(x,y)$：从当前状态 x **转移到状态** y 的概率，可自由选择（如高斯分布）.
- **接受概率** $r(x,y)$：决定是否接受候选状态的概率，公式为：
  $r(x,y)=\min\left\{\frac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)},1\right\}$
- **转移概率** $p(x,y)$：算法构造的马尔可夫链的转移概率，公式为：
  $p(x,y)=q(x,y)r(x,y)$

已知 $\pi(x)$，生成分布为 $\pi(x)$ 的数据

→ 用以 $\pi(x)$ 为平稳分布

（详见第三周讲义）

13. 对不可约马氏链，有平稳分布 $\pi(x)$，则 π 满足细致平衡条件 $\Leftrightarrow$ 满足 Kolmogorov 循环条件，即 $\prod_{i=1}^{n}p(x_{i-1},x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,x_{i-1})$

14. 周期 $d(x)=\gcd\{n\ge1|p^n(x,x)>0\}$，即 n 步后返回 x 的 n 的 gcd. （$p(x,x)>0$ 则 x 的周期为 1）

周期为 1 也称为非周期

互通状态周期相同，更一般地不可约链中所有状态周期相同.

15. 重要结论：不可约，平稳分布存在 $\Rightarrow \forall y$，y 常返，$\pi(y)=\frac{1}{E_y[T_y]}$ 且平稳分布唯一

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p^k(x,y)=\pi(y)\quad \forall x,y\in S$

$\Rightarrow$ 若 $\sum_{x\in S}|f(x)|\pi(x)<\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(X_k)=\sum_{x\in S}f(x)\pi(x)$

+非周期 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}p^n(x,y)=\pi(y)$

不可约，常返 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{N_n(y)}{n}=\pi(y)$

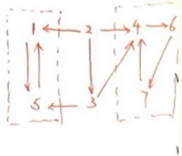
有限状态不可约 $\Rightarrow$ 常返则一定正常返，无论是否常返，一定有平稳分布

无 ‥ $\Rightarrow$ 只有正常返时有唯一平稳分布，零常返/暂态时无平稳分布

16. 对大型矩阵. 分为暂态与多不可约链研究.

例1.46*例1.14. $S=\{1,2,\cdots,6,7\}$.

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



转移概率图: ?

分析每个状态的性质 ?

排序: 为 $\mathbb{P}=$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{\begin{matrix} .2 & .3 \\ & .5 \end{matrix}} & & .1 & 0 & .4 & & \\ & & 0 & .2 & .3 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} .7 & .3 \\ .6 & .4 \end{matrix}} & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} .5 & .5 & 0 \\ 0 & .2 & .8 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & \end{array}\right)$$
C　A　B

分为 $A=\{1,5\}$, $B=\{4,6,7\}$, $C=\{2,3\}$. 有A.B为不可约闭集, C为暂态.

由A.B不可约.有限闭.非周期 ($\rho_{11}>0$. $\rho_{44}>0$) 知A.B存在!平稳分布.

设A.B的平稳分布为 π_A. π_B. 有 $\pi_A A=\pi_A$. 有 $\pi_A=(0.0.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.0.0.0)$

$\pi_B B=\pi_B$　　$\pi_B=(0.0.0.0.0.\frac{8}{17}.\frac{5}{17}.\frac{4}{17})$

则此马氏链全体平稳测态为 $a\pi_A+b\pi_B$.

定理1.24. 不可约+常返. 任给定 $x\in S$. 令 $T_x=\inf\{n\geq 1: X_n=x\}$.

$\mu_x(y)=\sum_{n=0}^{\infty}P_x(X_n=y.\ T_x>n)$　　$\mu_x=(\mu_x(y),\ y\in S)$.

则　$\mu_x\mathbb{P}=\mu_x$ 且 $\forall y$.　$0<\mu_x(y)<\infty$ #

注1:　$P_y(T_x<\infty)=1$　$\forall y\in S$.　(常返+不可约) 引理1.6

注2 $\mu_x(x)=P_x(X_0=x.\ T_x>0)+P_x(X_1=x.\ T_x>1)+\cdots+P_x(X_n=x.\ T_x>n)+\cdots=1+0+\cdots 0+\cdots=1$

推论: 不可约+常返马氏链

若 M为平稳测度, 则 $\frac{M}{M(x)}=\mu_x$.

全部Pij性质: 由结论15 (上条). $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}(n)=\pi(j)$　① $i.j\in A$. $\lim\limits_{n\to\infty}P_{i1}(n)=\frac{2}{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty}P_{i5}(n)=\frac{1}{3}$

② $i.j\in B$ 同理

③ $i\in A.j\in B$ 或反过来. 由闭性. $P_{ij}(n)=0$ $\forall n\geq 0$.

当 $i=2$ 或3时 ($i\in C$) 设 $h(i)=P(V_A<V_B|X_0=i)$ (先入A而非B的概率)

有 $h(1)=h(5)=1$. $h(4)=h(6)=h(7)=0$. 有 $h(i)=\sum\limits_{j\in S}P_{ij}h(j)\Rightarrow h(2)=\frac{11}{40}$ $h(3)=\frac{2}{5}$

对 $i=2$: A中: $\lim\limits_{n\to\infty}P_{2j}(n)=h(2)\cdot\pi_A(j)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{21}(n)=\frac{11}{40}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{60}$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_{25}(n)=\frac{11}{40}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{120}$

B中: $\lim\limits_{n\to\infty}P_{2j}(n)=(1-h(2))\pi_B(j)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{24}(n)=\frac{29}{40}\times\frac{8}{17}=\frac{29}{85}$, ‥

先入3的概率

C中: 暂态长期访问P=0. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{22}(n)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{23}(n)=0$.

对 $i=3$ 同理.

17. 一个结论: 从x出发. 到吸收态0或N则停止. $x\in[0.N]$. 则停止时间期望为 $x(N-x)$ ($f(x)=1+\frac{1}{2}f(x+1)+\frac{1}{2}f(x-1)$ 求得)

18. 定义全变差距离 $d_{TV}(\mu.\nu)=\sup\limits_{A\subseteq S}|\mu(A)-\nu(A)|$ $\mu(A)$ 为分布 μ 在A上的概率

压缩性: $d_{TV}(\mu\mathbb{P}.\nu\mathbb{P})\leq d_{TV}(\mu.\nu)$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\mathbb{P}^n=\pi$. π 为不变分布. ; S 有限时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu\mathbb{P}^k=\pi$ 为不变分布

Doeblin准则: 一步强连通 ($P_{ij}>0$ $\forall i.j\in S$) 则 $\exists\lambda\in(0.1)$. $d_{TV}(\mu\mathbb{P}.\nu\mathbb{P})\leq\lambda d_{TV}(\mu.\nu)$

或 $\exists m>0$. $\mathbb{P}^m$ 是一步强连通的. 对 $\mathbb{P}$ 不可约.非周期. $\forall i.j\in S$. $\exists N_{ij}>0$. $n\geq N_{ij}$. $P_{ij}(n)>0$.

19. **定理 1.5.5 (Galton-Watson分支过程灭绝概率)**

设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为Galton-Watson分支过程，满足：

- 初始状态 $X_0=1$；
- 每个个体独立产生后代，后代数的分布为 $\{p_k, k\geq 0\}$，生成函数为
  $\phi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$；
- 单个个体的期望后代数为 $\mu=EY_1=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k$；
- 灭绝时间为 $V_0=\min\{n\geq 0: X_n=0\}$，灭绝概率为 $\rho=P(V_0<\infty)$。

结论

1. **灭绝概率 ρ 是方程 $s=\phi(s)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小解。**
2. **按期望后代数 μ 分类：**
   - 当 $\mu<1$ (亚临界) 时：方程 $s=\phi(s)$ 在 $[0,1]$ 上仅有唯一解 $s=1$，故 $\rho=1$，分支过程必然灭绝。
   - 当 $\mu=1$ (临界) 且 $p_1<1$ 时：方程 $s=\phi(s)$ 在 $[0,1]$ 上仅有唯一解 $s=1$，故 $\rho=1$，分支过程必然灭绝。
   - 当 $\mu>1$ (超临界) 时：方程 $s=\phi(s)$ 在 $[0,1]$ 上存在唯一解 $\rho\in(0,1)$ (小于1的最小解)，故 $0<\rho<1$，分支过程以正概率 $1-\rho$ 永久生存，以概率 ρ 最终灭绝。

2. 设$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是随机游走，步长分布为$P(\xi_1=k)=1/6$，$k=1,\dots,6$。令

$$A_n := \{S_n 能被 13 整除\},$$

试求$\lim\limits_{n\to\infty} P_0(A_n)$.

3. 一只青蛙在正立方体的 8 个顶点上做随机游动，每次以 1/4 的概率停留不动，以 1/4 的概率选择某条相邻边并跳至相邻顶点。试求：
(1) 从立方体一个顶点v出发首次返回v的平均时间；
(2) 从v出发首次到达对径点w的平均时间。

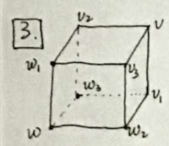
$\boxed{2.}$ 令 $\overline{S_n}=S_n \bmod 13$. 则$\{\overline{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$亦为马氏链，状态空间$\overline{S}=\{0,1,2,\cdots,11,12\}$. 记转移矩阵为$\overline{\mathbb{P}}=(\overline{p}_{ij})_{i,j\in S}$

则 $\forall i\in S$, $\overline{p}_{i,(i+k)\bmod 13}=\frac{1}{6}$, $k=1,2,\cdots,6$. 因此：① $\overline{\mathbb{P}}$不可约；② $\overline{\mathbb{P}}$双重随机；

③ $\overline{\mathbb{P}}$非周期：$\overline{p}^{(3)}_{00}\geq p_{0,6}\,p_{6,12}\,p_{12,0}>0$；$\overline{p}^{(4)}_{00}\geq p_{0,4}\,p_{4,8}\,p_{8,12}\,p_{12,0}>0$.

所以，由①②③，$\{\overline{S}_n\}$有平稳分布$\frac{1}{13}\mu\ (\mu\equiv 1)$，再由强遍历定理，$\lim\limits_{n\to\infty}P_0(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P_0(\overline{S}_n=0)=\frac{1}{13}$. □

$\boxed{3.}$



如左图所示为立方体编号，记此立方体上随机游走为$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，转移矩阵$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in S}$

$S=\{v,v_1,v_2,v_3,w_1,w_2,w_3\}$. $\forall i,j\in S$，若i,j相邻或相等，$p_{ij}=\frac{1}{4}$，否则$p_{ij}=0$.

(1) 由于$\mathbb{P}$不可约、非周期、双重随机，则$\mathbb{P}$有平稳分布$\frac{1}{8}\mu\ (\mu\equiv 1)$

故 $E_v\tau_v=\frac{1}{\pi_v}=8$；

(2) 令$y_i=E_i\tau_w$, $\forall i\in S$, 则y_i满足

$$\begin{cases} y_v = 1+\frac{1}{4}y_v+\frac{1}{4}y_{v_1}+\frac{1}{4}y_{v_2}+\frac{1}{4}y_{v_3} \\ y_{v_\alpha}=1+\frac{1}{4}y_{v_\alpha}+\frac{1}{4}y_v+\frac{1}{4}y_{w_\beta}+\frac{1}{4}y_{w_\gamma} \\ y_{w_\alpha}=1+\frac{1}{4}y_{w_\alpha}+\frac{1}{4}y_w+\frac{1}{4}y_{v_\beta}+\frac{1}{4}y_{v_\gamma} \\ y_w=0 \end{cases}$$

这里$\alpha,\beta,\gamma=1,2,3$
且α,β,γ互不相同.

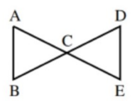
令$y_1=\sum\limits_{k=1}^{3}y_{v_k}$, $y_2=\sum\limits_{k=1}^{3}y_{w_k}$. 则

$$\begin{cases} \frac{3}{4}y_v = 1+\frac{1}{4}y_1 \\ \frac{3}{4}y_1 = 3+\frac{3}{4}y_v+\frac{1}{2}y_2. \\ \frac{3}{4}y_2 = 3+\frac{1}{2}y_1, \end{cases}$$

解出$y_v=\frac{40}{3}$. □

5. 设粒子在下图的 bow tie 图形 $ABCDE$ 上作随机游走，其中 C 为中心结点。从任一顶点出发，它的下一步等概率地走向任一相邻顶点。初始位置在 A。求下列各量的期望值：

r of visits to D before returning to A



~~(a)~~ 首次回到 A 的时间；

~~(b)~~ 在回到 A 之前访问 D 的次数；

~~(c)~~ 在回到 A 之前访问 C 的次数；

(d) 在回到 A 之前，且在此之前粒子未访问过 E 的条件下，首次回到 A 的时间；

(e) 在回到 A 之前，且在此之前粒子未访问过 E 的条件下，访问 D 的次数。

(d). 设$F=\{T_A'<T_E\}$. 要求$\mathbb{E}_A[T_A'\mid F]=\dfrac{\mathbb{E}_A[T_A'1_F]}{P_A(F)}$.

设P_x为x出发到A前未访问E的概率.

则 $\begin{cases} P_A=1 \quad P_E=0 \\ P_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_C \\ P_C=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}P_B+\frac{1}{4}P_D \\ P_D=\frac{1}{2}P_C \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_B=\frac{3}{4} \\ P_C=\frac{1}{2} \\ P_D=\frac{1}{4} \end{matrix}$ 则$P_A(F)=\frac{1}{2}(P_B+P_C)=\frac{5}{8}$

设$q_x=\mathbb{E}_x[T_A'1_F]$. 则

$\mathbb{E}_x[(T_A'+1)1_F]=P_x+q_x$

$\begin{cases} q_A=0. \\ q_B=\frac{1}{2}P_A+\frac{1}{2}(P_C+q_C) \\ q_C=\frac{1}{4}P_A+\frac{1}{4}(P_B+q_B)+\frac{1}{4}(P_D+q_D) \\ q_D=\frac{1}{2}(q_C+P_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q_B=\frac{5}{4} \\ q_C=1 \\ q_D=\frac{3}{4} \end{matrix}$

$\mathbb{E}_A[T_A'1_F]=\frac{1}{2}(P_B+q_B)+\frac{1}{2}(P_C+q_C)$
$=\frac{7}{4}$

(e). 要求$\mathbb{E}_A[N_D\mid F]=\dfrac{\mathbb{E}_A[N_D1_F]}{P_A(F)}$.

设$n_x=\mathbb{E}_x[N_D1_F]$

则 $\begin{cases} n_A=0 \\ n_B=\frac{1}{2}n_C \\ n_C=\frac{1}{4}n_B+\frac{1}{4}n_D \\ n_D=P_D+\frac{1}{2}n_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_B=\frac{1}{24} \\ n_C=\frac{1}{12} \\ n_D=\frac{7}{24} \end{cases}$

$\mathbb{E}_A[N_D1_F]=\frac{1}{2}n_B+\frac{1}{2}n_C=\frac{1}{16}$

则为 $\dfrac{1/16}{5/8}=\dfrac{1}{10}$