数理统计

统计量：1. 样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

2. 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$E[X^n]=\varphi^{(n)}(0)/i^n$

$\varphi(t)=E[e^{itX}]$

3. 样本矩 ① k阶原点矩 $a_{n,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

② k阶中心矩 $m_{n,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

4. 二维随机变量中协方差 $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$

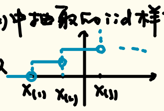
相关系数 $r=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$

5. 样本中位数 $m_{\frac{1}{2}}=\begin{cases}X_{\frac{n+1}{2}} & n\text{奇}\\ \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}}+X_{\frac{n}{2}+1}) & n\text{偶}\end{cases}$ （X为次序统计量，从小到大排列）

6. 样本变异系数 $\hat{v}=\frac{S}{\bar{X}}$ S为样本标准差.

总体变异系数 $v=\frac{\sqrt{Var(X)}}{E[X]}$

定义：设 $X_1,\dots,X_n$ 为 $F(x)$ 中抽取的i.i.d样本，将其按大小排列为 $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\dots\le X_{(n)}$，对 $\forall x\in\mathbb{R}$，称 $F_n(x)=\begin{cases}0 & x<X_{(1)}\\ k/n & X_{(k)}\le x<X_{(k+1)}\quad k=1,2,\dots,n-1\\ 1 & X_{(n)}\le x\end{cases}$

为经验分布函数 

也可表示为 $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{(-\infty,x]}(X_i)$

分布：

离散型：

均匀分布：$X\sim \text{Discrete}\,U(a,b)$，$E[X]=\frac{a+b}{2}$ $Var(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

二项分布：$X\sim B(n,p)$，$E[X]=np$ $Var(X)=np(1-p)$ $\varphi(t)=(1-p+pe^{it})^n$

泊松分布：$X\sim P(\lambda)$，$E[X]=\lambda$ $Var(X)=\lambda$，$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

几何分布：$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k=1,2,\dots$

$E[X]=\frac{1}{p}$ $Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$ $\varphi(t)=\frac{p\cdot e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

总 要 取

超几何分布：$X\sim H(N,K,n)$，$E[X]=n\cdot\frac{K}{N}$，$Var(X)=n\cdot\frac{K}{N}(1-\frac{K}{N})\cdot\frac{N-n}{N-1}$

连续型：

均匀分布：$X\sim U(a,b)$，$E[X]=\frac{a+b}{2}$，$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E[X]=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$，$\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

有可加性：$X_1,\dots,X_n\sim\Gamma(\alpha_i,\beta)$ 则 $Y=X_1+\dots+X_n$ 有 $Y\sim\Gamma(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta)$

注意 β 必须一致！

Exp：$E=\frac{1}{\lambda}$ $D=\frac{1}{\lambda^2}$

$\varphi(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$

Gamma分布：$X\sim Gamma(\alpha,\beta)$，$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$，$E[X]=\frac{\alpha}{\beta}$，$Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$，$\varphi(t)=(1-\frac{it}{\beta})^{-\alpha}$

Beta分布：$X\sim Beta(\alpha,\beta)$，$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$，$E[X]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ （$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$）

$\bar{X}$的分布：若 $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. 1. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

2. $\sim Exp(\lambda)$，$\bar{X}\sim Gamma(n,n\lambda)$ （$Exp(\lambda)=Gamma(1,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$）

χ^2分布：设 $X\sim\chi^2_n$ 则 ① $Z\sim N(0,1)$，则 $Z^2\sim\chi^2_1$

② 若 $X_1,\dots,X_p$ 独立，且 $X_i\sim\chi^2_{n_i}$，则 $X_1,X_2,\dots,X_p\sim\chi^2_{n_1+\dots+n_p}$

③ $X\sim Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ $f=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$ $x>0$

④ $E[X]=n$，$Var(X)=2n$

⑤ 特征函数 $\varphi_X(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

$X\sim Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$

则 $kX\sim Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2k})$

定理：若 $X_1,X_2,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则有 ① $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

② $\frac{n-1}{\sigma^2}S_X^2\sim\chi^2_{n-1}$

③ $\bar{X}$ 与 S_X^2 相互独立

t分布：若 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2_n$ 且 X,Y 独立 $\Rightarrow T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 称为自由度为n的t变量，其分布称为自由度为n的t分布，记为 $T\sim t_n$

性质：① $n\ge2$ 时 $E[T]=0$. $n\ge3$ 时 $Var(T)=\frac{n}{n-2}$

$t_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ $-\infty<x<\infty$

② $n=1$ 时为Cauchy分布，$t_1=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $-\infty<x<\infty$

③ $n\to\infty$ 时为 $N(0,1)$

F分布：$X\sim\chi^2_m$，$Y\sim\chi^2_n$，X,Y 独立. 称 $F=\frac{X/m}{Y/n}$ 为自由度为m和n的F变量，其分布称为自由度为m和n的F分布，记为 $F\sim F_{m,n}$.

性质：① 若 $X\sim F_{n,m}$，则 $\frac{1}{X}\sim F_{m,n}$

$f_{m,n}=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}$ $x>0$

② $n>2$ 时 $E[F]=\frac{n}{n-2}$ $n>4$ 时 $Var(F)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

③ 若 $T\sim t_n$，则 $T^2\sim F_{1,n}$

④ $F_{n,m}(1-\alpha)=(F_{m,n}(\alpha))^{-1}$

$\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}$ ✓

次序统计量：设 $X_1,\dots,X_n$ i.i.d.，将其按数值大小排列为 $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\dots\le X_{(n)}$，则 $X_{(1)},X_{(2)},\dots,X_{(n)}$ 称样本 $X_1,\dots,X_n$ 的次序统计量

1. 样本中位数：$m_{\frac{1}{2}}=\begin{cases}X_{(\frac{n+1}{2})} & n\text{为奇}\\ \frac{1}{2}(X_{(\frac{n}{2})}+X_{(\frac{n}{2}+1)}) & n\text{为偶}\end{cases}$

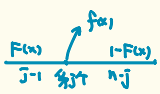
2. 样本极值：$X_{(1)},X_{(n)}$ 称为样本的极小值与极大值

3. 样本p分位数：$X_{(m)}$，$m=[(n+1)p]$ [ ]表示取整数部分（二分位数只在n为奇数时为样本中位数）

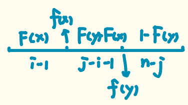
4. 样本极差：$R=X_{(n)}-X_{(1)}$

5. 样本中程数：$mR=\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$

连续型单个：简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$ 取自总体分布函数F，$X_{(j)}$ 的f为 $f_{X_{(j)}}(x)=\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)$



连续型两个联合密度：…，$(X_{(i)},X_{(j)})$ $i<j$ 的联合密度函数为 $f_{ij}(x,y)=\begin{cases}\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x)]^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j}f(x)f(y) & x<y\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



特别地，有极小值分布：$f_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$

极大值分布：$f_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$

Theorem (3.1)

[【1】定理5.4.3]（离散型） 设$X_1,\dots,X_n$ $i.i.d.$ 取自概率质量函数(p.m.f.) $\mathbb{P}(X=x_i)=p_i$ 的离散型总体X，其中$x_1<x_2<\cdots$ 是X的所有可能的取值。定义

$$P_0=0;\quad P_1=p_1;\quad P_2=p_1+p_2;\quad \cdots\cdots$$
$$P_i=p_1+\cdots+p_i;\quad \cdots\cdots$$

以$X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ 为样本$X_1,\dots,X_n$的次序统计量，则

$$\mathbb{P}(X_{(j)}\le x_i)=\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}P_i^k(1-P_i)^{n-k},$$

且$\mathbb{P}(X_{(j)}=x_i)=\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\left[P_i^k(1-P_i)^{n-k}-P_{i-1}^k(1-P_{i-1})^{n-k}\right]$.

次序统计量的联合密度：$g(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})=\begin{cases} n!f(x_{(1)})\cdots f(x_{(n)}) & x_{(1)}<\cdots<x_{(n)} \\ 0 & 其他\end{cases}$

极差的分布：先求$V=X_{(j)}-X_{(i)}$的分布，作变换：$\begin{cases} z=x_{(i)} \\ v=x_{(j)}-x_{(i)}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{(i)}=z \\ x_{(j)}=z+v\end{cases}$ 此变换Jacobi行列式$J=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$

则有(z,v)联合密度为$g_{ij}(z,v)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(z)]^{i-1}[F(z+v)-F(z)]^{j-i-1}[1-F(z+v)]^{n-j}f(z)f(z+v) & v>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$

$n(n-1)(F(x_{(j)})-F(x_{(i)}))^{n-2}f(x_{(j)})f(x_{(i)})$

特别地，有极差分布：有$g_{1n}(z,r)=\begin{cases} n(n-1)[F(z+v)-F(z)]^{n-2}f(z)f(z+v) & v>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$ 则有$R=X_{(n)}-X_{(1)}$的边缘密度为$g_R(r)=\int_{-\infty}^{\infty}g_{1n}(z,r)dz$

例：$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. 求 ① $X_{(i)}, i=1,\cdots,n$ 的p.d.f. ② $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$的联合p.d.f. ③ $(X_{(i)},X_{(j)})$ $1\le i<j\le n$的联合p.d.f. ④ 极差的p.d.f.

有 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & other\end{cases}$

① $f_{X_{(i)}}(x)=\dfrac{n!}{(n-i)!(i-1)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i}I_{(0,1)}(x)$

② $f(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})=\begin{cases} n! & 0\le x_{(1)}<x_{(2)}<\cdots<x_{(n)}\le 1\\ 0 & other\end{cases}$

③ $f_{ij}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}x^{i-1}(y-x)^{j-i-1}(1-y)^{n-j} & 0<x<y<1\\ 0 & other\end{cases}$

④ $g_{1n}(z,v)=\begin{cases} n(n-1)v^{n-2} & 0<z<z+v<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ 则$g_R(r)=\int_0^{1-v}n(n-1)v^{n-2}dz=n(n-1)v^{n-2}(1-v)$

$f_R(r)=\int_0^{1-r}n(n-1)R r^{n-2}dx=(n-1)nr^{n-2}(1-r)$

联合：$f_{1,n}(x,y)=n(n-1)(y-x)^{n-2}$ $0<x<y<1$ 设$R=y-x$，$x=x$ 则$J=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $|J|=1$ 即$f(x,R)=n(n-1)R^{n-2}$ $0<x<1-R$ $R>0$.

指数族：定义：设$\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$是样本空间$\mathcal{X}$上的分布族，$\theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_k\}$，$\Theta$为参数空间，若其概率函数$f(x,\theta)$可表示为$f(x,\theta)=c(\theta)h(x)\exp\{\sum_{i=1}^{k}Q_i(\theta)T_i(x)\}$

则称$\mathcal{F}$为指数族，$k\in N_+$，$c(\theta)$，$h(x)>0$，$Q_i(\theta)$定义在Θ上，$T_i(x)$定义在$\mathcal{X}$上

非：支撑集与θ有关

例：1. 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本$X=(x_1,\cdots,x_n)$的分布族是指数族

$f(x;\mu,\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}$ 记$\theta=(\mu,\sigma^2)$，则$\Theta=\{\theta=(\mu,\sigma^2)\mid -\infty<\mu<\infty,\sigma^2>0\}$

则$f(x,\theta)=\underbrace{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}_{c(\theta)}\exp\{\underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{Q_1(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i}_{T_1(x)}\underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}}_{Q_2(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}_{T_2(x)}\}$ $h(x)\equiv 1$. 由定义知为指数族

2. 二项分布族是指数族

$p(x,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}=\binom{n}{x}(1-\theta)^n\exp\{x\ln\frac{\theta}{1-\theta}\}$

3. Poisson分布族是指数族

$p(x,\theta)=\dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}=\dfrac{e^{-\theta}}{x!}\exp\{x\ln\theta\}$

4. 均匀分布族$\{U(0,\theta):\theta>0\}$不是指数族

由指数族定义，支撑集$\{x:f(x,\theta)>0\}=\{x:h(x)>0\}$ ← 证非指数族：支撑集与参数有关

与θ无关，但$\{U(0,\theta):\theta>0\}$支撑集为$\{x:f(x,\theta)>0\}=(0,\theta)$与θ相关

故其非指数族

定义：若指数族有以下形式：$f(x\mid\eta)=c(\eta)h(x)\exp\{\sum_{i=1}^{k}\eta_iT_i(x)\}$ 称为指数族的自然形式，此时集合$\{\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k)^T:0<\int_{\mathcal{X}}h(x)\exp\{\sum_{i=1}^{k}\eta_iT_i(x)\}dx<\infty\}$

称为自然参数空间

令$\eta_i=Q_i(\theta)$ 解出$\theta=g(\eta)$代入$c(\theta)$即可

例：1. 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本$X=(x_1,\cdots,x_n)$的分布族表示为指数族的自然形式，并求出自然参数空间

由原例知：令$\theta=(\mu,\sigma^2)$ 有$f(x;\mu,\sigma^2)=\underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}_{C(\theta)}\exp\{\underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{Q_1(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i}_{T_1(x)}\underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}}_{Q_2(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}_{T_2(x)}\}$ $h(x)\equiv 1$

令$\varphi_1=Q_1(\theta)$，$\varphi_2=Q_2(\theta)$ 解得：$\sigma^2=-\frac{1}{2\varphi_2}$，$\frac{\mu}{\sigma^2}=-\frac{\varphi_1}{2\varphi_2}$ 再代$C(\theta)\Rightarrow c^*(\varphi)=(-\frac{\pi}{\varphi_2})^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{n\varphi_1^2}{4\varphi_2}}$，$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ 已为自然形式

自然参数空间：$\Theta^*=\{\varphi=(\varphi_1,\varphi_2):-\infty<\varphi_1<\infty,-\infty<\varphi_2<0\}$

充分统计量：定义：设X的分布族为$\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ Θ为参数空间，令$T=T(x)$为一个统计量，若在已知T的条件下，样本X的条件分布与参数θ无关，

则称$T(x)$为θ的充分统计量 → θ的充分统计量含θ无关 !!!

取联合p.d.f.

证充分：① 定义 $f=\frac{f_{联}}{f_T}$与θ无关

② 因子分解定理

不充分：① 与θ有关

② 因子分解找出充分$f(x)$不能用充分表示.

tip：1. 定义 $\Leftrightarrow$ $P(X=x\mid T=t)$不依赖于θ

2. 一个参数或参数向量θ的充分统计量不唯一

3. θ的充分统计量T(x)在一定意义下提炼了样本中关于θ的全部信息

4. 对统计模型$P_i=\{P_\theta:P_\theta\in\mathcal{F}_i\}$分布族$\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3$，若T对$P_2$为充分统计量，则对$P_1$是，对$P_3$不一定是

例：1. 设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为0-1分布中抽取的简单样本，则$T(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i$为充分统计量（这里θ为p 即$P(X_i=1)=\theta$）

记$T=T(X)$，只需证明条件概率与θ无关，当$\sum_{i=1}^{n}x_i=t_0$时有 $\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$ $(x_i\in\{0,1\})$

$P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid T=t_0)=\dfrac{P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n,T=t_0)}{P(T=t_0)}=\dfrac{P(X_1=x_1,\cdots,X_n=t_0-\sum_{i=1}^{n-1}x_i)}{P(T=t_0)}=\dfrac{\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}}{C_n^{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}}=(C_n^{t_0})^{-1}$ 则$P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid T=t_0)=\begin{cases}(C_n^{t_0})^{-1} & \sum_{i=1}^{n}x_i=t_0\\ 0 & \sum_{i=1}^{n}x_i\ne t_0\end{cases}$ 与θ无关，证毕

2. 设$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$ 其中$\sigma^2>0$已知，μ未知，$T(X)=X_1$，证明T非充分统计量

$(X_1,\cdots,X_n)$的条件密度为$f(x_1,\cdots,x_n\mid x_1)=\dfrac{f(x_1,\cdots,x_n)}{f_1(x_1)}=f(x_2,\cdots,x_n)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^{n-1}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(x_i-\theta)^2\}$与θ有关，证毕

因子分解定理：设样本$X=(X_1,\cdots,X_n)$的概率函数$f(x,\theta)$依赖于参数θ，$T=T(X)$是一个统计量，则T为充分统计量的充要条件是

$f(x,\theta)$可以分解为$f(x,\theta)=g(t(x),\theta)h(x)$的形式，注意$h(x)=h(x_1,\cdots,x_n)$不依赖于θ，$t(x)$为$T(x)$的观察值

推论：设$T=T(X)$为θ的充分统计量，$S=\varphi(T)$为单值可逆函数，则$S=\varphi(T)$也是θ的充分统计量

例：设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为$N(a,\sigma^2)$中抽取的简单样本，令$\theta=(a,\sigma^2)$ 则$(\bar{X},S^2)$为θ的充分统计量.

$f(x,\theta)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\}=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2a\sum_{i=1}^{n}x_i+na^2)\}=g(t(x),\theta)\cdot h(x)$ $(x=(\bar{x},s^2))$ $h(x)\equiv 0$. 证毕

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从总体 $B(1,\theta)$ 中抽取的简单样本，则 $T(X)=\sum_{i=1}^n X_i$ 是 θ 的充分统计量。

因 X i.i.d. $f(x,\theta)=P_\theta(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)=\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}=g(t(x),\theta)h(x)$，$h(x)\equiv 1$，证毕

完全统计量

定义：设 $T=T(X)$ 是统计量，其诱导的分布族为 $\mathcal{F}^T=\{g(t,\theta):\theta\in\Theta\}$。若对 $\forall t$ 的函数 $\varphi(t)=\varphi[t(x)]$ 的期望 $E_\theta[\varphi(t)]=0\ \forall\theta\in\Theta$ 可推出 $\varphi\equiv 0$，则称分布族 $\mathcal{F}^T$ 是完全的，$T(X)$ 为完全统计量

证完全：① 定义，$E_\theta[\varphi]=0\Rightarrow\varphi=0$

② $\operatorname{int}\Theta^*\neq\phi$

tip：1. $\varphi(t)\equiv 0$ 中的 t 只需考虑 $T(x)$ 的所有取值

2. 若 T 是完全的，对 $\forall$ 可测函数 ψ，有 $\psi(T)$ 是完全的。

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $B(1,\theta)$ 中抽取的简单样本，则 $T(X)=\sum_{i=1}^n X_i$ 是完全统计量

设 φ，用 $E[\varphi(T(x))]\Rightarrow\varphi(T(x))\equiv 0$.

注意到 $T(X)\sim B(n,\theta)$，则 $P_\theta(T(X)=k)=C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots,n$.

设 $\varphi(t)$ 为任一实函数，满足 $E_\theta[\varphi(t)]=0$，$0<\theta<1$，即 $\sum_{k=0}^n\varphi(k)C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k}=0\Leftrightarrow\sum_{k=0}^n\varphi(k)C_n^k(\frac{\theta}{1-\theta})^k=0$ $0<\theta<1$

令 $\delta:=\frac{\theta}{1-\theta}$，则上式为 $\sum_{k=0}^n(\varphi(k)C_n^k)\delta^k=0$ $0<\delta<\infty$ 这是关于 δ 的多项式，则一定有各系数为0：$C_n^k\varphi(k)=0$ 对 $k=0,1,\cdots,n$，$\Rightarrow\varphi(T)=0$. a.s. P_θ 证毕

例：设 $X\sim\mathcal{F}=\{N(0,\sigma^2):\sigma>0\}$. ① 证明 $\mathcal{F}$ 不完全. ② 令 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从总体 X 中抽取的简单样本，证明 $T(X)=\sum_{i=1}^n X_i^2$ 诱导的分布族是完全的，从而 T 完全

(1) 由于 $N(0,\sigma^2)$ 密度为偶函数，则 $\exists\varphi(x)=x$，$E_\theta[\varphi(x)]=0$ 但 $\varphi(x)\neq 0$. a.s. P 证毕

(2) 由 χ^2 变量定义知：$\frac{T_n}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^n(\frac{X_i}{\sigma})^2\sim\chi_n^2$ …… 1.1

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $U(0,\theta)$ 中抽取的简单样本，则 $T(X)=X_{(n)}$ 为完全统计量

$T(X)=X_{(n)}$ 的密度函数：$\underset{F(x)}{\overset{n-1个}{\longrightarrow}}\ \underset{f(x)}{\overset{余n个}{\downarrow}}$ $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x/\theta & 0<x\le\theta\\ 1 & x>\theta\end{cases}$ $f(x)=\frac{1}{\theta}$ $0<x\le\theta$ 则 $f(x_{(n)})=\begin{cases}\frac{n!}{(n-1)!}\cdot(\frac{x}{\theta})^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{others}\end{cases}$

设 $\varphi(t)$ 为 t 的任一实函数，满足 $E_\theta[\varphi(t)]=0$，即 $\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta\varphi(t)\cdot t^{n-1}dt=0$ 即 $\int_0^\theta\varphi(t)\cdot t^{n-1}dt=0$，对 θ 求导 $\Rightarrow\varphi(\theta)\theta^{n-1}=0$，即有 $\varphi(\theta)=0$ 对 $\forall\theta>0$.

即 $\varphi(t)=0$ $t>0$，即 $T(x)=X_{(n)}$ 为完全统计量，证毕

练习 设 $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\mu\in\mathbb{R}$ 未知，$\sigma^2>0$ 已知。证明：$T(\vec{X})=\sum_{i=1}^n X_i$ 是完全统计量。（参考【0】例2.7.2）.

若 μ 已知，则非完全统计量

有 $T(X)\sim N(n\mu,n\sigma^2)$ 为指数族分布

自然参数空间 $\mathbb{R}$ 为开集，是完全统计量.

指数族中统计量的完全性

定理：$X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的 p.d.f. 为 $f(x,\theta)=C(\theta)h(x)\exp\{\sum_{i=1}^k\theta_iT_i(x)\}$ $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta^*$ 为指数族自然形式，令 $T(X)=(T_1(X),\cdots,T_k(X))$

若自然参数空间 $\Theta^*\subset\mathbb{R}^k$ 是有内点的（存在开子集），则 $T(X)$ 为完全统计量

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $B(1,\theta)$ 中抽取的简单样本，则 $T(X)=\sum_{i=1}^n X_i$ 是完全统计量（同上节第一例）

$f(x,\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$（是联合分布，不是 $T(x)$ 的分布！不用加 C_n^k！）$=(1+e^{\ln\frac{\theta}{1-\theta}})^{-n}\exp\{\ln\frac{\theta}{1-\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i\}$

有自然参数空间为 $\Theta^*=\{\ln\frac{\theta}{1-\theta}:-\infty<\ln\frac{\theta}{1-\theta}<\infty\}=(-\infty,\infty)$ 有内点，由定理知 $T(x)$ 为完全统计量

有界完全统计量与性质

定义：对 $\forall$ 满足 $E_\theta[\varphi(T(x))]=0\ \forall\theta\in\Theta$ 的有界（a.s. 有界）函数 φ，有 $\varphi(T(x))=0$ a.s. $\forall\theta\in\Theta$，则称 $T(x)$ 为有界完全统计量（完全 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 有界完全）

Basu 定理：设 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ 为一分布族，Θ 为参数空间，$X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $\mathcal{F}$ 中抽取的简单样本，设 $T(x)$ 为有界完全统计量且为充分统计量

若随机变量 $V(X)$ 分布与 θ 无关，则对 $\forall\theta\in\Theta$，$T(x)$ 与 $V(X)$ 独立

推论：X 分布族为指数族，自然形式下的自然参数空间有内点，若 r.v.（random variable，随机变量）$V(X)$ 的分布与 θ 无关，则对 $\forall\theta\in\Theta$，$T(x)=(T_1(x),\cdots,T_k(x))$ 与 $V(X)$ 独立

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $N(\theta,1)$ 中抽取的简单样本，$R(X)=X_{(n)}-X_{(1)}$ 为极差，则 $T(x)=\bar{X}=\sum_{i=1}^n\frac{X_i}{n}$ 与 $R(X)$ 独立

有 $N(\theta,1)$ 为指数族，自然参数空间 $\Theta^*=\{\theta:-\infty<\theta<\infty\}$ 有内点，则 $T(X)$ 为充分完全统计量

充分：$f(x,\theta)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2\}=\underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{n\theta^2}{2}+\theta\cdot T(x)\}}_{g(T(x),\theta)}\cdot\underbrace{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\}}_{h(x)}$ 于是由因子分解定理知为充分统计量

完全：$f(x,\theta)=\underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}\theta^2}}_{C(\theta)}\cdot\exp\{\underset{Q_1(\theta)}{\theta}\cdot\underset{T_1(x)}{T(x)}\underset{Q_2(\theta)}{-\frac{1}{2}}\underset{T_2(x)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\}$ $h(x)\equiv 1$，则已为自然形式，θ 无限制，为完全统计量.

令 $Y_i=X_i-\theta$，则 $Y_i\sim N(0,1)$，则 $Y_1,\cdots,Y_n$ i.i.d. $\sim N(0,1)$ 于是 $Y_{(n)}-Y_{(1)}$ 分布与 θ 无关，又 $R(X)=X_{(n)}-X_{(1)}=Y_{(n)}-Y_{(1)}$ 与 θ 无关，由 Basu 定理知 $T(x)$ 与 $R(X)$ 独立

几个推论（期中用，内容与上下文无关）

1. $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$，则 $2\lambda\sum_{i=1}^n X_i\sim\chi_{2n}^2$ $(2\lambda X_1\sim\chi_2^2)$

⋮（略）

充分：定义（条件概率与 θ 无关），因子分解定理

注意：$f(x)=\prod f(x_i)$ 而不是类似 $(C_n^kp^k(1-p)^{n-k})$

点估计

定义：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从某总体 F_θ 中抽取的样本，$g(\theta)$ 为总体参数 θ 的实函数，用 $\hat{g}(X)$ 作为 $g(\theta)$ 的估计，称为点估计，此时称 $\hat{g}(X)$ 为 $g(\theta)$ 的估计量.

在一组具体样本值 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 下估计量的值称为 $g(\theta)$ 的估计值

矩估计

样本 k 阶原点矩：$a_{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ 样本 k 阶中心矩 $m_{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^k$

总体 〃 〃 $\nu_k=E[X-E[X]]^k$

矩估计用单个X的矩来算(总体)

定义：设有总体分布族 $\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$，$\Theta$ 为参数空间，$g(\theta)$ 为定义在 Θ 上参数 θ 的函数，可表示为总体分布的某些矩的函数，即 $g(\theta)=G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k;\mu_2,\cdots,\mu_s)$

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是上述分布族中抽取的简单样本，将 G 中 α_i 和 μ_j 分别用它们"自然"的矩估计量 a_{ni} 和 m_{nj} 代替，得 $\hat g(X)=G(a_{n1},\cdots,a_{nk};m_{n2},\cdots,m_{ns})$

则 $\hat g(X)$ 称为 $g(\theta)$ 的矩估计量，这种求矩估计量的方法称为矩法。

例：设总体 $X\sim B(1,\theta)$，$X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 X 中抽取的简单样本，求 $g_1(\theta)=\theta$ 与 $g_2(\theta)=\theta(1-\theta)$ 的矩估计量。

$X\sim B(1,\theta)\Rightarrow P(X=x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$ $x=0,1$. 则 $E[X]=\alpha_1=\theta$ 于是 $g_1(\theta)=\alpha_1$ 的矩估计量为 $\hat g_1(X_1,\cdots,X_n)=\bar X$ $\quad g_2(\theta)=\alpha_1(1-\alpha_1)$ 的矩估计量为 $\hat g(X_1,\cdots,X_n)=\bar X(1-\bar X)$

例：设总体 $X\sim U(\theta_1,\theta_2)$，$X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为总体 X 中抽取的简单样本，令 $\theta=(\theta_1,\theta_2)$，$-\infty<\theta_1<\theta_2<\infty$，求 θ_1,θ_2 的矩估计量

$X\sim U(\theta_1,\theta_2)\Rightarrow \left.\begin{array}{l}E[X]=\alpha_1=\frac12(\theta_1+\theta_2)\\ D(X)=\mu_2=\frac1{12}(\theta_2-\theta_1)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\theta_1=\alpha_1-\sqrt{3\mu_2}\\ \theta_2=\alpha_1+\sqrt{3\mu_2}\end{array}$ 于是用 $\bar X$ 与 m_{n2} 代入有 $\hat\theta_1(X_1,\cdots,X_n)=\bar X-\sqrt{3m_{n2}}=\bar X-\sqrt3 S_n$，$\hat\theta_2(\cdots)=\bar X+\sqrt3 S_n$ $\quad S_n=\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$

极大似然估计：定义：设 $f(x,\theta)=f(x_1,\cdots,x_n,\theta)$ 为样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的概率函数，当 x 固定时，把 $f(x,\theta)$ 视为 θ 的函数，称为似然函数，记为 $L(\theta,x)=f(x,\theta)$ $\theta\in\Theta$，$x\in\mathscr{X}$ （参数空间 样本空间）

MLE中 $L=f(x_1,\cdots)$ 联合p.d.f

即用 $x_1,\cdots,x_n$ 样本来估计

称 $\ell(\theta,x)=\ln L(\theta,x)$ 为对数似然函数

tip：似然函数与概率函数是同一表达式，但似然函数为关于参数 θ 的函数

定义：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从参数分布族 $\mathcal F=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 中抽取的简单样本，$L(\theta,x)$ 是似然函数，$\ell(\theta,x)=\ln L(\theta,x)$ 是对数似然函数，若存在统计量 $\hat\theta^*=\hat\theta^*(x)$ 有 $L(\hat\theta^*(x),x)=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta,x)$ $\forall x\in\mathscr X$ 或等价地 $\ell(\hat\theta^*(x),x)=\max_{\theta\in\Theta}\ell(\theta,x)$ 则称 $\hat\theta^*(x)$ 为 θ 的最大似然估计(MLE)。若待估函数为 $g(\theta)$，则定义 $g(\hat\theta^*)$ 为 $g(\theta)$ 的MLE.

tip：MLE有不变性：若 θ 的MLE为 $\hat\theta^*$，则 θ 的任一可测函数 $g(\theta)$ 的MLE为 $g(\hat\theta^*)$，正因如此，其被放入上述定义中。

求MLE：1. 定理(指数族)：设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. 服从有自然参数形式 $f(x|\eta)=C(\eta)h(x)\exp\{\sum_{i=1}^k\eta_iT_i(x)\}$ 的指数族总体，$\eta\in\Theta^*$，对其对数似然 $\ell(\eta)=n\ln C(\eta)+\sum_{j=1}^n\ln h(x_j)+\sum_{i=1}^k\eta_i\sum_{j=1}^nT_i(x_j)$

若有一阶导 $\frac{\partial\ell}{\partial\eta_i}(\eta)=0$ $i=1,\cdots,k$ 这个方程组的解 $\hat\eta^*$ 存在且是自然参数空间 Θ^* 的内点，则 $\hat\eta^*$ 是 η 的唯一的MLE.

2. 定义出发.

例：① 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从两点分布族 $\{B(1,p):0<p<1\}$ 中抽取的简单样本，求 p 与 $g(p)=p(1-p)$ 的MLE.

用定理

似然函数为 $L(p,x)=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$，则 $\ell(p,x)=\ln L(p,x)=(\sum_{i=1}^n x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^n x_i)\ln(1-p)$ 则令 $\frac{\partial\ell(p,x)}{\partial p}=\frac1p\sum_{i=1}^n x_i-\frac1{1-p}(n-\sum_{i=1}^n x_i)=0$

求解：$\hat p^*=\frac1n\sum_{i=1}^n x_i=\bar x$，由于 $B(1,p)$ 是指数族，当 $\bar x\neq0,1$ 时 $\hat p^*=\bar x$ 属于自然参数空间 $\Theta^*=(0,1)$ 的内点集，故 $\hat p^*$ 为 p 的MLE

替换为X

按定义 $\hat g^*(x)=\hat p^*(1-\hat p^*)=\bar x(1-\bar x)$

求出 $\frac{\partial\ell}{\partial p}=0$ 的 $x(\hat p^*)$

验证 $\left.\frac{\partial^2\ell}{\partial p^2}\right|_{p=\hat p^*}<0$. ☆

是指数族不需验证

tip：$\bar x=0,1$ 不在 $\Theta=(0,1)$ 内，严格来讲，此时 p 的MLE不存在，为克服缺陷，$\hat p^*\notin\Theta$ 时若 $\exists\{\hat p_i^*\}\to\hat p^*$ 且 $\hat p_i^*\in\Theta$，则 $\hat p^*$ 也称 p 的MLE，于是此题中0,1也认为是 p 的MLE

例：② 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是均匀分布族 $\{U(0,\theta]:\theta>0\}$ 中抽取的简单样本，求 θ 的MLE θ^*

用定义 样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac1{\theta^n} & 0<x_{(n)}\le\theta\\ 0 & \text{other}\end{cases}$ 其支撑集依赖 θ. $L(\theta,x)=f(x,\theta)$ 作为 θ 的函数不是连续函数，于是不能用定理求 θ 的MLE.

为使 $L(\theta,x)$ 达到极大，由 $L(\theta,x)$ 单调减可知应使 θ 尽可能小，当取 $\hat\theta^*=X_{(n)}$ 即为 θ 的MLE

tip：若为 $U(0,\theta)$，则上述 $\hat\theta^*$ 不存在，但由连续型r.v.取一点的P为0，因此可将该支撑集改为 $(0,\theta]$.

③ 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $\{U(\theta,\theta+1):-\infty<\theta<\infty\}$ 中抽取的简单样本，求 θ 的MLE.

按定义，θ 的似然函数为 $L(\theta,x)=\begin{cases}1 & \theta<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+1\\ 0 & \text{other}\end{cases}=\begin{cases}1 & x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}\\ 0 & \text{other}\end{cases}$ 于是对 $\forall 0\le\lambda\le1$，$\hat\theta^*(x)=\lambda X_{(1)}+(1-\lambda)(X_{(n)}-1)$ $\lambda\in[0,1]$ 都为 θ 的MLE

期中考试界限↑ 2025.10.28考试

Bayes估计 定义：参数空间 Θ 上 θ 的任一概率分布称为先验分布，记为 $F^\pi(\theta)$，在有密度的情形用 $\pi(\theta)$ 表示其密度函数

定义：在获得样本 x 后，θ 的后验分布就是给定 $X=x$ 条件下 θ 的条件分布，后验密度 $\pi(\theta|x)$ 有下列计算公式，$\pi(\theta|x)=\frac{f(x,\theta)}{m(x)}=\frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$.

其中 $f(x|\theta)$ 为给定 θ 时样本 x 的条件密度函数，$\pi(\theta)$ 为 θ 的先验密度，$f(x,\theta)=f(x|\theta)\pi(\theta)$ 为 x 与 θ 的联合密度，$m(x)=\int_\Theta\cdots$ 为 X 的边缘密度

定义：用后验分布的期望值作为 θ 的估计量称为 θ 的后验期望估计，我们本课程中称Bayes估计即特指后验期望估计，记为 $\hat\theta_B$

例：设 $X\sim N(\theta,\sigma^2)$，σ^2 已知，$x=(X_1,\cdots,X_n)$ 为总体 X 中抽取的简单样本，令 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 为 $N(\mu,\tau^2)$，其中 μ 与 τ^2 已知，求 θ 的后验分布 $\pi(\theta|x)$

给定 θ 时 X 的p.d.f.为 $f(x|\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac n2}\exp\{-\frac1{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2+n(\bar x-\theta)^2]\}\propto\exp\{-\frac{(\bar x-\theta)^2}{2\sigma_n^2}\}$ 其中 $\sigma_n^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

令 $A=\frac1{\sigma_n^2}+\frac1{\tau^2}$ $B=\frac{\bar x}{\sigma_n^2}+\frac{\mu}{\tau^2}$，$C=\frac{\bar x^2}{\sigma_n^2}+\frac{\mu^2}{\tau^2}$ 则有 $\pi(\theta|x)\propto f(x|\theta)\pi(\theta)\propto\exp\{-\frac12[\frac{(\bar x-\theta)^2}{2\sigma_n^2}+\frac{(\theta-\mu)^2}{\tau^2}]\}\propto\exp\{-\frac12[A\theta^2-2\theta B+C]\}$

$=\exp\{-\frac A2(\theta-\frac BA)^2-\frac12(C-\frac{B^2}A)\}$

$=\exp\{-\frac1{2\eta_n^2}(\theta-\mu_n(x))^2\}\exp\{-\frac{(\bar x-\mu)^2}{2(\sigma_n^2+\tau^2)}\}$

$\propto\exp\{-\frac1{2\eta_n^2}(\theta-\mu_n(x))^2\}$

是 $N(\mu_n(x),\eta_n^2)$ 密度的核，添加正则化因子.

其中 $\mu_n(x)=\frac BA=\frac{\sigma_n^2\mu+\tau^2\bar x}{\sigma_n^2+\tau^2}$

$\eta_n^2=\frac1A=\frac{\sigma_n^2\tau^2}{\sigma_n^2+\tau^2}$

$C-\frac{B^2}A=\frac{(\bar x-\mu)^2}{\sigma_n^2+\tau^2}$

得到后验密度为

$\pi(\theta|x)=\frac1{\sqrt{2\pi}\eta_n}\exp\{-\frac1{2\eta_n^2}(\theta-\mu_n(x))^2\}$

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从正态分布总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，其中 σ^2 已知，取 θ 的先验为共轭先验分布 $N(\mu,\tau^2)$，求 θ 的Bayes估计

由上例知 θ 的后验分布，$N(\mu_n(x),\eta_n^2)$，由于其对称，故 $\hat\theta_B=\mu_n(x)$

定义：设 $\mathcal F$ 表示由 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 构成的分布族，若对 $\forall\pi\in\mathcal F$，有 $\pi(\theta|x)\in\mathcal F$，则称 $\mathcal F$ 为一个共轭先验分布族

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从总体 $\Gamma(r,\lambda)$ 中抽取的简单样本，其中 r 已知，假定 λ 的先验分布为Gamma分布 $\Gamma(b,a)$，证明给定 X 时 λ 的后验分布仍为Gamma分布

证明：给定 λ 时 X 的条件密度为 $f(x|\lambda)=\frac{\lambda^{nr}}{[\Gamma(r)]^n}\prod_{i=1}^n x_i^{r-1}\exp\{-\lambda n\bar x\}\propto\lambda^{nr}\exp\{-\lambda n\bar x\}$ 其中 $\bar x=\frac1n\sum_{i=1}^n x_i$

而 λ 先验分布为 $\pi(\lambda)=\frac{a^b}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}\exp\{-a\lambda\}\propto\underline{\lambda^{b-1}\exp\{-a\lambda\}}$ 核(与 λ 有关的全部项)

于是 $\pi(\lambda|x)\propto f(x|\lambda)\pi(\lambda)\propto\lambda^{nr+b-1}\exp\{-(a+n\bar x)\lambda\}$ $\lambda>0$. 这是 $\Gamma(nr+b,a+n\bar x)$ 的密度的核.

加入正则化常数因子，有后验密度为 $\pi(\lambda|x)=\frac{(a+n\bar x)^{nr+b}}{\Gamma(nr+b)}\lambda^{nr+b-1}\exp\{-(a+n\bar x)\lambda\}$ $\lambda>0$ 证毕

例：设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d $\sim B(1,\theta)$ $\theta\in(0,1)$ 未知 求下面情形下的 θ 后验分布与 Bayes 估计：

(i) $\theta\sim U(0,1)$ (ii) $\theta\sim Beta(a,b)$ $a,b>0$ 已知.

用整体的 f（联合）!!!

(i). $\pi(\theta)=1$. $f(x|\theta)=\theta^k(1-\theta)^{n-k}$ k 为取 1 次数.

则 $\pi(\theta|x)\propto\theta^k(1-\theta)^{n-k}$ 为 $Beta(k+1,n-k+1)$ 的核 ⇒ 后验分布为 $Beta(k+1,n-k+1)$. Bayes 估计为 $\hat\theta_B=\frac{a}{a+b}=\frac{k+1}{n+2}$

(ii). $\pi(\theta)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$ $f(x|\theta)=\theta^k(1-\theta)^{n-k}$

则 $\pi(\theta|x)\propto\theta^{k+a-1}(1-\theta)^{n-k+b-1}$ 为 $Beta(k+a,n-k+b)$ 的核 ⇒ 后验分布为 $Beta(k+a,n-k+b)$. Bayes 估计为 $\hat\theta_B=\frac{k+a}{n+a+b}$

Bayes 正则：对 θ 积分.

例：设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim P(\lambda)$, 证明 λ 的共轭先验分布族为 Gamma 分布族

$f(x|\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$ 设 $\lambda\sim Gamma(\alpha,\beta)$ 即 $\pi(\lambda)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$ 核相同. 显然.

例：设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$ 令 $\xi=\frac{1}{\sigma^2}$ (i) 若 μ 已知, σ^2 未知, 设 ξ 的先验分布 $\xi\sim Gamma(\alpha,\beta)$, 求 ξ 的后验分布与 Bayes 估计

(ii) 若 $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$ 未知, μ,ξ 独立, 先验分布为 $\mu\sim N(\mu_0,\tau^2)$, $\xi\sim Gamma(\alpha,\beta)$. 求 (μ,ξ) 的后验分布

(i) $f(x|\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\sigma)^2\}$ 代入有 $f(x|\xi)\propto\xi^{\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{\xi}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\}$ $\pi(\xi)\propto\xi^{\alpha-1}e^{-\beta\xi}$

离散情形下. 后验分布的计算公式就是 Bayes 公式

例 1.6.12 通过血液可以帮助说明一个人是否患有某种疾病, 化验结果为阳性 (以 $X=1$ 表示) 或者为阴性 (以 $X=0$ 表示). 令 θ_1 表示状态有病, θ_2 表示状态无病, 记 $\mathbb{P}(X=x|\theta)=p(x|\theta)$, 则有 $p(1|\theta_1)=0.8$, $p(0|\theta_1)=0.2$, $p(1|\theta_2)=0.1$, $p(0|\theta_2)=0.9$. 设先验信息为 $\pi(\theta_1)=0.05$, $\pi(\theta_2)=0.95$, 此即该地区患病和不患病的比例. 求 X 的边缘分布和 θ 的后验分布.

解 按公式 $m(x)=\sum_{i=1}^{2}p(x|\theta_i)\pi(\theta_i)$ 算得 X 的边缘分布如下:

$$m(1)=p(1|\theta_1)\pi(\theta_1)+p(1|\theta_2)\pi(\theta_2)=0.8\times0.05+0.1\times0.95=0.135;$$
$$m(0)=p(0|\theta_1)\pi(\theta_1)+p(0|\theta_2)\pi(\theta_2)=0.2\times0.05+0.9\times0.95=0.865.$$

按公式 $\pi(\theta|x)=\frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{m(x)}$, 算得 θ 的后验分布如下:

$$\pi(\theta_1|x=1)=\frac{p(1|\theta_1)\pi(\theta_1)}{m(1)}=\frac{0.8\times0.05}{0.135}=0.296;$$
$$\pi(\theta_2|x=1)=\frac{p(1|\theta_2)\pi(\theta_2)}{m(1)}=\frac{0.1\times0.95}{0.135}=0.704;$$
$$\pi(\theta_1|x=0)=\frac{p(0|\theta_1)\pi(\theta_1)}{m(0)}=\frac{0.2\times0.05}{0.865}=0.012;$$
$$\pi(\theta_2|x=0)=\frac{p(0|\theta_2)\pi(\theta_2)}{m(0)}=\frac{0.9\times0.95}{0.865}=0.988,$$

其中 $m(1)$ 和 $m(0)$ 分别为根据化验结果预测为阳性和阴性的比例. 即使验血结果为阳性 ($X=1$), 也只有 29.6% (不到 1/3) 的可能性有病, 上述计算结果提示我们初始验血者有 13.5% 为阳性者要做更精细复杂的检查, 以便确诊是否患有癌症. □

均方误差 定义：设 $\hat g(x)$ 为 $g(\theta)$ 的估计量, 则称 $E_\theta[\hat g(x)-g(\theta)]^2$ 为 $\hat g(x)$ 的均方误差.

设 $\hat g_1(x)$ 与 $\hat g_2(x)$ 为 $g(\theta)$ 的两不同估计量. 若 $E_\theta[\hat g_1(x)-g(\theta)]^2\le E_\theta[\hat g_2(x)-g(\theta)]^2$ $\forall\theta\in\Theta$ 且不等号至少对某 θ 成立. 则称在 MSE 准则下 $\hat g_1(x)$ 优于 $\hat g_2(x)$

定义：$Bias_\theta(\hat\theta)=E_\theta[\hat\theta]-\theta$ 为 θ 的估计量 $\hat\theta$ 的偏差

有公式 $MSE(\hat\theta)=[Bias_\theta(\hat\theta)]^2+Var_\theta(\hat\theta)$

$MSE=Bias^2+Var$

定义：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 F_θ 中抽取的样本. $g(\theta)$ 是定义于参数空间 Θ 上的已知函数. $\hat g(x)=\hat g(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量. 若 $E_\theta[\hat g(x)]=g(\theta)$ $\theta\in\Theta$ 则称 $\hat g(x)$ 为 $g(\theta)$ 的一个无偏估计。记 $\hat g(x)=\hat g_n(x)$. 若 $E_\theta[\hat g_n(x)]\ne g(\theta)$ 但 $\lim_{n\to\infty}E_\theta[\hat g_n(x)]=g(\theta)$ $\theta\in\Theta$ 则称 $\hat g_n(x)$ 为 $g(\theta)$ 的一个渐近无偏估计

例：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自 E 为 μ, D 为 σ^2 的总体的一个样本. 显然 $\bar X$ 是 μ 的无偏估计. 证明 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2$ 是 σ^2 的无偏估计

$E[S^2]=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^nE[X_i^2]-nE[\bar X^2])=\frac{n}{n-1}(E[X_i^2]-E[\bar X^2])=\frac{n}{n-1}(\sigma^2+\mu^2-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2))=\sigma^2$ 证毕, S^2 为 σ^2 的无偏估计.

例：(3.4.1) 设样本 $X\sim B(n,p)$ n 已知. p 未知. 令 $g(p)=\frac{1}{p}$ 则 $g(p)$ 的无偏估计不存在

反证：若 $g(p)$ 有无偏估计 $\hat g(x)$. 由于 x 只取 $0,1,\cdots,n$ 这些值. 令 $\hat g(i)=a_i$ 是无

由 $\hat g(x)$ 的无偏性. $E_p[\hat g(x)]=\sum_{i=0}^na_iC_n^ip^i(1-p)^{n-i}=\frac{1}{p}$ $0<p<1$ 即 $\sum_{i=0}^na_iC_n^ip^{i+1}(1-p)^{n-i}-1=0$ $0<p<1$ 左为 $n+1$ 次多项式, 至多有 $n+1$ 根, 不可能对 $\forall p\in(0,1)$ 成立, 矛盾!

定义：设 $F=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 是一个参数分布族, 其中 Θ 为参数空间, $g(\theta)$ 为定义在 Θ 上的可估函数. 设 $\hat g^*(x)=\hat g^*(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $g(\theta)$ 的一个无偏估计 若对 $g(\theta)$ 的任一无偏估计 $\hat g(x)=\hat g(x_1,\cdots,x_n)$ 都有 $Var_\theta(\hat g^*(x))\le Var_\theta(\hat g(x))$ $\forall\theta\in\Theta$ 则称 $\hat g^*(x)$ 为 $g(\theta)$ 的一致最小方差无偏估计 (UMVUE)

计算 UMVUE 方法一. Cramér-Rao 不等式.

定义：C-R 正则分布族. C-R 正则条件

若单参数概率函数族 $F=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 满足下列条件

(1) 参数空间 Θ 是直线上的某开区间

(2) $\forall x\in X$. $\theta\in\Theta$. $f(x,\theta)>0$.

(3) $\forall x\in X$. $\theta\in\Theta$. $\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}$ 存在.

(4) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x,\theta)dx=\int\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)dx$ (若 x 离散. 为无穷级数与微分可交换)

(5) 下面期望存在. 且 $0<I(\theta)=E_\theta[(\frac{\partial\ln f(x,\theta)}{\partial\theta})^2]<\infty$ ⟺ $-E[\frac{\partial^2\ln f}{\partial\lambda^2}]$ 若正则.

则称该分布族为 C-R 正则分布族. (1)-(5) 称正则条件. $I(\theta)$ 称该分布的 Fisher 信息量.

定理：设 $F=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 为 C-R 正则分布族. $g(\theta)$ 是定义于 Θ 上的可微函数. X 为 F 中抽取简单样本. $\hat g(x)$ 为 $g(\theta)$ 一无偏估计.

有 $Var_\theta(\hat g(\theta))\ge\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$ $\forall\theta\in\Theta$ 为 Cramér-Rao 不等式 (C-R 不等式)

(对指数族. (1)-(4) 均成立. 可直接用 C-R 不等式)

tip：若 $Var_\theta(\hat g(x))$ 达不到 C-R 下界. 不能说明不存在 UMVUE, 只能说明此法失效. 存在 $\hat g^*(\theta)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE 但其方差 > C-R 下界的例子

若 $\hat g(\theta)$ 此无偏估计取到 C-R 不等式的等号. 则 $\hat g(\theta)$ 一定是 $g(\theta)$ 的 UMVUE.

C-R 下界：$\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$

$I(\theta)=-E[\frac{\partial^2\ln f}{\partial\lambda^2}]$ 也 $=E[(\frac{\partial\ln f}{\partial\lambda})^2]$

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为两点分布 $B(1,p)$ 中抽取的简单样本. 用 C-R 不等式证明 $\bar X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i$ 为 p 的 UMVUE

待估计量 $g(p)=p$

3.5.1 设随机变量 $X\sim B(1,p)$ 则 $f(x,p)=p^x(1-p)^{1-x}$ $x=0,1$ 由两点分布族为指数族. C-R 正则条件成立.

Fisher 信息量为 $I(p)=E_p[\frac{\partial\ln f(x,p)}{\partial p}]^2=E_p[\frac{x-p}{p(1-p)}]^2=\frac{Var_p(x)}{p^2(1-p)^2}=\frac{1}{p(1-p)}$ 于是其 C-R 下界为 $\frac{1}{nI(p)}=\frac{p(1-p)}{n}$

又 $\bar X$ 为 p 无偏估计. $Var_p(\bar X)=\frac{p(1-p)}{n}$ 达到 C-R 下界. 故 $\bar X$ 为 p 的 UMVUE.

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单样本. 用 C-R 不等式证明 $\bar X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i$ 为 λ 的 UMVUE

3.5.2 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$. 其概率分布为 $f(x,\lambda)=\frac{\lambda^xe^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,\cdots$ $\lambda>0$. 为指数族. C-R 正则条件成立.

Fisher 信息量为 $I(\lambda)=E_p[\frac{\partial\ln f(x,\lambda)}{\partial\lambda}]^2=E_p[(\frac{x-\lambda}{\lambda})^2]=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda=\frac{1}{\lambda}$ 于是其 C-R 下界为 $\frac{1}{nI(p)}=\frac{\lambda}{n}$

UMVUE 首先要无偏

又 $\hat g(x)=\bar x$ 为 $g(\lambda)=\lambda$ 的无偏估计. $Var_\lambda(\bar X)=\frac{\lambda}{n}$ 达到 C-R 下界. 故 $\bar X$ 为 λ 的 UMVUE

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为指数分布 $Exp(\lambda)$ 中抽取的简单样本，用C-R不等式证明 $\hat{g}(x)=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的UMVUE

3.5.3

指数分布为指数族，则C-R正则条件成立。Fisher信息函数为 $I(\lambda)=E_\lambda\left[\frac{\partial \ln f(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]^2=E_\lambda[(x-\frac{1}{\lambda})^2]=Var_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda^2}$

于是C-R下界为 $\frac{(g'(\lambda))^2}{nI(\lambda)}=\frac{1}{n\lambda^2}$ 又 $\hat{g}(x)=\bar{x}$ 为 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计，$Var_\lambda(\bar{X})=\frac{1}{n\lambda^2}$ 达到C-R下界，故 $\bar{X}$ 为 $\frac{1}{\lambda}$ 的UMVUE

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，其中 σ^2 已知。用C-R不等式证明 $\hat{g}(x)=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为 $g(\mu)=\mu$ 的UMVUE

3.5.4

正态分布为指数族，C-R正则条件皆成立，有 $f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$ 于是Fisher信息函数为 $I(\mu)=E_\mu\left[\frac{\partial \ln f(x,\mu)}{\partial\mu}\right]^2=E_\mu\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right]=\frac{1}{\sigma^4}Var_\mu(x)=\frac{1}{\sigma^2}$

于是其C-R下界为 $\frac{1}{nI(\mu)}=\frac{\sigma^2}{n}$，$Var_\mu(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ 达到C-R下界，故 $\bar{X}$ 为 μ 的UMVUE

> Corollary (2.3)
>
> 在定理2.1 条件下，如果 $W(\vec{X})$ 是 $\tau(\theta)$ 的一个无偏估计，则 W 是 $\tau(\theta)$ 的 UMVUE 如果∃ 函数 $a(\theta)$，s.t.
>
> $a(\theta)(W(\vec{X})-\tau(\theta))=\frac{\partial}{\partial\theta}\log\mathcal{L}(\theta|\vec{X})$.
>
> 这里，$\mathcal{L}(\theta|\vec{X})=f(\vec{X}|\theta)$ 为样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的似然函数。

C-R不等式等号成立条件

结论：(1) 若样本分布族非指数族，则 $\forall g(\theta)$ 的 $\forall$ 无偏估计 $\hat{g}(\theta)$，其方差不能处处 ($\forall\theta\in\Theta$) 达到C-R不等式中的下界

用于证明是否能达到C-R下界，

(2) 即使样本分布族为指数族，也只有当 $\boxed{g(\theta)=E_\theta(aT(x)+b)\text{ 即 }\hat{g}(x)=aT(x)+b}$ 时才能达到C-R下界。（注意 $T(x)$：$f(x,\theta)=C(\theta)h(x)\exp\{Q(\theta)T(x)\}$）

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为Poisson分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单样本，证明只有 $g(\lambda)$ 为 λ 的线性函数时才存在 $g(\lambda)$ 的无偏估计，其方差能处处达到C-R下界

3.5.5

因样本X的概率分布 $f(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x_1+\cdots+x_n}e^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$ 是否为指数族形式 $f(x,\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\exp\{n\bar{x}\ln\lambda\}}{x_1!\cdots x_n!}=C(\lambda)h(x)\exp\{Q(\lambda)T(x)\}$

由等号成立的结论，当 $g(\lambda)=E[aT(x)+b]=a\cdot n\lambda+b=c\lambda+b$ c,b 为常数时 $\hat{g}(x)=aT(x)+b$ 方差处处达C-R下界，为 $g(\lambda)$ 的UMVUE.（$a=\frac{1}{n}$, $b=0$ 时 $\hat{g}(x)=\bar{x}$，与3.5.2结论相同）

有效性

定义：设 $\hat{g}_1(x)=\hat{g}_1(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\hat{g}_2(x)=\hat{g}_2(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $g(\theta)$ 的两不同无偏估计量，若 $Var_\theta(\hat{g}_1(x))\le Var_\theta(\hat{g}_2(x))$ $\forall\theta\in\Theta$ 且至少存在一个 $\theta\in\Theta$ s.t. 不等号成立，

则称估计量 $\hat{g}_1(x)$ 比 $\hat{g}_2(x)$ 有效

定义：设 $\hat{g}_n(x)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，比值 $e_{\hat{g}_n}(\theta)=\frac{[g'(\theta)]^2/(nI(\theta))}{Var_\theta[\hat{g}_n(x)]}$ 称为无偏估计 $\hat{g}_n(x)$ 的效率，显然 $0<e_{\hat{g}_n}(\theta)\le 1$。（有效估计一定是UMVUE）

当 $e_{\hat{g}_n}(\theta)=1$ 时，称 $\hat{g}_n(x)$ 为 $g(\theta)$ 的有效估计；若 $\hat{g}_n(x)$ 不是 $g(\theta)$ 的有效估计，但 $\lim_{n\to\infty}e_{\hat{g}_n}(\theta)=1$，则称 $\hat{g}_n(x)$ 为 $g(\theta)$ 的渐近有效估计

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $N(a,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，① a 未知时，证明样本方差 S^2 不是 σ^2 的有效估计，但是是渐近有效估计。② a 已知时，求 σ^2 的有效估计

① 已知 a 未知时 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 的方差为 $\frac{2\sigma^4}{n-1}$，不是C-R下界 $\frac{2\sigma^4}{n}$，非有效估计。效率为 $e_{S^2}(\sigma^2)=\frac{n-1}{n}<1$ 但 $\lim_{n\to\infty}e_{S^2}(\sigma^2)=1$，得证

② 令 $S_a^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$，有 $nS_a^2/\sigma^2\sim\chi^2_n$，故 $Var(nS_a^2/\sigma^2)=2n$，即 $Var(S_a^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$ 为有效估计，故有效估计为 S_a^2。

方法二：零无偏估计法

只充分，用零无偏

定理（R-B引理）：设 $T=T(x)$ 是一充分统计量，而 $\hat{g}(x)$ 为 $g(\theta)$ 的一个无偏估计，则 $h(T)=E[\hat{g}(x)|T]$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，且 $Var_\theta(h(T))\le Var_\theta[\hat{g}(x)]$ $\forall\theta\in\Theta$

等号成立当且仅当 $P_\theta(\hat{g}(x)=h(T))=1$ 即 $\hat{g}(x)=h(T)$ a.s. P_θ 成立（表明UMVUE一定是充分统计量的函数）

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是两点分布族 $\{B(1,p):0<p<1\}$ 中抽取的简单样本，显然 X_1 是 p 的一个无偏估计，$T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是 p 的充分统计量，用 $T=T(x)$ 构造一个比 X_1 方差更小的无偏估计

由R-B引理，有无偏估计 $h(t)=E[X_1|T=t]=\frac{P(X_1=1,T=t)}{P(T=t)}=\frac{pC_{n-1}^{t-1}p^{t-1}(1-p)^{n-t}}{C_n^tp^t(1-p)^{n-t}}=\frac{t}{n}=\bar{x}$ 其方差为 $\frac{p(1-p)}{n}$ 好于 $p(1-p)$，满足条件.

定理：设 $\hat{g}(x)$ 是 $g(\theta)$ 的一个无偏估计，$Var_\theta(\hat{g}(x))<\infty$ $\forall\theta\in\Theta$，令 $\mathcal{U}=\{U(x)|E_\theta[U(x)]=0\ \forall\theta\in\Theta\}$ 为零无偏估计的集合，则 $\hat{g}(x)$ 为 $g(\theta)$ 的UMVUE $\Leftrightarrow E_\theta[\hat{g}(x)\cdot U(x)]=0$ $\forall\theta, U$

T为充分统计量

推论：设 $T=T(x)$ 为 θ 的充分统计量，$h(T)=h(T(x))$ 是 $g(\theta)$ 的一个方差有限的无偏估计，$h(T)$ 为 $g(\theta)$ 的UMVUE $\Leftrightarrow E_\theta[h(T)\cdot\delta(T)]=0$，其中 $\delta(T)\in\mathcal{U}(T)$ 为关于T的零无偏估计集合

☆

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为指数分布 $f(x)=e^{-(x-\mu)}I_{\{x>\mu\}}$ 中抽取的简单样本，用零无偏估计法求参数 μ 的UMVUE.

零无偏法：① 找T充分

3.4.4

注意到 $T=X_{(1)}$ 为 μ 的充分统计量，$f_{X_{(1)}}(t)=ne^{-n(t-\mu)}I_{(\mu,+\infty)}$，则只需考虑基于T的估计量，$h(T)=T-\frac{1}{n}$ 为 μ 的一个无偏估计.

② 找 $\delta(T)$ 零无偏

设 $\delta(T)$ 为任一零无偏估计，有 $E_\mu[\delta(T)]=\int_\mu^{\infty}\delta(t)\cdot ne^{-n(t-\mu)}dt=0\Leftrightarrow\int_\mu^{\infty}\delta(t)e^{-nt}dt=0$. 对 μ 求导：$\delta(\mu)e^{-n\mu}=0$ 则 $\delta(\mu)=0$.

③ 令 $E[h(T)\cdot\delta(T)]=0$

于是 $E_\mu[h(T)\cdot\delta(T)]=0$ 则 $h(T)$ 为 μ 的UMVUE

其中 $h(T)$ 为无偏

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为均匀分布 $U(0,\theta)$，$\theta\in[1,\infty)$ 中抽取的简单样本，用零无偏估计法求参数 θ 的UMVUE.

④ 求出 $h(T)$，即为UMVUE

3.4.5

已知 $T=X_{(n)}$ 为 θ 的充分统计量，有 $f_{X_{(n)}}(t)=n\theta^{-n}t^{n-1}I_{(0,\theta)}$，设 $\delta(T)$ 为任一零无偏估计，有 $E_\theta[\delta(T)]=\left(\int_0^1+\int_1^\theta\right)\delta(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0$，$\theta\ge1$ 即 $\left(\int_0^1+\int_1^\theta\right)\delta(t)t^{n-1}dt=0$

对 θ 求导：$\delta(\theta)\theta^{n-1}=0$ $\forall\theta\ge1$，则 $\delta(t)=0$ $\forall t\ge1$ 于是有 $\int_0^1\delta(t)t^{n-1}dt=0$

设 $h(T)$ 是 θ 的一个无偏估计，为满足 $E_\theta[h(T)\cdot\delta(T)]=0$，有 $0=E_\theta[h(T)\cdot\delta(T)]=\int_0^1\delta(t)h(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt\Leftrightarrow\int_0^1\delta(t)h(t)t^{n-1}dt=0$.

考虑 $h(t)=\begin{cases}c & 0\le t<1\\ bt & t\ge1\end{cases}$ 由 $h(T)$ 为 θ 无偏估计，代入有 $h(T)=\begin{cases}1 & 0\le T<1\\ \frac{n+1}{n}T & T\ge1\end{cases}$ 为 θ 的UMVUE

方法三：充分完全统计量法——LS定理

充完法：1° ① 找到充完 ② 无偏求出 $h(T)$

定理（Lehmann-Scheffe）：T是θ充分完全统计量，$h(T)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，则 $h(T)$ 是 $g(\theta)$ 的唯一UMVUE. → 有若W为 $g(\theta)$ 的一无偏估计量，则 $\varphi(T)=E[W|T]$ 为 $g(\theta)$ 的UMVUE. ……☆

例：已知 $T=T(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从二项分布 $B(n,p)$，且 $T(x)$ 为充分完全统计量，求 $g(p)=p(1-p)$ 的UMVUE.

3.4.7.

设 $\delta(T)$ 为 $g(p)=p(1-p)$ 的一个无偏估计，由 $T\sim B(n,p)$ 与无偏估计的定义可得 $\sum_{t=0}^{n}C_n^t\delta(t)p^t(1-p)^{n-t}=p(1-p)$ $\forall 0<p<1$.

2° ① 找到无偏 φ（不一定为T函数）

令 $\rho=\frac{p}{1-p}\Rightarrow p=\frac{\rho}{1+\rho}$ $1-p=\frac{1}{1+\rho}$ 代入有 $\sum_{t=0}^{n}C_n^t\delta(t)\rho^t=\rho(1+\rho)^{n-2}=\sum_{t=0}^{n-2}C_{n-2}^t\rho^{t+1}=\sum_{t=1}^{n-1}C_{n-2}^{t-1}\rho^t$ $\forall 0<\rho<\infty$.

② $h(T)=E(\varphi(x)|T=t)$

对比系数有 $\delta(t)=0$ as $t=0,n$

$=\frac{C_{n-2}^{t-1}}{C_n^t}=\frac{t(n-t)}{n(n-1)}$ as $t=1,\cdots,n-1$ $\Big\}$ $\delta(T)=\frac{T(n-T)}{n(n-1)}$ $T=0,1,\cdots,n$. 由L-S定理知其为 $g(p)$ 的UMVUE.

若UMVUE为T线性函数则能达到C-R下界

由定义另解：令 $\varphi(X)=I\{X_1=1,X_2=0\}\Rightarrow E[\varphi(X)]=p(1-p)$ 即 $\varphi(X)$ 为 $g(p)$ 的无偏估计

有 $h(t)=E[\varphi(X)|T=t]=P(X_1=1,X_2=0|T=t)=\frac{P(\sum_{i=3}^{n}X_i=t-1)}{P(T=t)}=\frac{C_{n-2}^{t-1}}{C_n^t}=\frac{t(n-t)}{n(n-1)}$ 则 $h(T)$ 为 $g(p)$ 的UMVUE.

设 $h(T)$ 无偏

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为Poisson分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单样本，求下面的UMVUE：① $g_1(\lambda)=\lambda$ ② $g_2(\lambda)=\lambda^r$ $r\in N^+$ ③ $g_3(\lambda)=P_\lambda(X_1=x)$

则方程解出 $h(T)$ 即可 3.4.8

由原来知设有 $T=T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为充分完全统计量

① 令 $h_1(T)=\frac{T}{n}$. $E[h_1(T)]=E[\bar{X}]=\lambda$ 则 $h_1(T)$ 为T的函数且为λ的无偏估计. 由L-S定理知 $h_1(T)$ 为 $g_1(\lambda)$ 的UMVUE.

② 有 $T\sim P(n\lambda)$. 令 $h_2(T)$ 为 $g_2(\lambda)=\lambda^r$ 的无偏估计. 则 $E_\lambda[h_2(T)]=g_2(\lambda) \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty}h_2(t)\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!}=\lambda^r \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty}h_2(t)\frac{n^t\lambda^t}{t!}=\lambda^r e^{n\lambda}=\lambda^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\lambda)^k}{k!}=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{n^{k-r}\lambda^k}{(k-r)!}$

比较系数有 $h_2(t)=\begin{cases}\frac{t!}{(t-r)!n^r} & t\ge r\\ 0 & t<r\end{cases}$ 即 $h_2(T)=\frac{T(T-1)\cdots(T-r+1)}{n^r}$ $T=0,1,\dots$ 为 λ^r 的无偏估计. 由 L-S 定理知 $h_2(T)$ 为 $g_2(\lambda)$ 的 UMVUE.

先找无偏 W. $h(T)=E[W|T]$ 即可

③ 有 $P_\lambda(X_1=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=g_3(\lambda)$ 令 $\varphi(X_1)=I\{X_1=x\}$ 有 $E[\varphi(X_1)]=P_\lambda(X_1=x)$ 即 $\varphi(X_1)$ 为 $g_3(\lambda)$ 的无偏估计

有 $h_3(T)=E[\varphi(X_1)|T=t]=P_\lambda(X_1=x|T=t)=\frac{P_\lambda(X_1=x)P_\lambda(X_2+\cdots+X_n=t-x)}{P_\lambda(X_1+\cdots+X_n=t)}=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\cdot\frac{e^{-(n-1)\lambda}((n-1)\lambda)^{t-x}}{(t-x)!}}{\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!}}=\frac{(n-1)^{t-x}t!}{n^t(t-x)!x!}=C_t^x(\frac{1}{n})^x(1-\frac{1}{n})^{t-x}$ $t\ge x$

由 L-S 定理知 $h_3(T)=C_T^x(\frac{1}{n})^x(1-\frac{1}{n})^{T-x}$ $T\ge x$ 为 $g_3(\lambda)$ 的 UMVUE

条件不变. (1) 验证 $\hat\lambda=\bar X$ 与 $\hat\lambda^*=S^2$ 均为 λ 的无偏估计 $E[X_i^2]-E^2[X_i]=\lambda$

(2) 计算 $Var(\hat\lambda)$ 与 $Var(\hat\lambda^*)$, 说明在均方误差 MSE 意义下哪个估计更优.

(3) $\hat\lambda$ 是否为 λ 的 UMVUE? $E[X_i^2-2X_i\bar X+\bar X^2]$ 有 $E[X_i^2]=E^2[X_i]+Var(X_i)=\lambda^2+\lambda$. $E[\bar X^2]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E[X_i^2]+\frac{1}{n^2}\sum_{1\le j<k\le n}E[X_j]E[X_k]=\frac{n+1}{n}\lambda^2$

(1) $E[\hat\lambda]=\frac{1}{n}E[\sum_{i=1}^n X_i]=E[X_1]=\lambda$. 有 $E[\hat\lambda^*]=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2]=\frac{1}{n-1}(n\cdot(1-\frac{1}{n})\lambda)=\lambda$ 证毕 $E[X_i\bar X]=\frac{1}{n}E[X_i^2]+\frac{1}{n}\sum_{j=1, j\ne i}^{n}E[X_i]E[X_j]=\frac{\lambda}{n}+\lambda^2$

(2). 有 $Bias(\hat\lambda)=Bias(\hat\lambda^*)=0$. $MSE(\hat\lambda)=Var(\hat\lambda)=Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n}Var(X_1)=\frac{\lambda}{n}$. $Var(S^2)=\frac{\lambda}{n}+\frac{2\lambda^2}{n-2}$ (计算复杂) 则 $\hat\lambda$ 更优

(3). 是, 且是为 T 的函数. L-S 定理可知.

例: 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $N(a,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本. 记 $\theta=(a,\sigma^2)$ 求下面的 UMVUE: ① a,σ^2 ② $g_1(\theta)=\sigma^r$ $r>0$ ③ $g_2(\theta)=\frac{a}{\sigma^2}$

3.4.10 由反求知设有 $T=(T_1,T_2)$ 为充分完全统计量. $T_1=\bar X$, $T_2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$

$X\sim\chi_n^2$ 则 $E[\frac{1}{X}]=\frac{1}{n-2}$

① $h_1(T)=\bar X=T_1$, $h_2(T)=\frac{1}{n-1}T_2$ 分别为 a,σ^2 的无偏估计, 由 L-S 定理知分别为 a,σ^2 的 UMVUE

② 有 $Y=\frac{T_2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2$, 则 σ^r 的无偏估计与 T_2 的幂函数有关. 有 $\frac{1}{\sigma^r}E(T_2^{\frac{r}{2}})=2^{\frac{r}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n+r-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\triangleq\frac{1}{K_{n-1,r}}$ 则 $h_3(T)=K_{n-1,r}T_2^{\frac{r}{2}}$ 为 σ^r 的 UMVUE

③ 若 $X\sim\chi_n^2$ 则 $E[\frac{1}{X}]=\frac{1}{n-2}$. 又 T_1,T_2 相互独立, $E[\frac{T_1}{T_2}]=E[T_1]E[\frac{1}{T_2}]=\frac{a}{(n-3)\sigma^2}$ 则 $h_4(T)=\frac{(n-3)T_1}{T_2}$ 为 $\frac{a}{\sigma^2}$ 的 UMVUE

假设检验

定义: 设有参数分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$. $\Theta_0\subset\Theta$, 有命题 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 称零假设或原假设. 命题 $H_1:\theta\in\Theta_0^c$ 称 H_0 的备择假设或对立假设

假设检验问题表示为 $\underbrace{H_0:\theta\in\Theta_0}_{原假设成立}\leftrightarrow\underbrace{H_1:\theta\in\Theta_0^c}_{对立假设成立}$; 若 Θ_0 或 Θ_0^c 中只有一个点, 称为简单假设. 否则称复合假设

背景: 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $N(a,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本, σ^2 已知. 考虑检验问题 $H_0:a=a_0\leftrightarrow H_1:a\ne a_0$ 有 $\bar X$ 为 a 的一个好的估计

若 $|\bar x-a_0|$ 较大, 倾向拒绝 H_0. 反之倾向接受 H_0. 于是可确定一个数 A. $|\bar x-a_0|>A$ 时拒绝 H_0. $|\bar x-a_0|\le A$ 时接受 H_0.

定义: 在上述背景中. 称 $D=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,|\bar x-a_0|>A\}$ 为 H_0 的拒绝域(否定域). $\bar D=\mathcal{X}-D$ 为接受域

似然比检验

定义: 设样本 X 有概率函数 $f(x,\theta)$. $\theta\in\Theta$, $\Theta_0\subsetneq\Theta$. 对于检验问题 $H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_0^c$, 统计量 $\lambda(x)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta}f(x,\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}f(x,\theta)}$ 称为关于该检验问题的似然比 (LRT 统计量)

下面定义的检验函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)>c\\ r & \lambda(x)=c\\ 0 & \lambda(x)<c\end{cases}$ (c, r 为待定常数) 称为检验问题 $H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_0^c$ 的一个似然比检验 (LRT)

若样本分布为连续分布, 令 $r=0$ 即 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)>c\\ 0 & \lambda(x)\le c\end{cases}$ ① 给出 Θ, Θ_0, $\sup_{\theta\in\Theta}$ 与 Θ_0 的表达式 (用 MLE) $\Rightarrow\lambda$ 计算

例: 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $\{N(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<\infty,\sigma^2>0\}$ 中抽取的随机样本, 求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验: $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\ne\mu_0$

5.3.1 记 $\theta=(\mu,\sigma^2)$ 则 θ 的似然函数为 $f(x,\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\}$ 其中 $\Theta=\{\theta=(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<\infty,\sigma^2>0\}$ 原假设 H_0 对应的子集 $\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2):\mu=\mu_0,\sigma^2>0\}$

σ^2 未知 → t 分布

σ^2 已知 → 正

在 Θ 上, μ 与 σ^2 的 MLE 分别为 $\hat\mu=\bar x$, $\hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2\Rightarrow\sup_{\theta\in\Theta}f(x,\theta)=f(x,\hat\mu,\hat\sigma^2)=(\frac{2\pi e}{n})^{-\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2)^{-\frac{n}{2}}$

在 Θ_0 上, σ^2 的 MLE 为 $\hat\sigma'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\Rightarrow\sup_{\theta\in\Theta_0}f(x,\theta)=f(x,\mu_0,\hat\sigma'^2)=(\frac{2\pi e}{n})^{-\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2)^{-\frac{n}{2}}$ $\to\lambda(x)=\left(\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(1+\frac{n(\bar x-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$

定义 $T(x)=\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu_0)}{S}$ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2$ 则 $\lambda(x)=(1+\frac{1}{n-1}(T(x))^2)^{\frac{n}{2}}$

① 确定 Θ, Θ_0

② 算 MLE 来算 sup

③ 算 λ

拒绝域 $D=\{x=(x_1,\cdots,x_n):\lambda(x)>c'\}=\{x:|T|>c\}$, 令 $P(|T|>c|H_0)=\alpha$

$P(X\in 拒绝域|H_0)\le\alpha$.

当 H_0 成立时 $T\sim t_{n-1}$ 则 $c=t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$, 则 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & |T(x)|>t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\\ 0 & |T(x)|\le t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\end{cases}$

λ 越大, H_0 下似然值越小于全参数空间的似然值, H_0 越不合理

故拒绝域: $D=\{x\,|\,\lambda(x)>c\}$

f 整理

例: 问题同上. 求检验 $H_0:\mu\le\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$ 的水平为 α 的似然比检验

5.3.2 $f(x,\theta)$ 与 Θ 同上. $\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2)\,|\,\mu\le\mu_0,\sigma^2>0\}$ $\sup_{\theta\in\Theta}f(x,\mu,\sigma^2)$ 同上题, $\sup_{\theta\in\Theta_0}f(x,\mu,\sigma^2)=\begin{cases}\sup_{\theta\in\Theta}f(x,\mu,\sigma^2) & \bar x\le\mu_0\\ (\frac{2\pi e}{n})^{-\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2)^{-\frac{n}{2}} & \bar x>\mu_0\end{cases}$

由于 λ 为 T 的严格增函数, 则拒绝域为 $D=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,\lambda(x)>c'\}=\{x:T>c\}$

有 $P(T>c|\mu=\mu_0)=\alpha$. 当 $\mu=\mu_0$ 时 $T\sim t_{n-1}$ 则 $c=t_{n-1}(\alpha)$ $\varphi(x)=\begin{cases}1 & T>t_{n-1}(\alpha)\\ 0 & T\le t_{n-1}(\alpha)\end{cases}$

例: 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为自均匀分布总体 $U(0,\theta)$ 中抽取的随机样本. 求 $H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$ 水平为 α 的似然比检验. 其中 α 与 θ_0 给定

5.3.4 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta^{-n} & 0<x_{(n)}<\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$ $\Theta=(0,\infty)$, $\Theta_0=(0,\theta_0]$

θ 的 MLE 为 $X_{(n)}$. $\sup_{\theta\in\Theta}f(x,\theta)=(X_{(n)})^{-n}$ $\sup_{\theta\in\Theta_0}f(x,\theta)=\begin{cases}(X_{(n)})^{-n} & 0<X_{(n)}\le\theta_0\\ 0 & X_{(n)}>\theta_0\end{cases}$

$\Rightarrow\lambda(x)=\begin{cases}1 & 0<X_{(n)}\le\theta_0\\ \infty & X_{(n)}>\theta_0\end{cases}$ 为 $X_{(n)}$ 的单增函数.

则 $D=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,X_{(n)}>c\}$

注 5.3.1 为使检验水平等于 α, 将集合 $G=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n):\lambda(\boldsymbol{x})=1\}$ 分为两部分 $G_1=\{\boldsymbol{x}:c<x_{(n)}\leqslant\theta_0\}$, $G_2=G-G_1$, 则 $G_1\cup\{\boldsymbol{x}:\lambda(\boldsymbol{x})=\infty\}=\{\boldsymbol{x}:x_{(n)}>c\}$ 为检验问题 (5.3.12) 的拒绝域是合理的.

由于 $T=X_{(n)}$ 的密度函数为 $g(t)=nt^{n-1}/\theta^n\cdot I_{(0,\theta)}(t)$, 故由

$$\boxed{\alpha=\mathbb{P}\left(X_{(n)}>c|\theta=\theta_0\right)}=\int_c^{\theta_0}\frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n}dt=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n,$$

解出 $c=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}$, 故拒绝域为

$$D=\{\boldsymbol{X}:\ X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\}.$$

Bayes 检验

定义: 设两假设 Θ_0 与 Θ_1 的后验概率分布为 α_0 与 α_1, 则 $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ 称为 H_0 对 H_1 的后验机会比.

$\alpha_0=P(H_0|\bar x)=P(\theta\in H_0|\bar x)$ $\alpha_0=P(\theta\in H_1|\bar x)$. 检验法则: $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}<1$ 时拒绝 H_0. 否则接受 H_0.

$\frac{P(\theta\in\Theta_0)}{P(\theta\in\Theta_1)}$ (后验分布)

例: 设 $X\sim N(\theta,1)$. 其中 $\theta=1$ 或 0. 令 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为总体 X 中抽取的简单样本. 要检验假设 $H_0:\theta=0\leftrightarrow H_1:\theta=1$

5.6.2 $\bar X$ 为充分统计量. 有 $\bar X\sim N(\theta,\frac{1}{n})$, 设 $\theta=0,1$ 的先验概率分别为 π_0,π_1, 则有 $f(\bar x|0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{n}{2}\bar x^2\}$, $f(\bar x|1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{n}{2}(\bar x-1)^2\}$

有 $\alpha_0=\frac{\pi_0 f(\bar x|0)}{\pi_0 f(\bar x|0)+\pi_1 f(\bar x|1)}$, $\alpha_1=\frac{\pi_1 f(\bar x|1)}{\pi_0 f(\bar x|0)+\pi_1 f(\bar x|1)}$ → 后验机会比为 $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{\pi_0 f(\bar x|0)}{\pi_1 f(\bar x|1)}$

例: 设从正态总体 $N(\theta,1)$ 中随机抽取一个样本容量为 10 的样本 X, 得样本均值 $\bar x=1.5$. 令 θ 的先验分布为共轭先验分布 $N(0.5,2)$. 求下列检验问题

5.6.3 $H_0:\theta\le1\leftrightarrow H_1:\theta>1$

由厚尾内容可知θ的后验分布为$N(\mu_n,\eta_n^2)$，其中$\mu_n=\frac{2}{\frac{1}{10}+2}\times1.5+\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+2}\times0.5=1.4524$，$\eta_n^2=\frac{2}{1+20}=0.09524=(0.3086)^2$

于是后验概率$\alpha_0=P(\theta\le1|\bar{x})=\Phi\left(\frac{1-1.4524}{0.3086}\right)=0.0708$，$\alpha_1=P(\theta>1|\bar{x})=1-\alpha_0=0.9292$ } 后验机会比为$\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=0.0762$ 于是拒绝H_0，认为θ是>1

错误与功效函数

定义：① H_0对，误拒绝H_0 称弃真，称为第一类错误

② H_0错，误接受H_0 称取伪，称为第二类错误

一个好的功效函数$\beta_\varphi(\theta)$应在大多$\theta\in\Theta_0$上接近0。

定义：设$\varphi(x)$为$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$的一个检验函数，则$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta[\varphi(X)]$ $\theta\in\Theta$ 称为φ的功效函数

知道了检验 $\varphi(x)$ 的功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$ 后，就可以计算犯两类错误的概率。若以 $\alpha^*_\varphi(\theta)$ 和 $\gamma^*_\varphi(\theta)$ 分别记犯第一、二类错误的概率，则犯第一类错误的概率可表示为

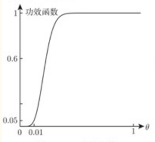


图 5.1.1 功效函数

$$\alpha^*_\varphi(\theta)=\begin{cases}\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_0,\\ 0, & \theta\in\Theta_1,\end{cases}$$

犯第二类错误的概率可表示为

$$\gamma^*_\varphi(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0,\\ 1-\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_1.\end{cases}$$

如在例 5.1.1 中，$\Theta=(0,1)$，则检验问题 $H_0: 0<\theta\leqslant0.01 \leftrightarrow H_1: 0.01<\theta<1$ 的一个较好的功效函数之形状如图 5.1.1 所示。

一个好的检验 $\varphi(x)$，犯两类错误的概率都应较小，也就是功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$ 在 Θ_0 中应尽可能地小，在 Θ_1 中应尽可能地大。

定义：设$0\le\alpha<1$，称一个功效函数为$\beta(\theta)$的检验是水平为α的检验，若 $\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)\le\alpha$

〃 〃 〃 真实水平为α 〃 〃 $=\alpha$

$\beta(\theta)$为θ拒绝H_0的概率，故$\theta\in\Theta_0$时为第一类错误概率，

$\theta\in\Theta_1$时 $1-\beta(\theta)$为第二类错误概率。

α的计算

表 5.2.1 单个正态总体均值的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域
σ^2 已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ $U\|\mu=\mu_0\sim N(0,1)$	$\|U\|>u_{\alpha/2}$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$U>u_\alpha$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$U<-u_\alpha$
σ^2 未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ $T\|\mu=\mu_0\sim t_{n-1}$	$\|T\|>t_{n-1}(\alpha/2)$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T>t_{n-1}(\alpha)$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T<-t_{n-1}(\alpha)$

表 5.2.2 单个正态总体方差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域
μ 已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2_\mu=nS^2_\mu/\sigma^2_0$ $\chi^2_\mu\|\sigma^2_0\sim\chi^2_n$	$nS^2_\mu/\sigma^2_0<\chi^2_n(1-\alpha/2)$ 或 $nS^2_\mu/\sigma^2_0>\chi^2_n(\alpha/2)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$nS^2_\mu/\sigma^2_0>\chi^2_n(\alpha)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$nS^2_\mu/\sigma^2_0<\chi^2_n(1-\alpha)$
μ 未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_0}$ $\chi^2\|\sigma^2_0\sim\chi^2_{n-1}$	$(n-1)S^2/\sigma^2_0<\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ 或 $(n-1)S^2/\sigma^2_0>\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma^2_0>\chi^2_{n-1}(\alpha)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma^2_0<\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$

表 5.2.3 两个正态总体均值差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$U=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$ $U\|\mu_0\sim N(0,1)$	$\|U\|>u_{\alpha/2}$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$U>u_\alpha$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$U<-u_\alpha$
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$T_w=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ $T_w\|\mu_0\sim t_{n+m-2}$ $S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{n+m-2}$	$\|T_w\|>t_{n+m-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$T_w>t_{n+m-2}(\alpha)$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$T_w<-t_{n+m-2}(\alpha)$

表 5.2.4 两个正态总体方差比的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域
μ_1,μ_2 已知 m n	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F_*=S^2_{2*}/S^2_{1*}$ $F_*\|_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n,m}$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha/2)$ 或 $F_*>F_{n,m}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$	$S^2_{1*}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2$	$F_*>F_{n,m}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$	$S^2_{2*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(Y_i-\mu_2)^2$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha)$
μ_1,μ_2 未知	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F=S_2^2/S_1^2$ $F\|_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n-1,m-1}$	$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)$ 或 $F>F_{n-1,m-1}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$	$S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2$	$F>F_{n-1,m-1}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$	$S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar{Y})^2$	$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha)$

一致最优检验（UMPT）

定义：设有检验问题$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$，今$0<\alpha<1$，

记Φ_α为其一切水平为α的检验的集合，若$\varphi\in\Phi_\alpha$，

且对∀检验$\varphi_1\in\Phi_\alpha$，有$\beta_\varphi(\theta)\ge\beta_{\varphi_1}(\theta)$，$\theta\in\Theta_1$，则称φ为此问题的一个水平为α的一致最优检验（UMPT）

（简单检验）定理（N-P引理）：设样本联合概率密度为$f(\vec{x}|\theta)$，考虑问题：$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$，若一个检验的拒绝域D满足对某$k>0$

若$f(x|\theta_1)>kf(x|\theta_0)$ 则$x\in D$

若$f(x|\theta_1)<kf(x|\theta_0)$ 则$x\in D^c$ 且$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$，则此检验为此问题的UMPT

整体的$\prod f_i$

例：设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为正态总体$N(\theta,1)$中抽取的随机样本，θ为未知参数，求简单检验问题$H_0:\theta=0\leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1\ (\theta_1>0)$的水平为α的UMPT，其中$\theta_1$与α给定。

θ固定，MLE固定

5.4.1 由N-P引理，先求$f_0(x)$与$f_1(x)$：$f_0(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\}$

$f_1(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1)^2\}$ $\Rightarrow\lambda(x)=\frac{f_1(x)}{f_0(x)}=\exp\{-\frac{1}{2}n\theta_1^2+n\theta_1\bar{x}\}$ 是为$\bar{x}$的增函数

不是$\frac{\theta\in\Theta_1}{\theta\in\Theta_0}$ 而是$\frac{\theta\in\Theta_1}{\theta\in\Theta_0}$

有拒绝域：$D=\{x\,|\,\lambda(x)>c'\}=\{x\,|\,\sqrt{n}\bar{x}>c\}$ 因为$\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)$

由NP引理有$E_0(\varphi(X))=P(\sqrt{n}\bar{X}>c\,|\,H_0)=\alpha\Rightarrow c=u_\alpha$ 故水平为α的UMPT检验函数为$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \bar{x}>\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\\ 0 & \bar{x}\le\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\end{cases}$ （与θ_1无关，故也是$H_0:\theta=0\leftrightarrow H_1:\theta>0$的水平为α的UMPT）

例：设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为$B(1,p)$中抽取的随机样本，p为未知参数，求检验问题$H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1:p=p_1\ (p_1>p_0)$的水平为α的UMPT，其中$p_0$、$p_1$、α是给定的。

5.4.2 由N-P引理，先求$f_0(x)$与$f_1(x)$，记$T(x)=\sum_{i=1}^n x_i$ 有$f_0(x)=p_0^{T(x)}(1-p_0)^{n-T(x)}$，$f_1(x)=p_1^{T(x)}(1-p_1)^{n-T(x)}\Rightarrow\lambda(x)=\frac{f_1(x)}{f_0(x)}=\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^{T(x)}$ 是与$\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}>1$，则λ关于T↑

离散时加T=C．由于T(x)服从离散分布，由N-P引理知检验函数为 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ r & T(x)=c\\ 0 & T(x)<c\end{cases}$

有H_0成立时$T(x)\sim B(n,p_0)$，给定α时有$\alpha_1=\sum_{k=c+1}^n C_n^k p_0^k(1-p_0)^{n-k}\le\alpha\le\sum_{k=c}^n C_n^k p_0^k(1-p_0)^{n-k}$ 确定了c

令$r=\frac{\alpha-\alpha_1}{C_n^c p_0^c(1-p_0)^c}$ 则有$E_0(\varphi(X))=\alpha_1+C_n^c p_0^c(1-p_0)^c\cdot r=\alpha$ 于是有φ(x)为水平为α的UMPT．（与p_1无关，故也是$H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1:p>p_0$的水平为α的UMPT）

推论：设r.v. X的密度函数为$f(x,\theta)$，$\theta\in\Theta$为未知参数，$X=(X_1,\cdots,X_n)$为自总体X中抽取的随机样本，$T=T(X)$为θ充分统计量，则φ(x)为关于T的函数

（由上述例子也可看出）

（复杂检验）定义：设X服从单参数分布族$\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$，若对$\forall\theta_1,\theta_2\in\Theta$，有

① $\theta_1\neq\theta_2$时 $P(f(X,\theta_1)\neq f(X,\theta_2))>0$．

② $\theta_2>\theta_1$时∃T(x) s.t. $\lambda=f(x,\theta_2)/f(x,\theta_1)$ 只依赖T且是T的非降（非增）分布族

则称$f(x,\theta)$有单调似然比（MLR）

用充分T

$H_0:\le\ \Rightarrow$ MLR非降（↑）

$H_0:\ge\ \Rightarrow$ MLR非增（↓）

定理（Karlin-Rubin）考虑检验问题$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$，设T为关于θ充分统计量，相应密度函数为$g(t|\theta)$，对θ有非降MLR，则检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T>c\\ r & T=c\\ 0 & T<c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$

为一个检验水平为α的UMPT．

注意符号

推论：考虑检验问题$H_0:\theta\ge\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta<\theta_0$，设T为关于θ充分统计量，相应密度函数为$g(t|\theta)$，对θ有非降MLR，则检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T<c\\ r & T=c\\ 0 & T>c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$为一个检验水平为α的UMPT．

推论：样本X的分布族为单参数指数族$f(x,\theta)=c(\theta)h(x)\exp\{Q(\theta)T(x)\}$ $\theta\in\Theta$，其中$c(\theta),h(x)>0$，有下列结论

(1) 检验问题$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$

① 若$Q(\theta)$为θ严格单增，则UMPT：检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T>c\\ r & T=c\\ 0 & T<c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$

② 若$Q(\theta)$为θ严格单减，则UMPT：检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T<c\\ r & T=c\\ 0 & T>c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$

(2) 检验问题$H_0:\theta\ge\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta<\theta_0$

① 若$Q(\theta)$为θ严格单增，则UMPT：检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T<c\\ r & T=c\\ 0 & T>c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$

② 若$Q(\theta)$为θ严格单减，则UMPT：检验$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T>c\\ r & T=c\\ 0 & T<c\end{cases}$ 满足$E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$

这里的T为指数族中函数 不是充分统计量

例：设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为正态总体$N(\theta,1)$中抽取的随机样本，θ为未知参数，求简单检验问题$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$的水平为α的UMPT，其中$\theta_1$与α给定

5.4.4（对5.4.1已补充）为指数族分布，样本密度为$f(x,\theta)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}\theta^2}e^{n\theta\bar{x}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$ 且$Q(\theta)=n\theta$为关于θ严格增，由推论$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ 0 & T(x)\le c\end{cases}$

由于$T(x)=\bar{X}\sim N(\theta,\frac{1}{n})\Rightarrow\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)\sim N(0,1)$，故$\alpha=E_{\theta_0}[\varphi(X)]=P(\bar{X}>c)=P(\sqrt{n}(\bar{X}-\theta_0)>\sqrt{n}(c-\theta_0))\Rightarrow c=\theta_0+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}1 & \bar{x}>\theta_0+u_\alpha/\sqrt{n}\\ 0 & \bar{x}\le\theta_0+u_\alpha/\sqrt{n}\end{cases}$ 为水平为α的UMPT．

例：设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为$B(1,p)$中抽取的随机样本，p为未知参数，求检验问题$H_0:p\le p_0\leftrightarrow H_1:p>p_0$的水平为α的UMPT，其中$p_0$、α是给定的。

5.4.5 为二项分布，$f(x,p)=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$ 有$Q(p)=\ln\frac{p}{1-p}$为p严格↑，由推论。

$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ r & T(x)=c\\ 0 & T(x)<c\end{cases}$ 其中 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$，$r=\dfrac{\alpha-\alpha_1}{C_n^c p_0^c(1-p_0)^{n-c}}$，则有 $E_{p_0}[\varphi(x)]=\alpha$

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $P(\lambda)$ 中抽取的随机样本，P 为未知参数。求检验问题 $H_0:\lambda\le\lambda_0\leftrightarrow H_1:\lambda>\lambda_0$ 的水平为 α 的 UMPT。其中 λ_0、α 是给定的。

5.4.6 Poisson 分布为指数族分布，有 $f(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^{T(x)}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$ $\Rightarrow Q(\lambda)=\ln\lambda$ 为关于 λ 严格单增函数。故由推论 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ r & T(x)=c\\ 0 & T(x)<c\end{cases}$ 其中 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$

其中 c 由不等式确定：$\alpha_1=\sum_{k=c+1}^{\infty}\dfrac{(n\lambda_0)^k e^{-n\lambda_0}}{k!}\le\alpha\le\sum_{k=c}^{\infty}\dfrac{(n\lambda_0)^k e^{-n\lambda_0}}{k!}$，令 $r=\dfrac{(\alpha-\alpha_1)c!}{(n\lambda_0)^c e^{-n\lambda_0}}$，则 $E_{\lambda_0}[\varphi(x)]=\alpha$，即 $\varphi(x)$ 为水平为 α 的 UMPT。

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 中抽取的随机样本，θ 为未知参数。求单侧检验问题 $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ 的水平为 α 的 UMPT。其中 σ_0^2 与 α 给定

5.4.8 为指数族，有 $f(x,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\}$ $\Rightarrow Q(\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$ 关于 σ^2 严格↑。由推论，$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)<c\\ 0 & T(x)\ge c\end{cases}$ $T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

有 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2/\sigma^2\sim\chi^2_n$ 则 $\alpha=P(T(x)<c)=P(T(x)/\sigma_0^2<c/\sigma_0^2)$ 于是 $c=\sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha)$ 因为"<"，是 $1-\alpha$ 分位数 $\varphi(x)$ 为水平为 α 的 UMPT.

UMPT：① 定理
② 判断 MLE 情况
③ K-R 定理

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为来自均匀分布族 $\{U(0,\theta):\theta>0\}$ 的简单样本 ① 证明上述分布族是关于 $T(x)=X_{(n)}$ 的单调似然比分布族

5.4.9 ② 试求检验问题 $H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$ 的 UMPT 与功效函数

(1) 有 $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta^n}I\{0<x_{(n)}<\theta\}$

当 $\theta_0<\theta_1$ 时 $\lambda(x)=\dfrac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}=\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\cdot\dfrac{I(0<x_{(n)}<\theta_1)}{I(0<x_{(n)}<\theta_0)}=\begin{cases}1 & 0<x_{(n)}<\theta_0\\ \infty & \theta_0\le x_{(n)}<\theta_1\end{cases}$ 于是 $\lambda(x)$ 为关于 $T(x)=X_{(n)}$ 的非降函数，于是为 MLR 分布族

(2). 由定理知 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ 0 & T(x)\le c\end{cases}$ 有 $T(x):f_{X_{(n)}}(x)=\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}I(0,\theta)$ 则 $\alpha=\int_c^{\theta_0}\frac{nx^{n-1}}{\theta_0^n}dx=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n\Rightarrow c=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}$

故 UMPT：$\varphi(x)=\begin{cases}1 & X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\\ 0 & X_{(n)}\le\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\end{cases}$ 功效函数：$\beta_\varphi(\theta)=P_\theta(X_{(n)}>c)=\int_c^{\theta}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ 为关于 θ 的单增函数

(双边假设)（不重要） 定理：设随机样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布族是单参数指数族，概率密度为 $f(x,\theta)=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$.

若 $Q(\theta)$ 关于 θ 严格↑，则对检验问题 $H_0:\theta\le\theta_1$ 或 $\theta\ge\theta_2\leftrightarrow H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$，其一个水平为 α 的 UMPT 为 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & t_1<T<t_2\\ 0 & \text{others}\end{cases}$，其中 $P_{\theta_1}(t_1<T<t_2)=P_{\theta_2}(t_1<T<t_2)=\alpha$

P 值 定义：称 $p(x)$ 为一个 P-值，若 ① 对 $\forall x$，$0\le p(x)\le1$
② 若 p 充分小，可作为 H_1 为真的依据

称其是有效的，若 $P_\theta(p(x)\le\alpha)\le\alpha$ $(\alpha\in[0,1])$ 对 $\forall\theta\in\Theta_0$ 成立

定理：$W(X)$ 值大可作为 H_1 真的依据，定义 $p(x)=\sup_{\theta\in\Theta_0}P_\theta(W(X)\ge W(x))$

则其为有效 P-值

表 5.5.1　p 值计算公式表

	参数	H_0	H_1	检验统计量及其分布	p 值公式
一样本	σ^2 已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$	$U=\dfrac{\sqrt{n}(\bar X-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0,1)$	$p=\mathbb{P}\left(\lvert U\rvert>\dfrac{\sqrt{n}\lvert\bar x_0-\mu_0\rvert}{\sigma}\Big\vert H_0\right)$
	同上	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	同上	$p=\mathbb{P}\left(U>\dfrac{\sqrt{n}(\bar x_0-\mu_0)}{\sigma}\Big\vert H_0\right)$
	σ^2 未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$	$T=\dfrac{\sqrt{n}(\bar X-\mu_0)}{S}\sim t_{n-1}$	$p=\mathbb{P}\left(\lvert T\rvert>\dfrac{\sqrt{n}\lvert\bar x_0-\mu_0\rvert}{s_0}\Big\vert H_0\right)$
	同上	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	同上	$p=\mathbb{P}\left(T>\dfrac{\sqrt{n}(\bar x_0-\mu_0)}{s_0}\Big\vert H_0\right)$
	μ 未知	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{n-1}$	$p=\mathbb{P}\left(\chi^2>\dfrac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2}\Big\vert H_0\right)$
两样本	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$	$T=\dfrac{\bar Y-\bar X}{S_w\sqrt{\frac{m+n}{mn}}}\sim t_{n+m-2}$	$p=\mathbb{P}\left(\lvert T\rvert>\dfrac{\lvert\bar y_0-\bar x_0\rvert}{S_{w0}\sqrt{\frac{m+n}{mn}}}\Big\vert H_0\right)$
	同上	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	同上	$p=\mathbb{P}\left(T>\dfrac{\bar y_0-\bar x_0}{S_{w0}\sqrt{\frac{m+n}{mn}}}\Big\vert H_0\right)$
	μ_1,μ_2 未知	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=S_1^2/S_2^2\sim F_{m-1,n-1}$	$p=\mathbb{P}\left(F>s_{10}^2/s_{20}^2\vert H_0\right)$

区间估计 定义：设有一个参数分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$g(\theta)$ 是定义在参数空间 Θ 上的一个已知函数，$X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是分布族中抽取的样本，令 $\hat g_1(x)$ 与 $\hat g_2(x)$ 为定义在样本空间 $\mathcal{X}$ 上，取值在 Θ 上的两统计量且 $\hat g_1(x)\le\hat g_2(x)$，则称随机区间 $[\hat g_1(x),\hat g_2(x)]$ 为 $g(\theta)$ 的一个区间估计

定义：设 $[\hat\theta_1,\hat\theta_2]$ 为 θ 的一个区间估计，则 $[\hat\theta_1,\hat\theta_2]$ 包含 θ 的概率 $P_\theta(\hat\theta_1\le\theta\le\hat\theta_2)$ 称为此区间估计的置信水平。其在 Θ 上的下确界 $\inf_{\theta\in\Theta}P_\theta(\hat\theta_1\le\theta\le\hat\theta_2)$ 称为此区间估计的置信系数。

Tip：置信水平或置信系数等越大越好

定义：设 $L(x)$ 与 $U(x)$ 为定义在 $\mathcal{X}$ 上，取值在 Θ 中的两统计量，若对 α $(0<\alpha<1)$ 有 $P_\theta(\theta\le U(x))\ge1-\alpha$，$P_\theta(\theta\ge L(x))\ge1-\alpha$ 对 $\forall\theta\in\Theta$，则分别称 $U(x)$ 与 $L(x)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限与置信下限

左端概率在 Θ 上的下确界分别称置信上限与置信下限的置信系数

定义：设参数 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta\subset R^k$ $k\ge2$。若统计量 $S(x)$ 满足 ① 对任一样本 X，$S(X)$ 为 Θ 的一个子集
② 对给定的 $\alpha\in(0,1)$，$P_\theta(\theta\in S(X))\ge1-\alpha$，$\forall\theta\in\Theta$
则称 $S(x)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信域(集)，$\inf_{\theta\in\Theta}P_\theta(\theta\in S(x))$ 称为置信系数

枢轴变量法 定义：随机变量 $Q(x,\theta)$ 分布与 θ 无关，则称其为枢轴变量 (如：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Q(\bar x,\mu)=\frac{\bar x-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$ 与 μ 无关，Q 为枢轴变量)

正态：例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，此处 σ^2 已知，求 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

(单参数) 有 $u=\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$ $\Rightarrow P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu)}{\sigma}\right|\le u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$ $\Rightarrow P_\mu\left(\bar x-\frac{\sigma}{\sqrt n}u_{\frac{\alpha}{2}}\le\mu\le\bar x+\frac{\sigma}{\sqrt n}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$，故 $[\bar x-\frac{\sigma}{\sqrt n}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar x+\frac{\sigma}{\sqrt n}u_{\frac{\alpha}{2}}]$ 为 μ 的置信系数 $1-\alpha$ 的置信区间.

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，此处 σ^2 未知，求 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

有 $T=\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu)}{S}\sim t_{n-1}$ $\Rightarrow P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu)}{S}\right|\le t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right)=1-\alpha$ $\Rightarrow$ 故 $[\bar x-\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\bar x+\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$ 为 μ 的置信系数 $1-\alpha$ 的置信区间

理解！

注 4.2.1　说这是一个置信系数为 95% 的置信区间，不是说 μ 有 95% 的概率落在这个区间内 (因为 μ 不是随机变量)，而是说若把这个置信区间重复使用多次，如使用 100 次，大约有 95 次能盖住真参数 μ，大约有 5 次不能盖住 μ。一旦算出具体的区间，如区间估计 [8.292%, 8.388%]，它就是一个具体确定的区间，μ 是个未知常数，该区间是否盖住了 μ，只有两个答案："是" 或 "不是"，没有概率可言，即不能说有 95% 的机会盖住 μ 了.

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，此处 μ 已知，求 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

有 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)^2$，取 $T=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$，要找 d_1,d_2 s.t. $P_\theta(d_1\le T\le d_2)=1-\alpha$，令 $P_\theta(T<d_1)=P_\theta(T>d_2)=\frac{\alpha}{2}$ 构造等尾区间

于是 $d_1=\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ $d_2=\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ $\Rightarrow\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$ 为 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 等尾的置信区间. 开方后 $\left[\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}\right)^{\frac12},\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right)^{\frac12}\right]$ 为 σ 的置信系数为 $1-\alpha$ 等尾的置信区间

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，此处 μ 未知，求 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

同上。

例：$X_1,\cdots,X_m$ 为 $N(a,\sigma_1^2)$ 中样本，$Y_1,\cdots,Y_n$ 为 $N(b,\sigma_2^2)$ 中样本，相互独立，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时 $b-a$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

(双参数) 令 $S_w^2=\frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2]$，有 $\bar Y-\bar X$ 为 $b-a$ 的无偏估计，有 $T_w=\frac{\bar Y-\bar X-(b-a)}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{n+m}}\sim t_{n+m-2}$ $\Rightarrow P(|T_w|\le t_{n+m-2}(\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$

有置信区间：$[\bar Y-\bar X-S_w t_{n+m-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac1m+\frac1n},\bar Y-\bar X+S_w t_{n+m-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac1m+\frac1n}]$

σ_1^2/σ_2^2 的置信区间？ (α 较小时 $F_{m,n}(1-\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{F_{n,m}(\frac{\alpha}{2})}$)

令 $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{m-1,n-1}$ $\Rightarrow P(d_1\le F\le d_2)=1-\alpha$ 令 $P(F<d_1)=\frac{\alpha}{2}$，$P(F>d_2)=\frac{\alpha}{2}$，则有 $\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$

非正态：例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $Exp(\lambda)$ 中抽取的简单样本，$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{(0,\infty)}(x)$，$\lambda>0$。求 λ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

有 $T=2\lambda n\bar x\sim\chi^2_{2n}$ 要找 d_1,d_2 s.t. $P_\lambda(d_1\le T\le d_2)=1-\alpha$，令 $P_\lambda(T<d_1)=P_\lambda(T>d_2)=\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ 置信区间为 $\left[\frac{\chi^2_{2n}(1-\frac{\alpha}{2})}{2n\bar x},\frac{\chi^2_{2n}(\frac{\alpha}{2})}{2n\bar x}\right]$

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $U(0,\theta)$ 中抽取的简单样本，求 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

设 $T(\boldsymbol{X})=X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，$T(\boldsymbol{X})$ 为充分统计量，由例 3.3.5 可知 $(n+1)T/n$ 是 θ 的无偏估计 (也是 θ 的 UMVUE)。设想枢轴变量一定与 T 有关。由于 $Y_i=X_i/\theta\sim U(0,1)$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $Y_{(n)}=T/\theta$ 的密度函数为 $f(y)=ny^{n-1}I_{(0,1)}(y)$。取 $Z=1/Y_{(n)}=\theta/T$ 为枢轴变量，其表达式与 θ 有关，其密度函数为

$$\frac{\theta}{T}\sim g(z)=nz^{-(n+1)}I_{(1,\infty)}(z),\tag{4.3.5}$$

$g(z)$ 与 θ 无关。确定 d_1，d_2，$1\leqslant d_1<d_2\leqslant\infty$ 使得

$$\mathbb{P}_\theta\left(d_1\leqslant\frac{\theta}{T}\leqslant d_2\right)=\mathbb{P}(d_1T\leqslant\theta\leqslant d_2T)=\int_{d_1}^{d_2}nz^{-n-1}dz=\frac{1}{d_1^n}-\frac{1}{d_2^n}=1-\alpha.\tag{4.3.6}$$

于是 $[d_1T,\ d_2T]$ 为 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间。由式 (4.3.6) 中被积函数 $g(z)$ 单调降的性质，要使区间估计的精度最高，宜取 $d_1=1$，再解方程 $1-1/d_2^n=1-\alpha$ 得到 $d_2=1/\sqrt[n]{\alpha}$.

为 $[T,\frac{T}{\sqrt[n]{\alpha}}]$

Bayes 区间估计 定义：设 θ 的后验分布为 $\pi(\theta|x)$，对给定的样本 x 与 $0<\alpha<1$，若 $\exists\hat\theta_1(x),\hat\theta_2(x)$ s.t. $P(\hat\theta_1\le\theta\le\hat\theta_2)\ge1-\alpha$，则称 $[\hat\theta_1,\hat\theta_2]$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayes 可信区间.

满足 $P(\theta\ge L(x))\ge1-\alpha$ 的 $L(x)$ 称为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的可信下限。满足 $P(\theta\le U(x))\ge1-\alpha$ 的 $U(x)$ 称为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的可信上限。

例：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 中抽取的简单样本，其中 σ^2 已知，θ 的先验分布为 $N(\mu,\tau^2)$ 其中 μ,τ^2 已知。求 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayes 可信区间.

4.5.1 由后验分布知 θ 的后验分布为 $N(\mu_n(x),\eta_n^2)$ 其中 $\mu_n(x)=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+n\tau^2}\mu+\frac{n\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2}\bar x$ $\eta_n^2=\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}$ 有 $P\left(\left|\frac{\theta-\mu_n(x)}{\eta_n}\right|\le u_{\frac{\alpha}{2}}\Big|\bar x\right)=1-\alpha$ $\Rightarrow$ 可信水平为 $1-\alpha$ 的可信区间为 $[\mu_n(x)-\eta_n u_{\frac{\alpha}{2}},\mu_n(x)+\eta_n u_{\frac{\alpha}{2}}]$

假设检验与区间估计 定理：① 对 $\forall\theta_0\in\Theta$，设 $A(\theta_0)$ 为 $H_0:\theta=\theta_0$ 的一个水平为 α 的检验的接受域，对每一个 $x\in\mathcal{X}$，在 Θ 上定义集合 $C(x)=\{\theta_0\in\Theta|x\in A(\theta_0)\}$，则 $C(x)$ 为置信水平为 $1-\alpha$ 的置信集合
② 反之，设 $C(x)$ 为置信水平为 $1-\alpha$ 的置信集合，则 $\forall\theta_0\in\Theta$，$A(\theta_0)=\{x\in\mathcal{X}|\theta_0\in C(x)\}$ 为 $H_0:\theta=\theta_0$ 的一个水平为 α 的检验的接受域.

检 ⇒ 区 例：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的随机样本，μ,σ^2 未知，求 μ,σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间和置信上下限.

先考虑 μ：已知 $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$ 的水平为 α 的检验的接受域 $\bar{D}=\{x \mid |T|\le t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\}$ $T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}$ $\Rightarrow P_\theta(|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}|\le t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\mid H_0)=1-\alpha$

由于此为 $\mu=\mu_0$ 时成立的，对 μ 皆成立，则 $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$ 为置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间

对置信下限：考虑 $H_0:\mu\le\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$ 接受域 $\bar{D}=\{x \mid T\le t_{n-1}(\alpha)\}$ 即 $P(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\le t_{n-1}(\alpha))=1-\alpha$ 即 $\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)\le\mu<\infty$ 其为置信下限，上限同理可求

最短枢轴区间

定理： 设 $f(x)$ 为一个单峰概率密度函数，若区间 $[a,b]$ 满足 (i) $\int_a^b f(x)dx=1-\alpha$ (ii) $f(a)=f(b)>0$ (iii) x^* 为 $f(x)$ 极大值点且 $a\le x^*\le b$，则 $[a,b]$ 为满足 (i) 的最短区间

定义： 称基于枢轴得到的区间为最短枢轴区间。

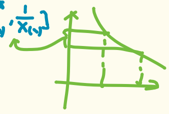
例： 设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 已知，$\mu\in\mathbb{R}$ 未知，求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间。

有 $Z=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ 为枢轴量，对 $P(a\le Z\le b)=1-\alpha \Rightarrow \mu$ 区间为 $(\bar{X}-b\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，$l=(b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

若长度最短，由于 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 p.d.f. 为单峰，令 $a=-b$ $(f(a)=f(b))$ 此时 $a=-u_{\frac{\alpha}{2}}$，$b=u_{\frac{\alpha}{2}}$，最短枢轴区间为 $[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$

例： 设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim U(0,\theta)$，$\theta>0$ 未知，求 $\frac{1}{\theta}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间。

有 $T=\frac{X_{(n)}}{\theta}$ 为枢轴量，$f_T(t)=n\cdot t^{n-1}\cdot 1=nt^{n-1}$ 即 $F_T(t)=t^n$ $t\in[0,1]$ 为单增函数，则最短区间为 $[\alpha^{\frac{1}{n}},1] \Rightarrow \frac{1}{\theta}$ 最短区间为 $[\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}}{X_{(n)}},\frac{1}{X_{(n)}}]$



因为 $\frac{1}{\theta}$ ↓，区间无所谓

期末：Bayes 估计、MSE、UMVUE、UMPT、检验与区间估计