数分题型方法总结

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

tip：本笔记用于总结往年试题中的题型与方法，包括数分A1,2,3的近年试题，在最后会选取B中试题进行补充。

（至2025年）

数分A1期中部分

2026.3.21

1. 2019

一、(10分)

设实数q属于开区间$(-1, 1)$. 请用$\epsilon - N$语言证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

——注意合理性也 分母要有意义

$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=[\log_{|q|}(\varepsilon)]$. $n>N$时 $|q^n-0|<\varepsilon$. 则 $\lim_{n\to\infty} q^n=0$. 当$q=0$时显然. 分类.

此时需$q\neq 0$

五、(8分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，对于任意的$x_1, x_2 \in [a, b]$满足:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_1 - x_2)^2.$$

证明：$f(x)$在$[a, b]$上是常值函数。

——注意题目条件中未言明可导

取$x_1=x_2+h$. 则 $0\le \lim_{h\to 0}\frac{|f(x_2+h)-f(x_2)|}{h}\le \lim_{h\to 0} h\to 0 \Rightarrow f(x)$可导且$f'(x)=0$

六、(8分)

设函数$f(x)$在$[0, 1]$内连续，$(0, 1)$上可导，且$f(1) = 2f(0)$. 证明：存在$\xi \in (0, 1)$使得 $(1+\xi) f'(\xi) = f(\xi)$.

得分	

——Rolle定理应用

$F(x)=\frac{f(x)}{1+x}$

七、(8分)

设函数f在$(0, 1)$上连续. 证明: f在$(0, 1)$上一致连续当且仅当$f(0^+)$与$f(1^-)$都存在且有限。

得分	

Cauchy列的构造.

$\Rightarrow$ $\forall \{x_n\}\in(0,1)$. $x_n\to 0^+$. $\exists N>0$. $m,n>N$. $|x_m-x_n|<\delta$. $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 则 $\{f(x_n)\}$为Cauchy列. 收敛 $\exists A$. 则 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=A$. 且A有限. 1处同理

$\Leftarrow$ 构造 $F(x)=\begin{cases} A & x=0 \\ f & x\in(0,1) \\ B & x=1 \end{cases}$ F在$[0,1]$上连续 $\Rightarrow$ 一致连续 $\Rightarrow$ f一致连续

2. 2020

九、设函数$f(x)$在区间$[0, 2]$上有二阶连续导数，$f'(0) = 1$，$f''(0) \neq 0$，且

$$0 < f(x) < x, \quad \forall x \in (0, 2).$$

令$x_{n+1} = f(x_n)$，$x_1 \in (0, 2)$. 求数列$\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限.

单调有界 $\Rightarrow x_n$有极限, $\Rightarrow x=f(x)$ 则 $x=0$. $\lim_{n\to\infty} nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$ Stolz + L'Hospital

八(10分)、假设函数f在$[a, b]$连续，在(a, b)二次可导，$f(a) = f(b) = 0$，$f(\frac{a+b}{2}) > 0$. 证明：存在$\zeta \in (a, b)$，使得$f''(\zeta) < 0$.

若$\forall x\in(a,b)$. $f''(x)\ge 0$.

$\exists x_1\in(a,b)$. $f'(x_1)=0$. $\Rightarrow$ $x\in(a,x_1)$时$f'(x)\le 0$.

$x\in(x_1,b)$时$f'(x)\ge 0$.

又$f(\frac{a+b}{2})>0$. $\exists x_2\in(a,\frac{a+b}{2})$ $f(\frac{a+b}{2})-f(a)=\frac{b-a}{2}f'(x_2)>0$

矛盾!

十、设$\alpha > 1$，函数$f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$可微，求证存在趋于无穷的正数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$f'(x_n) < f(\alpha x_n).$$

——此类问题 ① 构造 ② $\boxed{\text{反证}}$

若无, $f'(x)\ge f(\alpha x)>0$ ↑ $f(\alpha x)-f(x)=\int_x^{\alpha x} f'dt\ge\int_x^{\alpha x} f(\alpha t)dt=\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha x}^{\alpha^2 x} f(u)du>\frac{1}{\alpha}\cdot f(\alpha x)(\alpha^2 x-\alpha x)=(\alpha-1)x f(\alpha x)$

则 $f(x)<f(\alpha x)[1-(\alpha-1)x]$ x足够大. 则 左正右负. 矛盾!

3. 2021

四(10分)、设$f(x)$在$[a, b]$上单调增加，而且

$$a < f(a) < f(b) < b.$$

证明：存在$\zeta \in (a, b)$，使得$f(\zeta) = \zeta$.

——未说连续, 不能用中值定理

区间对半分. 用闭区间套

6. 假设

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$$

如果 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导，求 a, b 的值。

——可导 $\Rightarrow$ 左导 = 右导 $\neq\infty$.

$x<1$ $ax+b$

$x=1$ $\frac{a+b+1}{2}$

$x>1$ x^2

$f(1^-)=f(1)=f(1^+) \Rightarrow a+b=1$

$f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow a=2$.

4. 2022

$<\inf$ $<\sup$

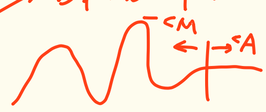
$[a, M]$ $[M, \infty)$

四、(10分)

设$f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，并且$\limsup_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，

证明：$f(x)$在$[a, +\infty)$上有上界.

分段分析（重要！）



22mid.7 设函数 $y=\cos(\beta\arcsin x)$，求高阶导数 $y^{(n)}(0)$。

证明. 观察到成立微分方程 $y'=-\frac{\beta\sin(\beta\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y''(1-x^2)-xy'+\beta^2y=0$$

→ Leibniz公式应用.

使用 Leibniz 公式求 n 次导数有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{(2+k)}(1-x^2)^{(n-k)}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{(1+k)}x^{(n-k)}+\beta^2y^{(n)}=0$$

代入 0 即有

$$y^{(2+n)}(0)-n(n-1)y^{(n)}(0)+(\beta^2-n)y^{(n)}(0)=y^{(2+n)}(0)+(\beta^2-n^2)y^{(n)}(0)=0$$

首先注意到 $y'(0)=0$，于是对于奇数次导数全部为 0，而偶数次导数为

$$y^{(2n+2)}=-\prod_{k=0}^{n}(\beta^2-k^2)$$

三、(10分) 极复杂时重用.

得分	

设函数$y=(x^2+2x-3)^n(\arcsin x)^2$, 其中$n$为正整数, 求高阶导数$y^{(n)}(1)$.

$y=\underbrace{(x-1)^n}_{f_1}\underbrace{(x+3)^n(\arcsin x)^2}_{f_2}$

f_1 只有n阶导非0, $y^{(n)}=n!\cdot 4^n\cdot\frac{\pi^2}{4}=n!\cdot 4^{n-1}\cdot\pi^2$

5. 2023

八、(10分)

得分	

问是否存在函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导且满足$f(x)>0$, $f'(x)=f(f(x))$?

请给出你的结论, 并证明之.

$f'(x)>0$. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$. $a>0$. $f'(x)\to f(a)\cdot x$

$a=0$: $f(0)>0$. $f'(x)>a$

不存在这样的函数。

证明：假设存在函数 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 连续可导，且满足 $f'(x)=f(f(x))$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。由于 $f(x)>0$，则 $f'(x)=f(f(x))>0$，故 f 严格递增。

考虑极限 $L=\lim_{x\to-\infty}f(x)$。因 f 递增且有下界 0，该极限存在且 $L\ge0$。若 $L>0$，则当 $x\to-\infty$ 时，$f(f(x))\to f(L)>0$，故存在 $\delta>0$ 和 $X\in\mathbb{R}$，使得当 $x<X$ 时，$f'(x)>\delta$。于是对 $x<X$，有

$$f(x)=f(X)-\int_x^X f'(t)\,dt\le f(X)-\delta(X-x)\to-\infty\quad(x\to-\infty),$$

与 $f(x)>0$ 矛盾。若 $L=0$，则 $f(f(x))\to f(0)>0$(因 $f(0)>0$)，同理可得矛盾。因此，假设不成立，即不存在满足条件的函数。

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{3}f''(\xi)$ 证毕.

✓ 九、(10分) $f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

设函数$f(x)$在$[-1,1]$上有连续的二阶导数, 且$f(0)=0$. → 直接泰勒展开. —— 中值定理应用.

证明：存在$\xi\in[-1,1]$, $\eta\in(-1,1)$使得$f''(\xi)=6f(\eta)$.

$f(x)=f(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta_x)x^2$ 在(-1,1)上积分 $\Rightarrow \underset{\substack{\parallel\\ 2f(\eta)}}{\int_{-1}^{1}f(x)dx}=\int_{-1}^{1}f''(\theta_x)x^2dx=f''(\xi)\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}f''(\xi)$

6. 2024

六、证明：连续函数$f(x)$在$[a,b]$内有零点的充要条件是对任意$\lambda\in(0,1)$和任意$x_1\in[a,b]$都存在$x_2\in[a,b]$使得$f(x_2)=\lambda f(x_1)$. ok

$\Rightarrow$) $\exists c\in[a,b]$. $f(c)=0$. 若$f(x_1)=0$. 取$x_2=c$即可.

若$f(x_1)\ne0$. 令$g(x)=f(x)-\lambda f(x_1)$. $g(c)=-\lambda f(x_1)$ $g(x_1)=(1-\lambda)f(x_1)$ =者异号. 由连续性. $\exists x_2\in[a,b]$. $g(x_2)=0$. 即$f(x_2)=\lambda f(x_1)$

$\Leftarrow$) 若f无零点. 不妨设$f(x)>0$. 令m为$f(x)$在$[a,b]$上最小值. M为最大值. 取$\lambda=\frac{m}{2M}\in(0,1)$. 取$f(x_1)=M$. 则$\exists x_2$. $f(x_2)=\lambda f(x_1)=\frac{m}{2}<m$矛盾!

七、设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上二阶可导($a\in\mathbb{R}$)，且有渐近线$y=bx+c$, ($b,c\in\mathbb{R}$). 证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

→ 只需$|f'(x)|<M$,

7. 2025

设函数$f(x)$在$(0,1)$上连续，且对任意$x\in(0,1)$，

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}>0.$$

希林原则用反证法.

证明：$f(x)$在$(0,1)$上单调递增。

证明：反证法：假设存在$a<b$使得$f(a)>f(b)$。
令$u=\sup\{x\in[a,b]:f(x)>f(b)\}$。
由连续性，$f(u)=f(b)$，且对任意$x\in[a,u)$，$f(x)>f(b)$。
对u，取$t>0$充分小，使得$u-t\in[a,u)$，$u+t\in(u,b]$。
则

$$f(u+t)\le f(b)=f(u)\le f(u-t),$$

故

$$\frac{f(u+t)-f(u-t)}{t}\le0,$$

与条件矛盾。

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可微，且在$[0,1]$上没有点满足$f(x)=f'(x)=0$。证明：$f(x)$在$[0,1]$上至多只有有限个零点。

证明：反证法：假设有无限个零点$\{x_n\}\subset[0,1]$。
由紧性，存在收敛子列$x_{n_k}\to x_0\in[0,1]$。

有界数列有收敛子列

由连续性，$f(x_0)=0$。
由可微性，

$$f'(x_0)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k})-f(x_0)}{x_{n_k}-x_0}=0.$$

故$f(x_0)=f'(x_0)=0$，矛盾。

数分A1期末部分

2026.3.22

1. 2018

三、(10分)

得分	

设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 其中$\mathbb{R}$表示实数集, $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$,

(1) 问当且仅当α,β取何值时, $f(x)$在区间$[0,1]$上黎曼可积(需说明理由)? → 有界且不连续点集为零测集.

(注:此处的黎曼可积是普通的黎曼可积, 不包含广义黎曼可积)

(2) 问当且仅当α,β取何值时, $f(x)$在区间$[0,1]$上有原函数(需说明理由)?

$[a,b]$上的连续函数一定有原函数　闭区间上连续函数有原函数

设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续, 且满足$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}xf(x)$ $(\forall x>0)$. —未知可导. 但积分一定可导.

证明: $f(x)=cx$(c是常数).

先有f是否可导! 连续函数变上限积分可导.

$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx\Rightarrow F(x)-xF'(x)=0\Rightarrow F(x)=cx\Rightarrow f(x)=2cx$ 证毕

设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续的导函数, 且$f(0)=f(1)=f(\frac{1}{2})=0$, 满足

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\frac{1}{12}\int_0^1(f'(x))^2dx.$$

→ 观察到为0
① 考虑Rolle定理,但此题难以用
② 构造积分为0.

与f'相关 → 用分部积分
与积分平方 → C-S不等式.

证明: $f(x)\equiv0$.

$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 xf'(x)dx$ 同理 $\int_0^{\frac12} f(x)dx = -\int_0^{\frac12} xf'(x)dx$. $\int_{\frac12}^1 f(x)dx = -\int_{\frac12}^1 xf'(x)dx$

$= -\int_{\frac12}^1 (x-1)f'(x)dx$

为了凑导数

则 $\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^{\frac12} xf'(x)dx - \int_{\frac12}^1 (x-1)f'(x)dx$. 用Cauchy-Schwarz不等式,有

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \left(\int_0^{\frac12} x^2dx + \int_{\frac12}^1 (x-1)^2dx\right)\int_0^1 (f'(x))^2dx = \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2dx$$

等号成立 $\Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} k_1x & x\in[0,\frac12] \\ k_2(x-1) & x\in[\frac12,1] \end{cases}$ 结合 $f(0)=f(\frac12)=f(1)=0$ 得 $k_1=k_2=0$. 即 $f(x)$ 为常值. 又 $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=0$.

Cauchy-Schwarz不等式等号成立: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2dx \cdot \int_a^b g^2dx$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 线性相关, $f(x)=kg(x)$.

2. 2019

六*、(8分)

设$\mathbb{R}$上的函数f有任意阶导数, 并且对于任意$k\in\mathbb{N}$, 存在$C_k>0$使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^k|f(x)| + |f^{(k)}(x)|\right) \le C_k.$$

$|f^{(k)}(x)| \le C_k$

证明: 对于任意$k,\ell\in\mathbb{N}$, 存在$C_{k,\ell}>0$使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f^{(\ell)}(x)| \le C_{k,\ell}.$$

证明:

六. 观察到, 可以约化为证明: 对于任意$k\in\mathbb{N}^*$, 存在$D_k>0$, 对于任意绝对值大于2的数$x\in\mathbb{R}$, 成立

$$|x|^k|f'(x)| \le D_k. \quad (\star) \qquad (1)$$

可归纳至 ℓ

(4分) 任给$\epsilon>0$, 由Taylor定理, 存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x+\epsilon) - f(x) = f'(x)\epsilon + \frac12 f''(x+\theta\epsilon)\epsilon^2.$$

于是, 我们有

$$|f'(x)| \le \frac{|f(x+\epsilon)|+|f(x)|}{\epsilon} + \frac12|f''(x+\theta\epsilon)|\epsilon.$$

将$\epsilon=1/|x|^k$代入上式, 并利用已知条件, 得到

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + |x|^{-k}\cdot|x|^{2k}(|f(x)|+|f(x+|x|^{-k})|) \\ &\le \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + C_{2k}|x|^{-k} + |x|^{-k}\cdot(2|x+|x|^{-k}|)^{2k}|f(x+|x|^{-k})| \\ &\le (C_2/2+(2^{2k}+1)C_{2k})|x|^{-k}. \end{aligned}$$

取$D_k = C_2/2+(2^{2k}+1)C_{2k}$, 即证$(\star)$. (4分)

3. 2021

计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}dx$. —换元

$t=\frac1x$. 则 $\int_0^{\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^3)}dt \Rightarrow 2I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{t}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dx$

七(10分)、

假设$f\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$|f(x)| \le \frac14\int_0^1|f''(t)|dt.$$

—Taylor定理常见应用

考虑积分余项.

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

定理 6.4.1(Taylor 公式的积分余项) 设函数 f 在(a,b)上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数,那么对任意固定的 $x_0\in(a,b)$,有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \quad (a<x<b).$$

$0=f(0)=f(x)+\frac{1}{1!}\int_x^0(0-t)f''(t)dt \Rightarrow f(x)=\int_0^x tf''(t)dt$

$0=f(1)=f(x)+\frac{1}{1!}\int_x^1(1-t)f''(t)dt \Rightarrow \quad = \int_x^1(1-t)f''(t)dt$

$|f(x)| = |xf(x)+(1-x)f(x)| \le x\int_x^1|(1-t)f''(t)|dt + (1-x)\int_0^x|tf''(t)|dt$

$\le x(1-x)\int_x^1|f''(t)|dt + x(1-x)\int_0^x|f''(t)|dt \le \frac14\int_0^1|f''(t)|dt$

8.(21final8) 设 $f\in C[0,1]$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}$ 存在且有限. 求证: 对任意 $g\in C[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 g(x)f(x^n)dx = g(1)\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx.$$

有高次项,一般要替代

解: 由g连续. $\frac{g(x)}{x}$在1处连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$. $1-\delta<x<1$ 时 $|xg(x)-g(1)|<\varepsilon$.

有 $n\int_0^1 f(x^n)dx = \int_0^1\frac{f(x^n)}{x^{n-1}}dx^n = \int_0^1\frac{1}{t^{\frac{n-1}{n}}}\cdot\frac{f(t)}{t}dt$

只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(g(t^{\frac1n})\cdot t^{\frac1n}-g(1)\right)\frac{f(t)}{t}dt=0$.

$\left|\int_0^{1-\delta}(x^{-1}g(x)-g(1))\frac{f(x^n)}{x^n}dx^n\right| \le C\int_0^{1-\delta}\frac{f(x^n)}{x^n}dx^n = C\int_0^{(1-\delta)^n}\frac{f(t)}{t}dt\to0$.

$\left|\int_{1-\delta}^1(x^{-1}g(x)-g(1))\frac{f(x^n)}{x^n}dx^n\right| \le \varepsilon\int_{(1-\delta)^n}^1\frac{f(t)}{t}dt\to\varepsilon\int_0^1\frac{f(t)}{t}dt\to0$. 证毕

2. 不通过计算, 直接证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = 0.$$

证明. 固定 $0<\epsilon<\pi$, 那么

$$0 \le \int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \int_0^{(\pi-\varepsilon)/2}\sin^n xdx + \int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2}\sin^n xdx \le \frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $0<\sin\frac{\pi-\varepsilon}{2}<1$, 有

$$0 \le \varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx \le \varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\varepsilon\to0$ 即证.

—分为两部分

- 微分中值定理, 构造辅助函数, 凑微分.

  Exercise. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$. 求证: 对于任意 $x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

  $$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

  证: $\exists\xi_1\in[a,x]$ s.t. $F'(\xi_1)=0$. $\exists\xi_2\in[x,b]$ s.t. $F'(\xi_2)=0$. $\Big\}\ \exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ s.t. $F''(\xi)=0$.

  有 $F''(t)=f''(t)-\lambda \Rightarrow \lambda=f''(\xi)$ 证毕.

  (Hint: 令 $\lambda=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, 构造辅助函数 $F(t)=f(t)-\frac{\lambda}{2}(t-a)(t-b)$, 那么 $F(a)=F(x)=F(b)=0$.)

  辅助函数法. Rolle定理应用

  Exercise. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

  $$f(b) = f(a) + \frac12(b-a)(f'(a)+f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

  同理可证.

  (Hint: 仿照上题得到 λ, 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac12(x-a)(f'(a)+f'(x))+\frac{\lambda}{12}(x-a)^3$, 那么 $F(a)=F(b)=F'(a)=0$.)

11. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数, 且存在常数 $C\ge0$ 使得

$$|f^{(n)}(x)| \le C, \quad \forall n\in\mathbb{N}_+, x\in\mathbb{R},$$

又有 $f(1/n)=0, \forall n\in\mathbb{N}_+$. 求证: $f(x)\equiv0$.

连续性知 $f(0)=0$

$\frac1n \quad \frac{1}{n-1} \quad \cdots \quad \frac12 \quad 1$ 由Rolle定理. $\exists\frac{1}{n+1}<x_n^{(1)}<\frac1n$ s.t. $f'(x_n^{(1)})=0$. ⇒连续知 $f'(0)=0$.

同理归纳有 $\forall n\in\mathbb{N}^*$. $f^{(n)}(0)=0$

则 $|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right| \le \frac{Cx^n}{n!}\to0$. 证毕.

4. 2022.

一、(10分) 得分

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导数且有反函数$f^{-1}(x)$, 已知$f(x)$有原函数$F(x)$, 求$\int f^{-1}(x)dx$.

—换元加分部积分

$\int_0^x f^{-1}(t)dt = \int_0^{f^{-1}(x)}udf(u) = xf^{-1}(x) - \int_0^{f^{-1}(x)}f(u)du = xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))$ 则 $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$

五、(10分) 得分

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上有二阶导数, 如果$|f''|$在(a,b)上的上界为M, 证明: 对任意$x,y\in[a,b]$, 有

$$\left|f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x)+f(y)}{2}\right| \le \frac{M}{8}(x-y)^2.$$

—找展开位置

思路: 想到Taylor展开. 要找展开位置. 中点处最好.

$t=\frac{x+y}{2}$ $h=\frac{x-y}{2}$ 则 $x=t+h$. $y=t-h$. $f(t+h)=f(t)+f'(t)h+\frac12f''(\xi_1)h^2$ $\xi_1\in(t,t+h)$

$f(t-h)=f(t)-f'(t)h+\frac12f''(\xi_2)h^2$ $\xi_2\in(t-h,t)$

于是 $f(t+h)+f(t-h)=2f(t)+\frac12(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))h^2$

故 $LHS = \left|f(t)-\frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}\right| = \frac{1}{16}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))(x-y)^2 \le \frac{M}{8}(x-y)^2$

六、(10分) 得分

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 并且对任一满足$\int_a^b g(x)dx = 0$的连续函数$g(x)$,

都有$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, 证明: $f(x)$ 是常值函数. → 证常值: ① 导数为0 ② $(f-c)^2=0$. 或同类形式.

即只需证$\exists c$. $(f-c)^2=0 \Leftrightarrow \int_a^b (f-c)^2=0$. → 只需能否构造$\int_a^b fg\,dx=0$

取$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=0$. 则$\int_a^b (f-A)dx=0$. 取$g=f-A$ 则有$0=\int_a^b (f-A)g\,dx=\int_a^b (f-c)^2dx$ 证毕

七、(20分) 得分

设$f(x)$在$[a,b]$上单调且有连续的导数, 令$S(t)=\int_a^b |f(x)-f(t)|dx$,

求$S(t)$在$[a,b]$上的最小值点和最小值.

→ 绝对值函数最好分段去掉绝对值.

5.2024

问题 1.3. 求定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$$

的值.

— 复杂积分不可能让直接算 — 一定有换元后相加的方法.

设$t=-x$. 有$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}dt \Rightarrow 2I=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt=\pi \Rightarrow I=\frac{\pi}{2}$

(2) 计算$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^3 x}{1+\tan^3 x}dx$。

解 令$t=\frac{\pi}{2}-x$，则$\tan x=\cot t=1/\tan t$，从而

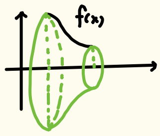
$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^3 x}dx, \qquad 2I=\int_0^{\pi/2}1\,dx=\frac{\pi}{2}, \qquad I=\frac{\pi}{4}$$

问题 1.5. 求曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕 y 轴旋转得到的旋转体的体积.

相关公式:

极坐标曲线$r(\theta)$围成面积: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$ 弧长: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

参数曲线$(x(t),y(t))$弧长: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$



体积$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ 面积$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

若绕y: $V=2\pi\int_a^b x f(x)dx$ $S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

绕x → 绕y 只需将其中的f(x)换为x.

(4) 圆周$(x-2)^2+y^2=1$绕y轴旋转一周，求旋转曲面表面积。

解 参数化$x=2+\cos t$，$y=\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$，则$ds=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=dt$，绕$y$轴旋转面积

$$S=\int_0^{2\pi}2\pi x\,ds=\int_0^{2\pi}2\pi(2+\cos t)\,dt=8\pi^2.$$

问题 5. 已知 $f(x)\in C^1[0,1]$，且 $f(0)=0$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)dx \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 (f'(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

见^2、$^{\frac{1}{2}}$ 基本为Cauchy-Schwarz.

↳ 见f'. 将f化为f'的积分.

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\int_0^x f'(t)dt\right)dx=\int_0^1\left(\int_t^1 f'(t)dx\right)dt=\int_0^1(1-t)f'(t)dt\le\left(\int_0^1(1-t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 [f'(t)]^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\int_0^1 f'^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f'^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$

问题 6. 已知 $f(x)$ 在任意有限区间上可积，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}=l$$

若f(x)有跳跃间断点, 则$\int f(x)dx$连续但不可导.

f(x)连续 则$\int f(x)dx$可导.

只说f(x)可积, 则$\int f(x)dx$不一定可导. 不能用L'Hospital法则

$\forall\varepsilon>0$. $\exists X_1>0$. $x>X_1$时 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 因f在$[0,X_1]$上可积, 记$M=\int_0^{X_1}f(x)dx$

$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^{X_1}f(t)dt+\frac{1}{x}\int_{X_1}^x f(t)dt$.

$\exists X_2>0$. $x>X_2$时 $\left|\frac{M-X_1 l}{x}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-l\right|=\frac{1}{x}\left|\int_0^{X_1}(f(t)-l)dt\right|+\frac{1}{x}\left|\int_{X_1}^x(f(t)-l)dt\right|<\varepsilon+\frac{x-X_1}{x}\varepsilon<2\varepsilon$. 证毕.

问题 7. 已知 $f(x)\in C^3(-\infty,+\infty)$，且 $|f(x)|$, $|f'''(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上均有界. 证明: $|f'(x)|$, $|f''(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界. 记 $M_i=\sup_{x\in\mathbb{R}}f^{(i)}(x)(i=0,1,2,3)$. 证明: $M_1\le\frac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{\frac{1}{3}}$.

└ 未知在何处展开. 则展开$f(x+h)$与$f(x-h)$

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi)}{6}h^3$ — 在x处展开可分析f的导数

$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f'''(\eta)}{6}h^3 \to f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}(f'''(\eta)+f'''(\xi))\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{M_0}{|h|}+\frac{M_3h^2}{6}$ M_1有界. 同理可证M_2有界

↳ $g(h)=\frac{M_0}{h}+\frac{M_3h^2}{6}$ 求导取最大值即可.

6.2025

(Q3) 已知$f\in C^1[0,2]$，$f(0)=f(2)=1$，且$|f'(x)|\le 1$，证明$1\le\int_0^2 f\le 3$。

— 用式子表达直观感觉

证 由$|f'|\le 1$得对任意$x\in[0,2]$，

$$f(x)\ge f(0)-\int_0^x|f'|\ge 1-x, \qquad f(x)\ge f(2)-\int_x^2|f'|\ge 1-(2-x)=x-1,$$

故$f(x)\ge\max(1-x,x-1)=|x-1|$，从而$\int_0^2 f\ge\int_0^2|x-1|\,dx=1$；同理

$$f(x)\le 1+x, \qquad f(x)\le 1+(2-x)=3-x \Rightarrow f(x)\le\min(1+x,3-x)=2-|x-1|,$$

故$\int_0^2 f\le\int_0^2(2-|x-1|)\,dx=3$。

(Q6) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$且当$x>0$时$f(x)\ge\frac{1}{x}$，证明$f$在$\mathbb{R}$上无原函数。

— 经典反证法.

证 反证。若存在F使$F'=f$于$\mathbb{R}$，令

$$G(x)=F(x)-\ln x \quad (x>0),$$

则G在$(0,+\infty)$上可导，且

$$G'(x)=F'(x)-\frac{1}{x}=f(x)-\frac{1}{x}\ge 0 \quad (x>0),$$

故G在$(0,+\infty)$上单调不减。于是对$0<a\le 1$有$G(a)\le G(1)$，即

$$F(a)-\ln a\le F(1)-\ln 1=F(1),$$

从而

$$F(a)\le F(1)+\ln a\xrightarrow[a\to 0^+]{}-\infty.$$

故F在0的右邻域内无下界，与F在0处连续（更不用说可导）矛盾。故f在$\mathbb{R}$上无原函数。

从题干入手.

(Q7) 设$a>0$，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续且在$\mathbb{R}$上有下界，且存在$C$使

$$f(x)+a\int_{x-1}^x f(t)\,dt=C \quad (\forall x\in\mathbb{R}),$$

证明f为常值。

证 令$m=\inf_{\mathbb{R}}f\in\mathbb{R}$，$g(x)=f(x)-m\ge 0$且$\inf_{\mathbb{R}}g=0$。代入得

$$g(x)+a\int_{x-1}^x g(t)\,dt=C-m(1+a)=:A \quad (\forall x), \qquad \Rightarrow A\ge 0. \qquad (*)$$

设$I(x)=\int_{x-1}^x g(t)\,dt$，则$I'(x)=g(x)-g(x-1)$，对(*)求导得

$$g'(x)+a(g(x)-g(x-1))=0.$$

令$h(x)=e^{ax}g(x)$，则

$$h'(x)=e^{ax}(ag(x)+g'(x))=ae^{ax}g(x-1)\ge 0,$$

故h单调不减，从而对$t\in[x-1,x]$有$e^{at}g(t)\le e^{ax}g(x)$。于是由(*)估计

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^x e^{at}g(t)\,e^{-at}dt\le g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^x e^{-at}dt=e^a g(x),$$

即$g(x)\ge Ae^{-a}$。取下确界并用$\inf_{\mathbb{R}}g=0$得$0\ge Ae^{-a}$，故$A\le 0$，结合$A\ge 0$得$A=0$。再由(*)与$g\ge 0$知$g\equiv 0$，即$f\equiv m$为常值。

7. 其它资料

题目 1. 设 $f(x)$ 的一阶导数在 [0,1] 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{4}\max_{[a,b]}|f'(x)|$$

主要是参数选择. 本令 $t=x-\frac{1}{2}$. 则易知.

解答. 令 $x-\frac{1}{2}=t$，则

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_{-\frac12}^{\frac12} f(t+\frac{1}{2})dt\right|$$
$$= \left|tf(t+\frac12)|_{-\frac12}^{\frac12} - \int_{-\frac12}^{\frac12} tf'(t+\frac12)dt\right|$$
$$\le \max_{[a,b]}|f'(x)|\left|\int_{-\frac12}^{\frac12}|t|dt\right| = \frac{\max_{[a,b]}|f'(x)|}{4}$$

题目3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in C^1(\mathbb{R})$，且$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=(f(x))^2$，求证：$f=0$

解答. 因为$f'(x)\ge 0$，所以$f(x)$是增函数

假设$\exists x_0$，使得$f(x_0)>0$，则$\forall x\ge x_0, f(x)>0$

所以$g(x)=\frac{1}{f(x)}$是$[x_0,+\infty)$上的可导函数，且$g'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}=-1, \forall x\in[x_0,+\infty)$

因为$g(x_0)=\frac{1}{f(x_0)}>0$，所以$x_0+g(x_0)\in[x_0,+\infty)$

由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x_0+g(x_0))$，使得$\frac{g(x_0+g(x_0))-g(x_0)}{g(x_0)}=g'(\xi)=-1$

所以$g(x_0+g(x_0))=0$，与$\forall x\in[x_0,+\infty), g(x)=\frac{1}{f(x)}$矛盾。

假设$\exists x_0$，使得$f(x_0)<0$，则同理考虑$(-\infty,x_0]$

所以$f=0$

题目 2. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导, $f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|$

证明: $\exists\delta>0$，使得 $f(x)\equiv 0, -\delta<x<\delta$.

对于多类导数, 由Taylor公式连接.

解答. 由 Taylor 定理, 在 0 处展开有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

因此只需要证明存在区间 $(-\delta,\delta)$, 使得 $f''\equiv 0$. 为了找到这个区间, 我们设

$$M_i=\sup|f^{(i)}(x)|$$

由题意我们有

反证.

$$M_2\le|f(x)|+|f'(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}x^2\right|+|f''(\eta)x|\le\frac{M_2}{2}\delta^2+M_2\delta$$

若对任意 $\delta>0, M_2>0$, 那么存在 δ 充分小, 使得

$$1>\frac{\delta^2}{2}+\delta$$

这是矛盾, 于是 $f''(x)\equiv 0$.

偏导连续 ⇒ 可微 $\not\Leftarrow$

可微 ⇒ 偏导存在 $\not\Leftarrow$

数分A2 期中部分

小测一

2026.3.23

谢惠民中的方法总结.

19.2.4 练习题

1. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|x-y|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

讨论:

(1) $f(x,y)$ 在点 (0,0) 是否连续?

(2) $f(x,y)$ 在点 (0,0) 是否可微? → 偏导不存在. 不可微

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明:

(1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在;

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 在点 (0,0) 不连续;

(3) $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微.

(本题也说明从可微不能推出偏导数连续.)

重点总结: ① 证明不可微: a. 偏导不存在 —— 可微则一定存在偏导.

b. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\Delta x f_x'(x_0,y_0)-\Delta y f_y'(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\ne 0$

② 证明偏导不连续: 求偏导表达式后发现重极限不存在

③ 偏导有界证连续: $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$\le|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)|+|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|$

$=f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y+f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x$

$\le M_1\Delta y+M_2\Delta x\to 0$

☆ 注意中值定理的运用

④ 全微分: $df=f_x dx+f_y dy$

例题 19.3.3 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数, 且 $f(x,x^2)\equiv 1$.

~~(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$;~~

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$.

⑤. 时刻注意函数是否只与某变量有关. 也可构造. 如: f_y'已知, 则 $F(x,y)=f(x,y)-\int f_y'(x,y)dy$ 只与x有关

设 $F=f(x,y)-\int f_y(x,y)dy=f(x,y)-x^2y-y^2$ 则 $F_y'=0$. F只与x有关

$y=x^2$时 $F(x)=1-2x^4$ 即有 $f(x,y)=x^2y+y^2-2x^4+1$

$f(x,x+y,x+y+z)=0$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

⑥ 隐函数求导后再次求偏导时要求全部参数的偏导!

有 $f_1+f_2+f_3(1+z_x')=0 \Rightarrow z_x'=-\frac{f_1+f_2+f_3}{f_3}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{3}[f_{i1}+f_{i2}+f_{i3}(1+z_x')]f_3-(f_1+f_2+f_3)\cdot[f_{31}+f_{32}+(1+z_x')f_{33}]}{f_3^2}$

(2) $(x^2-y^2-z^2)z_x+2xyz_y=2xz$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 确定的隐函数;

⑦ 隐函数求导的两种方法: a. 两边直接求偏导 —— 法一

b. 构造函数用隐函数定理求偏导 —— 法二

法一: 对x求偏导: $2x+2z_x'z=z_x'\cdot f'(\frac{z}{y}) \Rightarrow z_x'=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$ 同理可求y.

法二: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yf(\frac{z}{y})$

$F_x'=2x$ $F_z'=2z-f'(\frac{z}{y}) \Rightarrow z_x'=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$

(3) $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{x}{z}=\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$ 确定的隐函数, φ 二次连续可微, 且 $x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)\ne 0$;

⑧ 注意!! 隐函数求导时无论是否有 $z=z(x,y)$ 的类似关系. 一律将 x, y, z 视为单独的元变量! 如求x时无需考虑 z_x'!

设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\varphi(\frac{y}{z})$

则 $F_x'=\frac{1}{z}$ $F_y'=-\frac{1}{z}\varphi'(\frac{y}{z})$ $F_z'=-\frac{x}{z^2}+\frac{y}{z^2}\varphi'(\frac{y}{z})$

⑨ 遇到 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$ 时要想到线性方程组有非零解的 $\det A=0$.

有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z^2}\varphi'(\frac{y}{z})}=\frac{z}{x-y\varphi'(\frac{y}{z})}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\varphi'(\frac{y}{z})}{y\varphi'(\frac{y}{z})-x}$ ⇒ 可直接再求偏导验证原式正确性 (无思维含量)

寻找关系. → 于是 ⇒ $z=yz_y+xz_x$ 即 $\begin{cases}z_x=yz_{yx}+z_x+xz_{xx}\\ z_y=z_y+yz_{yy}+xz_{xy}\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}xz_{xx}=-yz_{xy}\\ yz_{yy}=-xz_{xy}\end{cases}$ 可知 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$ 得证

⑩ 反函数存在条件: Jacobi 行列式 $\ne 0$

例题 20.2.2 设 $u(x,y)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 确定的函数, 其中 f,g,h 均连续可微, 且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\ne 0$, 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

⑪ 自变量数 = 总数 − 因变量数

x, y 自变量. u, z, t 因变量. 则对y求导: $\begin{cases}g_1+g_2z_y'+g_3t_y'=0\\ h_1z_y'+h_2t_y'=0\end{cases}$ $u_y'=f_2+f_3z_y'+f_4t_y'$ 即得 代入

4. 设

$$\begin{cases} x = u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y = \sin\dfrac{v}{u}, \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$

求反函数组的偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y.

5. 设 $u = u(x)$ 是由方程组 $u = f(x, y, z), g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ 所确定. 求 $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{d^2u}{dx^2}$.

6. 求由方程组 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ 确定的 $z = z(x, y)$ 的所有二阶偏导数.

7. 设 $z = z(x, y)$ 为由方程组 $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = uv$ 所定义的函数, 求当 $(u, v) = (0, 0)$ 时的 dz, d^2z.

8. 设 $u = f(x, y, z), g(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 且已知 f 与 g 都有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{du}{dx}$.

⑫ 逆映射中 $\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1}$ (第4题)

即为偏导中x,y上下颠倒但数字不变的逆阵非直接求逆.

7. $dx = e^{u+v}(du + dv)$, $dy = e^{u-v}(du - dv)$ $\Big\}$ $du = \dfrac{dx+dy}{2}$, $dv = \dfrac{dx-dy}{2}$

$dz = v\,du + u\,dv$ 在 $(0,0) \Rightarrow dz = 0$.

$d^2z = 2du\,dv + v\,d^2u + u\,d^2v \Rightarrow d^2z = 2du\,dv = \dfrac{(dx)^2-(dy)^2}{2}$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_2 y' + f_3 z'$ (自变量只有x)

$g_1 + g_2 y' + g_3 z' = 0 \Rightarrow u_x$ 可求 $\Rightarrow u_{xx}$ 可求.

$h_1 + h_2 y' + h_3 z' = 0$

8. 自变量只有x. $\begin{cases} u_x = f_1 + f_2 y' + f_3 z' \\ 2x g_1 + e^y y' g_2 + z' g_3 = 0 \\ y' = \cos x \end{cases} \Rightarrow$ 可求.

⑬ 自变量与因变量均改变时.

a. 不替换为其它量, 只改变自变量与因变量的身份 (第一题)

可以求全微分后通过对比得出偏导数的值.

b. 画分叉关系图时 ①不能循环 ②每支最下面一定是自变量

1. 把方程 $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变为 x 作因变量, y, z 为自变量的形式.

$dx = \dfrac{\partial x}{\partial y}dy + \dfrac{\partial x}{\partial z}dz \Rightarrow dz = \dfrac{1}{\partial x/\partial z}dx - \dfrac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}dy$

核心: 写出微分式

于是有 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\partial x/\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}$ 代入后, 得: $\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{x}{y} - 1$

c. 全微分求解只转化自变量的问题时.

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv = \dfrac{\partial z}{\partial u}(\text{展开}du) + \dfrac{\partial z}{\partial v}(\text{展开}dv)$

找到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的表达式, 代入所给式子, 可得结果

4. 取 $u = y + ze^{-x}, v = x + ze^{-y}$ 为新的自变量, 变换微分式

$$F = (z + e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}).$$

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot(dy + e^{-x}dz - ze^{-x}dx) + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot(dx + e^{-y}dz - ze^{-y}dy)$

于是有 $\left(1 - \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot e^{-x} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot e^{-y}\right)dz = \left(\dfrac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)dx + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)dy$

即: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1 - \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot e^{-x} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot e^{-y}\right)^{-1}$ 代入原式即可

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1 - \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot e^{-x} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot e^{-y}\right)^{-1}$

5. 设 $u = xe^z, v = ye^z, w = ze^z$, 试以 w 为新的因变量, u, v 为新的自变量, 变换方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

d. 全微分求解自, 因变量均转化的问题时.

1° 建立原因变量与现因变量间的全微分关系

2° 通过因变量与各自变量之间的全微分关系可代入原式, 即可求解

$dw = (z+1)e^z dz = \dfrac{\partial w}{\partial u}du + \dfrac{\partial w}{\partial v}dv = \dfrac{\partial w}{\partial u}(e^z dx + xe^z dz) + \dfrac{\partial w}{\partial v}(e^z dy + ye^z dz)$

有 $dz = \lambda\,dx + \mu\,dy$ 形式, 代入原方程即可.

通式 (一般地, 设 $z(x,y)$ 为原, $w(u,v)$ 为后)

$dw = \lambda\cdot dz = \dfrac{\partial w}{\partial u}du + \dfrac{\partial w}{\partial v}dv = \dfrac{\partial w}{\partial u}(\text{展开}du) + \dfrac{\partial w}{\partial v}(\text{展开}dv)$

例题 21.1.2 求曲面

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

的切平面当切点 $M(u, v)$, $u \neq v$, 趋于曲面的边界 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 时的极限位置.

$\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}$ (略)

⑭ 曲面参数方程时的法向量: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$

则为 $\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

⑮ 求多元函数的极值.

a. 求出驻点 (各偏导为0)

b. 若有二阶偏导, 用Sylvester判别法

c. 考查 f_{x_i} 不存在的点是否为极值点

d. 考查不存在二阶偏导的驻点是否为极值点

小测一小归纳 (重要易错)

① (x_0, y_0) 处两偏导存在 $\not\Leftrightarrow$ 该点连续

② $\dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, f(x,x))] = f_1 + f_2(f_1 + f_2)$ 即链式法则

③ 用拉乘法时一定求出全部解!

④ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_A = \nabla u|_A \cdot \vec{n}$

例题 21.3.5 求 $z = \dfrac{1}{2}x^2 + xy + \dfrac{1}{2}y^2 - 2x - 2y + 5$ 的全部极值点与极值.

设 $z = f(x,y)$. $f'_x = x + y - 2$ $f'_y = x + y - 2$ $\Rightarrow$ 驻点为 $(x_0, 2 - x_0)$

$f''_{xx} = 1$ $f''_{xy} = 1$ $f''_{yy} = 1 \Rightarrow$ 无法判断是否为极值点

则通过函数本身判断. $z = \frac{1}{2}(x+y-2)^2 + 3 \Rightarrow$ 在直线 $x+y-2=0$ 上的点均为极小值点

其中极小值为3

又由z在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, 故无其他极值点

1. 2021

一、计算(给出必要的计算步骤)(每小题10分)

(1) 对方程 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

逆映射, 隐函数

(2) 设 $\mathbf{f}(x, y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$, 求 $\mathbf{Jf}$ 和 $\mathbf{J}(\mathbf{f}^{-1})$.

(1) $F(x,y,z) = e^z - xyz$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \dfrac{yz}{e^z - xy}$ 其余直接算

(2). $Jf = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$ 由于 $\det Jf = e^{2x} > 0$. 由逆映射定理, $J(f^{-1}) = (J(f))^{-1} = e^{-x}\begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$

三、(15分) 得分

设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 问:

(1) 当且仅当 $\varphi(x, y)$ 满足什么条件时? 偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 存在(需说明理由).

(2) 当且仅当 $\varphi(x, y)$ 满足什么条件时? $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微(需说明理由).

偏导定义: $f_x(x,y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$

证可微: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - \Delta x f'_x(x_0,y_0) - \Delta y f'_y(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$

(1). $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\cdot\varphi(\Delta x, 0) = \varphi(0,0)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 同理有 $f'_y(0,0) = \varphi(0,0)\lim\limits_{\Delta y \to 0}\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$ 于是 $\varphi(0,0) = 0$ 时两偏导数存在

(2). $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}}\dfrac{f(h,k) - f(0,0) - hf'_x(0,0) - kf'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}}\dfrac{|h-k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\varphi(h,k) = \varphi(0,0)\cdot\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}}\dfrac{|h-k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}}\sqrt{2}\varphi(0,0)$ 于是有 $\varphi(0,0) = 0$ 时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

Taylor展开: $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2] + o(\rho^2)$

$\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$

展为二阶时不再用 $o(\rho)$, 而是 $o(\rho^2)$

五、(10分) 得分

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 证明函数 $v = f(x^2 - y^2, 2xy)$ 也满足 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

算子的计算

设 $s = x^2 - y^2$; $t = 2xy$. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial f}{\partial s} + 2y\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y\dfrac{\partial f}{\partial s} + 2x\dfrac{\partial f}{\partial t}$ $\Big\}$ $\dfrac{\partial}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial}{\partial s} + 2y\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = -2y\dfrac{\partial}{\partial s} + 2x\dfrac{\partial}{\partial t}$

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right) + 2y\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$ 代入

有 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (4x^2 + 4y^2)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ 由s.t.后的条件知为0.

2. 2022

五、(20 分) 设函数 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$, 若 $(-1,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点，求常数 a,b 满足的条件。

$a=0$ 单独分出,不要忽略

$f_x=f_y=0 \Rightarrow b=2a$. Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} (b-3a)e & \\ & -2e \end{pmatrix}$ 负定,即 $b-3a=-a<0$. $\det J=2e^2(3a-b)>0 \Rightarrow a>0$

极大: 负定

极小: 正定

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 负定: $a_{11}<0$ $\det>0$

正定: $a_{11}>0$. $\det>0$

当 $a=0$ 时 $f(x,y)=-e^{-x}y^2\le 0$. 故 $(-1,0)$ 为极大值点 $\Rightarrow a\ge 0$.

六、(10 分) 设函数 $u=f(x,y,z)\in C^1(\mathbb{R}^3)$, 证明: u 仅为 r 的函数, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 当且仅当对非零的 x,y,z, 有 $\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}$ 成立.

只与…有关问题,构造正则映射

充分性: $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ s=y \\ t=z \end{cases}$ 是正则映射.因为 $\frac{\partial(r,s,t)}{\partial(x,y,z)}\ne 0$. $f'_x=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot 2x$ $f'_y=\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial r}\cdot 2y$, $f'_z=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial r}\cdot 2z$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial t}=0$. 即 f 只与 r 有关,证毕

(2) 设 u 和 v 是由方程组 $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$ 所确定的隐函数组, 求 u 和 v 的一阶全微分.

隐函数定理的应用

$\begin{cases} F_1=xu-yv. \\ F_2=yu+xv-1 \end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ 即有 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{pmatrix}=\cdots$

证明: 曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一个固定点, 其中 a, b, c 为常数.

切平面与法向量

切平面: $F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$. 过点 (a,b,c)

$F'_x=\frac{1}{z_0-c}F'_1$ $F'_y=\frac{1}{z_0-c}F'_2$ $F'_z=-\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}F'_1-\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}F'_2$

3. 2023

多阶偏导: $y=y(x)$, $z=z(x)$. $u=f(x,y,z)$. 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+y_xf_2+z_xf_3$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\cdots$ 以 $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ 为例. $\frac{\partial f_1}{\partial x}=f_{11}+f_{12}y_x+f_{13}z_x$ ☆

三、(20分) 得分

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内有二阶连续偏导数, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 求 $f(0,0)$ 及 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的一阶和二阶偏导数的值.

用Taylor展开求高阶偏导.

已求得: $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

有 $f(x,y)=\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2)+o(\rho^2)$ $f_{xx}(0,0)=0$ $f_{xy}(0,0)=1$

代入题干极限. $\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2+(f_{xy}(0,0)-1)xy+\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2=0 \Rightarrow f_{yy}(0,0)=0$.

注意截距可以为负.比例不一定非负 ☆

(与距离区分!)

四、(10分) 得分

证明曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\frac{y}{x}\right)$($f$ 可微)上任意点处的切平面在 oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数, 并求此常数.

五、(10分) 得分

已知曲面 $4x^2+4y^2-z^2=1$ 与平面 $x+y-z=0$ 的交线在Oxy平面上的投影为一椭圆, 求此椭圆的面积.

即消去 z.

椭圆面积: 对 $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$.

二次型: $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$. 两特征值为 λ_1, λ_2, 有 $a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}}}$ $S=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$

由 $z=x+y$. 消去 z: $3x^2-2xy+3y^2=1$. S 可求

六、(10分) 得分

设可微函数 $F(x,y)$ 可写成 $F(x,y)=f(x)+g(y)$, 又令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 时, 有 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=S(r)$, 试求 $F(x,y)$ 的表达式.

有条件: F 与 θ 无关, 则列式 $F_\theta=0$.

4. 2024

对Taylor展开,若能整体展开则更加简便!

求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 处的三阶带 Peano 余项的 Taylor 公式，并求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x+y)+xy-x-y}{x^2+y^2}.$$

$\ln(1+x+y)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+o((x+y)^3)$

已知曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$, 且 f 可微，证明该曲面为柱面。

找特殊性: 柱面法向量与一常向量垂直.

证明：令 $F(x,y,z)=e^{2x-z}-f(\pi y-\sqrt{2}z)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2e^{2x-z}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\pi f'(\pi y-\sqrt{2}z)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=-e^{2x-z}+\sqrt{2}f'(\pi y-\sqrt{2}z)$$

故曲面法向量为

$$\mathbf{n}=(2e^{2x-z},-\pi f'(\pi y-\sqrt{2}z),-e^{2x-z}+\sqrt{2}f'(\pi y-\sqrt{2}z))$$

下证明该法向量与一常向量 (a,b,c) 垂直。故有 $2a=c,\pi b=\sqrt{2}c$。不妨令 $c=2$, 则该常向量为 $(1,\frac{2\sqrt{2}}{\pi},2)$，这样该曲面的每一点的法向量 $\mathbf{n}$ 都与一定向量垂直，即为柱面。

设 $D=\{(x,y)\in R^2:x^2+y^2<1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，函数 $g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足条件：

1. 当 $x^2+y^2\to 1$ 时，$f(x,y)\to+\infty$;
2. 在 D 内 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 有二阶偏导数，$\Delta f=e^f$, $\Delta g\ge e^g$.

证明：$f(x,y)\ge g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

比大小.常设 $F=f-g$.

证明：

定义

$$F(x,y)=f(x,y)-g(x,y).$$

当 $x^2+y^2\to 1$ 时，$f(x,y)\to+\infty$，则 $F(x,y)$ 在 D 内必然存在极小值. 设该点为 (x_0,y_0)，若待证明不成立，则 $F(x_0,y_0)<0$. 此时

$$\Delta F|_{(x_0,y_0)}=\Delta f-\Delta g\le e^f-e^g|_{(x_0,y_0)}<0.$$

与极小值点矛盾.

(用极大(小)值点的 $\partial f=0$. $\partial^2 f\le(\ge)0$ 的性质

是常用于反证法的.

小测二

2026.3.24

例题 22.3.2 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy\,dz$, 其中 Ω 为由 $x=0,x=1,x^2+1=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$ 所围成.

三重积分 ①坐标变换 ②先定一变量范围,化为一重与二重积分

奇,为0

$I=\int_0^1 dx\iint\limits_{\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1+x^2}(x+y)\,dy\,dz=\int_0^1 \pi ab(1+x^2)x\,dx=\frac{3}{4}\pi ab$

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z$, $x=0$ 绕 z 轴旋转而成的曲面, 平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 所围成的区域.

$x^2+y^2=2z$ 设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3dr=2\pi z^2$ 原式 $=\int_2^8 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy=2\pi\int_2^8 z^2dz=336\pi$

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 4$ 的公共部分, 且 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\iiint\limits_{\Omega}xyz\,dxdydz=\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-(z-2)^2}xy\,dxdy+\int_1^2 z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}xy\,dxdy$

则 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-(z-2)^2}xy\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{4-(z-2)^2}}r^3dr=\frac{z^2(4-z)^2}{8}$

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}xy\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r^3dr=\frac{(4-z^2)^2}{8}$

于是 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,dxdydz=\frac{1}{8}\int_0^1 z^3(4-z)^2dz+\frac{1}{8}\int_1^2 z(4-z^2)^2dz=\frac{53}{60}$

1. 2021

计算 $(x^2+y^2+z^2)^{2021}=z^{4041}$ 围成的区域的体积.

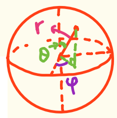
Solution. 用球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

积分区域:

$$r^{2n}\le r^{2n-1}\cos^{2n-1}\theta$$
$$0\le r\le\cos^{2n-1}\theta \text{ and } \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$\hookrightarrow$ θ为体角. 一定注意其范围.



$z\ge 0\Rightarrow\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

所以体积 =

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos^{2n-1}\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos^{6n-3}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi}{3(3n-1)}$$

代入 $n=2021$.

2. 2022

三、(10分) 得分

计算积分 $\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y):x,y\geqslant 0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$.

$x,y\ge 0\Rightarrow\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ —范围要首先进行确定.

五、(10分) 得分 —椭球坐标变换

求曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z\ge 0,a,b,c>0)$ 所围成立体的体积.

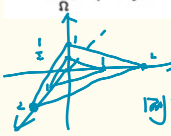
$\begin{cases}x=ar\sin\theta\cos\varphi\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\\ z=cr\cos\theta\end{cases}$ 则有 $\begin{cases}0\le r\le 1\\ \cos\theta\ge 0\\ \sin^2\theta\le\cos^2\theta\end{cases}$ 即有 $V=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}abcr^2\sin\theta\,d\theta=\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}abc$

六、(10分) 得分

Ω 为三个坐标平面与平面 $x+y+2z=1$, $x+y+2z=2$ 所围成的闭区域.

计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(x+y+2z)^2}dxdydz$.

常用的正则变换☆ $u=x$, $v=x+y$, $w=x+y+z$ 有 $|J|=1$



$\begin{cases}u=x\\ v=x+y\\ w=x+y+2z\end{cases}$ 则 $|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\frac{1}{2}$

则有 $I=\int_0^1du\int_1^2dv\int_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w^2}dw=\frac{1}{4}$

七、(10分) 得分

多重积分的最常用方法是交换积分次序 或正则映射.

设 f 是单变量连续函数, 计算 n 重累次积分 $\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n$.

$I=\int_0^1 f(x_n)dx_n\int_{x_n}^1dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^1dx_1=\int_0^1\frac{1}{(n-1)!}(1-x_n)^{n-1}f(x_n)dx_n$

4. 计算下列 n 重积分 (15 分)

$$\underset{\Omega}{\int\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

其中 $y_1=x_1$ $y_2=x_1+x_2$, …, $y_n=x_1+\cdots+x_n$ 即可. $|J|=1$

$\Omega=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1,x_i\geqslant 0,i=1,2,\ldots,n\}$.

九、(8分) 得分

设函数 $f(t)$ 是实数域R上严格递增且连续的奇函数, $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x-y+z)dxdydz$,

Ω 是由平面 $z=0$, 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 所围成的上半球体.

试判断 I 的值是大于0, 小于0或者等于0, 请给出理由.

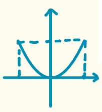
想到构造对称.

$I>\iiint\limits_{\Omega}f(x-y)\,dxdydz=0.$

3. 2023

三、(10分) —带绝对值一定分段去掉绝对值.

计算积分 $\iint\limits_{[-1,1]\times[0,1]}|x^2-y|dxdy$.



为 $\int_{-1}^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy=\frac{11}{15}$

六、(10分) 得分

Ω 由平面 $z=x$, $z=4x$, $z=y$, $z=4y$ 与曲面 $xyz=1$, $xyz=4$ 所围成的闭区域.

设单变量函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(1)=1$, $f(\frac{1}{4})=-1$.

计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{x}{z}f'(\frac{x}{z})+\frac{y}{z}f'(\frac{y}{z})\right]dxdydz$.

令 $u=\frac{x}{z}$, $v=\frac{y}{z}$, $w=xyz$. 则有 $\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|=3uv$

于是 $I=\int_{\frac{1}{4}}^1du\int_{\frac{1}{4}}^1dv\int_1^4\frac{uf'(u)+vf'(v)}{3uv}dw=\int_{\frac{1}{4}}^1du\int_{\frac{1}{4}}^1(\frac{f'(u)}{v}+\frac{f'(v)}{u})du=2\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{1}{v}dv\int_{\frac{1}{4}}^1f'(u)du=8\ln 2$

$\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$ 事实上为倒数关系.

在作为重积分变换的Jacobian时取绝对值.

7. 设 f 是单变量连续函数, 证明:

$$\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1f(t)\mathrm{d}t\right)^n.$$

解. 解法一: 用归纳法证明结论

$$\int_0^u\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^uf(t)\mathrm{d}t\right)^n,$$

再代入 $u=1$ 即得。

$n=2$ 时, $\int_0^uf(x_1)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{1!}\int_0^uf(x_1)\mathrm{d}x_1$ 自然成立。(低维情况写对得 2 分)

假设有

$$\int_0^u\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^uf(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1},$$

则由归纳假设

$$\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1},$$

代入得

$$\int_0^u\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n=\int_0^uf(x_1)\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1}\mathrm{d}x_1$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^u\left(\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right)^{n-1}\mathrm{d}\left(\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$=\frac{1}{n!}\left(\int_0^uf(t)\mathrm{d}t\right)^n.$$

8. 设 $f(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，且满足 $f(x,c)=0$. 证明：

$$\iint_I f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \frac{1}{2}(d-c)^2\iint_I\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

— 见此形式.基本可以确定使用Cauchy-Schwarz不等式.

解.

$$f(x,y)=\int_c^y\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

$$|f(x,y)|^2\le\left(\int_c^y 1\cdot\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\mathrm{d}t\right)^2\le\int_c^y 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_c^y\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}t$$

$$\le(y-c)\int_c^y\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}t. \qquad (5')$$

代入左边，并交换 $\mathrm{d}t,\mathrm{d}y$ 的次序。

$$\begin{aligned}\iint_I f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\le\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d(y-c)\mathrm{d}y\int_c^y\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}t\int_t^d(y-c)\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\frac{1}{2}\left((d-c)^2-(t-c)^2\right)\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}(d-c)^2\iint_I\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (5')\end{aligned}$$

证明：曲面 $z=4+x^2+y^2$ 上任一点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成立体的体积为定值.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+4-z$, 则曲面上任一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$, 从而 P 点处的切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$, 化简得 $2x_0x+2y_0y-z+4-x_0^2-y_0^2=0$. 联立

$$\begin{cases}2x_0x+2y_0y-z+4-x_0^2-y_0^2=0\\ z=x^2+y^2\end{cases}$$

— 较综合的问题

消去 z, 得方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4$. 令区域 $D=\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 4\}$, 则所求立体体积为

$$\begin{aligned}V&=\iiint dxdydz\\&=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x_0x+2y_0y+4-x_0^2-y_0^2}dz\\&=\iint_D(4-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2)dxdy\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)rdrd\theta\\&=8\pi\end{aligned}$$

4.2024

3 第三题

与积分进行关联

利用二重积分，计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{i}{i^2+j^2}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{i/n}{(i/n)^2+(j/n)^2}=\int_0^1dy\int_0^1\dfrac{x}{x^2+y^2}dx=1+\dfrac{1}{2}\int_0^1\ln(1+y^2)dy$

$\int_0^1\ln(1+y^2)dy=y\ln(1+y^2)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{2y^2}{1+y^2}dy=\ln2-2+2\int_0^1\dfrac{dy}{1+y^2}=\ln2-2+\dfrac{\pi}{2}$

$I=1+\dfrac{\ln2}{2}-1+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\ln2}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

小测三 2026.3.24

1.2021

1. 计算下列各题 (每题 10 分, 共 50 分)：

(a) 设 Γ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 在第二象限中的部分 $\int_\Gamma xyds=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}ab\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta=\dfrac{-ab(a^2+ab+b^2)}{3ab}$

计算 $\int_\Gamma xy\,ds$. — 一些基础计算内容.

(b) Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周，从第一卦限看 Γ, 逆时针方向为正向. 计算 $\int_\Gamma dx+y\,dy$.

用公式前确定维度.

$P=1\ Q=y\ R=0$ 由Stokes公式：$I=\iint(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0.$

不是Green！有 z！

(c) Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 计算 $\int_\Sigma x^2d\sigma$. 由对称性, $3I=a^2\cdot\dfrac{4\pi a^2}{8}\Rightarrow I=\dfrac{1}{6}\pi a^4$

(d) Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算积分

$$\iint_\Sigma dydz+y\,dzdx+y^2dxdy.$$

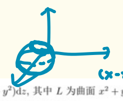
由Gauss公式. $I=\iiint_\Omega 1dxdydz=V(\Omega)=\frac{4}{3}\pi abc$

(e) 计算 $\int_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$, 其中 Γ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周，从原点看去，顺时针方向是 Γ 的正向.

有 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$, $\mathrm{rot}F=(-1,-1,-1)\Rightarrow I=\iint_\Sigma\sqrt2d\sigma=\sqrt2S(\Sigma)=2\sqrt2\pi$

$I=-\iint dydz+dzdx+dxdy=$

Stokes公式：若用 $d\sigma$ 更易. 可先求旋度 rot F 后·乘单位法向量 $\vec n$, 则积分变为 $\iint_\Sigma\mathrm{rot}F\cdot\vec{n}\,d\sigma$.



$-4y+4z\,d\sigma$

$\frac{1}{2}\iint_\Sigma 2(y-z)\cdot(x-2)+2(z-x)\cdot y+2(x-y)\cdot z\,d\sigma$

$=2\iint_\Sigma(z-y)d\sigma$

$\vec{n}=(x-2,y,z)\cdot\frac{1}{2}$

$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$=\frac{2}{z}dxdy$

$(x-2)^2+y^2+z^2=4$

$2\iint z-\frac{2y}{z}dxdy$

1-e. $\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=4x(z\ge0)$ 与曲面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从点 $(1,0,0)$ 看曲线 L 顺时针为正向。

解. 由于从点 $(1,0,0)$ 看曲线 L 顺时针为正向，故围成的曲面 Σ 的法向向上，为 $(x-2,y,z)$, 单位法向量为 $\frac{1}{2}(x-2,y,z)$. $(1')$ 由 Stokes 公式，

$$\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}x-2&y&z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2+z^2&z^2+x^2&x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\iint_\Sigma z-y\mathrm{d}\sigma \quad (4')$$

$(1,0,z_x)$

$(0,1,z_y)$

$(-z_x,-z_y,1)$

$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. ☆

Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x(z\ge0)$ 的一部分，在该面上有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x-2}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\quad(1')$$

代入计算得

$$\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\iint_{x^2+y^2\le2x}(z-y)\frac{2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(2')$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\le2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_{x^2+y^2\le2x}\frac{y}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{(*)}{=}4\pi.\quad(2')$$

3. 证明向量场 $\mathbf{v}=((2x+y+z)yz,(x+2y+z)zx,(x+y+2z)xy)$ 是有势场，并求出它所有的势函数. (10 分)

— 有势场 ⇔ 无旋场. 积分与路径无关 rot F = 0 (tip: 有势场不一定三维的)

$R_y-Q_z=0.\ P_z-R_x=0.\ Q_x-P_y=0$ 则V为无旋场, 则V为有势场, 积分与路径无关

设势函数为F. $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=(2x+y+z)yz\\\frac{\partial F}{\partial y}=(x+2y+z)zx\\\frac{\partial F}{\partial z}=(x+y+2z)xy\end{cases}$ $F=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}V\,d\vec{p}=\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(Pdx+Qdy+Rdz)=\int_0^x0dt+\int_0^y0dt+\int_0^z(x+y+2t)xy\,dt=x^2yz+xy^2z+xyz^2$

于是 $F(x,y,z)=x^2yz+xy^2z+xyz^2+C$ 为所有势函数

注意使用 $\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)}$ 时不要漏减下方和"1"所对应的项子

2.2022

(c) 计算积分

$$\int_\Sigma|y|\sqrt{z}d\sigma,$$

— $d\sigma=\|r_u\times r_v\|dudv$

其中Σ为曲面$z=x^2+y^2(z\leqslant1)$.

$\boldsymbol{r}=(r\cos\theta,r\sin\theta,r^2),\boldsymbol{r}_r=(\cos\theta,\sin\theta,2r),\boldsymbol{r}_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0).$

$\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta=(-2r^2\cos\theta,-2r^2\sin\theta,r),\|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta\|=r\sqrt{1+4r^2}.(3')$

$$\begin{aligned}\int_\Sigma|y|\sqrt{z}d\sigma&=\int_D|r\sin\theta|r^2\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^\pi\int_0^1r^3\sin\theta\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\quad(5')\\&=4\int_0^1r^3\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r\\&=\int_0^1r^2(1+4r^2)\frac{4r\mathrm{d}r}{\sqrt{1+4r^2}}\\&\overset{(*)}{=}\int_1^{\sqrt5}\frac{u^2-1}{4}u^2\mathrm{d}u\\&=\frac{5\sqrt5}{6}+\frac{1}{30}\quad(2')\end{aligned}$$

$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Sigma\mathrm{rot}F\cdot(dydz,\dots,\dots)$

$F=(P,Q,R)$

$=\int_\Sigma\mathrm{rot}\cdot\vec{n}\cdot d\sigma$

3. (15分)　得分

给定向量场$\mathbf{v}=(z,x,y)$, 证明$\mathbf{v}$是无源场，并且计算出$\mathbf{v}$的一个向量场势函数，其各分量均为关于x,y,z的不超过2次的多项式。

— 旋度场 ⟺ 无源场 div F = 0.

div V = 0 为无源场, 设A为V的向量势函数. $A=(A_1,A_2,A_3)$

则 $\begin{cases}\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}=z\\\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}=x\\\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}=y\end{cases}$ 设 $A_3=0$. 则 $A_2=-\frac{1}{2}z^2+f(x,y)$, $A_1=xz$, $\Rightarrow f_x=y$ 则取 $f=xy$

故 $A=(xz,-\frac{1}{2}z^2+xy,0)$ 若求一般的向量势函数. 则为 $\vec{A}=A+\nabla\varphi$. φ为R^3上连续可微函数

5. (10分)　得分

利用Green公式计算两区域$2x^2+y^2\leqslant4$与$x^2+2y^2\leqslant4$公共部分的面积。

由Green公式. $S=\int_\Gamma xdy=-\int_\Gamma ydx=\frac{1}{2}\int_\Gamma(xdy-ydx)$

$x=\sqrt2r\cos\theta$

$y=2r\sin\theta$

$S=8\int_\Gamma xdy=8\left(\int_0^{\theta_0}\sqrt2\cos\theta\cdot2\cos\theta d\theta+0+\int_{\frac{2\sqrt3}{3}}^{0}x\,dx\right)=8\sqrt2\arcsin\frac{\sqrt3}{3}-\frac{16}{3}$

$\theta_0=\arcsin\frac{\sqrt3}{3}$

3.2023

1.(10′) 计算

$$\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 Γ 为顺时针方向的单位圆周。

—对定义域外的奇点,做圆圈挖除

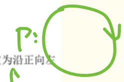
解. 直接计算得到答案。方向 (5′).

不能直接用 Green 公式:

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

在原点处 P,Q 的偏导数不连续，故不能直接使用 Green 公式。

设 $D_\varepsilon=B_1(0)\backslash B_\varepsilon(0), \varepsilon<1$, 在 D_ε 中 P,Q 有连续的偏导数，设其边界的正向定为沿正向左边为区域内部，故由 Green 公式，



$$\int_{\partial D_\varepsilon} = \int_P - \int_{\partial B_\varepsilon}$$

∂B_ε: ↺

$$\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\left(\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right)=-2\pi.$$

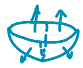
3. 计算第二型曲面积分

$$\iint_\Sigma 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

—对不完整曲面,补全了用Gauss定理

其中Σ 是曲线$z=e^y, 0\le y\le a$, 绕z轴旋转生成的旋转曲面，取下侧。(15分)

解：这不是一张封闭的曲面，我们补上$\Sigma_1: z=e^a, x^2+y^2\le a^2$,上侧, 构成有界闭区域Ω。由Gauss公式得



$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_\Omega(4z-2z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=0.$$

在平面Σ_1上的积分为

$$\iint_{\Sigma_1}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma_1}1-e^{2a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=(1-e^{2a})\pi a^2.$$

即 $\int_{-\Sigma} F = \int \mathrm{rot}F\cdot\vec{n}\,d\sigma$

所以

$$\iint_\Sigma 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(e^{2a}-1)\pi a^2.$$

(1) 记 $\vec{p}=(x,y,z), p=\|\vec{p}\|$, Σ 是球面 $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=r^2\}$, 方向向外, 计算第二型曲面积分　Σ上p=r

$$\iint_\Sigma\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p^3}.$$

(2) 设 $D=\mathbb{R}^3\backslash\{\vec{0}\}$, 判断 $\vec{F}=\frac{\vec{p}}{p^3}$ 是否是 D 上的旋度场，若是，找出他的向量势；若否，详细说明原因。

第二型曲面积分 $\iint_\Sigma P dydz+Q dzdx+R dxdy$ 可转化第一型曲面积分 $\iint_\Sigma (P,Q,R)\cdot\vec{n}\,d\sigma$, 即 $\iint_\Sigma \vec{F}\,d\vec{s}=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}\,dV$

解. (1) 单位法向量: $\vec{n}=\frac{1}{p}(x,y,z)$, $\vec{F}(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{p^3}$.

$$F=(\tfrac{x}{p^3},\tfrac{y}{p^3},\tfrac{z}{p^3})\leftarrow\iint_\Sigma\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p^3}=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{r^2}\iint_\Sigma\mathrm{d}\sigma=4\pi.\quad(5')$$

或Gauss定理 $I=\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi$

(2) 假设存在 G, s.t. $\vec{F}=\nabla\times G$, 则

$$\iint_\Sigma\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p^3}=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma=\iint_\Sigma(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$$
$$=\iint_{\Sigma_1}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma+\iint_{\Sigma_2}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$$

其中，Σ_1 是上半球面，Σ_2 是下半球面，根据法向量知他们的边界方向相反，根据 Stokes 公式

$$\iint_{\Sigma_2}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial\Sigma_2}G_1\mathrm{d}x+G_2\mathrm{d}y+G_3\mathrm{d}z$$
$$=-\int_{\partial\Sigma_1}G_1\mathrm{d}x+G_2\mathrm{d}y+G_3\mathrm{d}z=-\iint_{\Sigma_1}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma.$$

因此

$$\iint_\Sigma\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p^3}=\iint_{\Sigma_1}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma+\iint_{\Sigma_2}(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma=0.$$

与 (1) 中结果矛盾，故 $\vec{F}$ 不是旋度场。(10′)

6. (10分) 设$\rho(x,y,z)$ 是原点到椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的任一点(x,y,z) 处的切平面的距离, 计算积分:

$$\int_S\frac{d\sigma}{\rho(x,y,z)}$$

$\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\rho}$　$F(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})=\frac{1}{\rho^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$

找合适的F

得到 $\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$ 有单位法向量 $\vec{n}=\rho(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$

取$\vec{F}$ s.t. $\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\rho}\Rightarrow\vec{F}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})\Rightarrow$由Gauss定理, $I=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega\mathrm{div}\vec{F}\,dV=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\cdot\frac{4}{3}\pi abc$

$\iint F(dydz,\cdots,\cdots)=\iint\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$

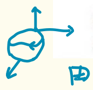
4.2024

二、(15 分) 计算积分

$$\int_\Gamma(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz,$$

取球面来算

其中曲线 Γ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线 ($z\geqslant0$), 曲线方向从原点进入第一卦限。



法向量方向:曲线方向右手定则所指方向.

精确为二重积分: 若$z=\varphi(x,y)$. 则 $\int_\Sigma f\,d\sigma=\iint_D f\cdot\sqrt{1+(\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2}\,dxdy$

由Stokes公式: $\mathrm{rot}\vec{F}=(2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)$ $\vec{n}=\frac{-(x-2,y,z)}{2}$ 则 $I=\iint_\Sigma\mathrm{rot}\vec{F}\,d\vec{s}=\iint_\Sigma\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_\Sigma(2y-2z)d\sigma$

由对称性. $I=-2\iint_\Sigma z\,d\sigma$. 有 $z=\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}\Rightarrow$ 有 $\iint_\Sigma z\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}z\cdot\frac{2}{z}dxdy=2\iint_{D_{xy}}dxdy=2\pi$ 则 $I=-4\pi$

六、(10 分) 设 Σ 为曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在椭球面 $x^2+y^2+4z^2=2$ 内的部分，证明:

$$\iint_\Sigma\sqrt{x+y+2z+1}\,d\sigma\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

LHS $=\iint_\Sigma\sqrt{x+y+x^2+y^2+1}\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$ 用Cauchy-Schwarz不等式.

七、(10 分) 设函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有一阶连续偏导数，对于任意 $r>0$, 任意点 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, 以其为球心，$r$ 为半径的上半球面 S 上的积分始终满足:

$d\sigma=\|r_u\wedge r_v\|\,dudv$

$$\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=0.$$

补全用Gauss定理

证明: $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0, R=0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中处处成立.

补全,补齐为D. D上$z=z_0$. 则 $I=\iint_D R\,dxdy$ 用积分中值定理. $\exists(\xi_1,\eta_1,z_0)\in D,(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)\in V$. 有 $(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})|_{(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3=R(\xi_1,\eta_1,z_0)\cdot\pi r^2$

令$r\to0$. 有$R=0$. 又由(x_0,y_0,z_0)任意性$\Rightarrow R\equiv0$ 再用积分中值定理. $(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})|_{(\xi,\eta,\zeta)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3=0$. 由连续性与任意性 $\Rightarrow P_x+Q_y=0$.

期中.期末综合

2026.3.25.

tip:期中在号有标注

1.2025(中)

(1) 计算曲面$\mathbf{r}=(u\sin v,u\cos v,v)$在点$(\sqrt{2},\sqrt{2},\pi/4)$点处的切平面和法线方程。

对曲面参数形式.有$\vec{n}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}$

$r_u=(\sin v,\cos v,0)$, $r_v=(u\cos v,-u\sin v,1)\Rightarrow\vec{n}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}|_{(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{4})}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$

则切平面: $1\cdot(x-\sqrt{2})-1\cdot(y-\sqrt{2})-2\sqrt{2}\cdot(z-\frac{\pi}{4})=0$.

法线: $\frac{x-\sqrt{2}}{1}=\frac{y-\sqrt{2}}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2\sqrt{2}}$

六、(10分) 设光滑封闭曲面S的方程是$F(x,y,z)=0$. 证明: S上任意两个相距最远的点处的切平面相互平行，且垂直于这两点之间的连线。

Lagrange乘数法.

步骤1: 建立拉格朗日函数 ∇F_P与∇F_Q线性相关

设 $P=(x_1,y_1,z_1)$、$Q=(x_2,y_2,z_2)\in S$, 则 $F(x_1,y_1,z_1)=0$, $F(x_2,y_2,z_2)=0$。

两点间距离的平方为:

$f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$

构造拉格朗日函数:

$L=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-\lambda F(x_1,y_1,z_1)-\mu F(x_2,y_2,z_2)$

其中 λ,μ 为拉格朗日乘数。

步骤2: 求极值的必要条件

对 L 分别关于 x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 求偏导并令其为0:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-x_2)-\lambda F_x(x_1,y_1,z_1)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y_1}=2(y_1-y_2)-\lambda F_y(x_1,y_1,z_1)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z_1}=2(z_1-z_2)-\lambda F_z(x_1,y_1,z_1)=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2(x_1-x_2)-\mu F_x(x_2,y_2,z_2)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y_2}=-2(y_1-y_2)-\mu F_y(x_2,y_2,z_2)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z_2}=-2(z_1-z_2)-\mu F_z(x_2,y_2,z_2)=0\end{cases}$$

记向量 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=-\overrightarrow{QP}$, 则前3式可写为:

$\overrightarrow{QP}=\frac{\lambda}{2}\nabla F(P)$

后3式可写为:

$\overrightarrow{PQ}=-\frac{\mu}{2}\nabla F(Q)$

因此:

$\overrightarrow{QP}=\frac{\lambda}{2}\nabla F(P)=\frac{\mu}{2}\nabla F(Q)$

步骤3: 证明切平面平行

曲面 S 在点 P 处的切平面法向量为 $n_P=\nabla F(P)=(F_x(P),F_y(P),F_z(P))$, 在点 Q 处的切平面法向量为 $n_Q=\nabla F(Q)=(F_x(Q),F_y(Q),F_z(Q))$。

由上式可知: $\nabla F(P)=\frac{\mu}{\lambda}\nabla F(Q)$ ($\lambda\neq0$, 否则 $\overrightarrow{QP}=0$, 两点重合, 矛盾), 即 n_P 与 n_Q 共线。

切平面平行的充要条件是法向量共线, 因此 P,Q 处的切平面相互平行。

步骤4: 证明切平面垂直于两点连线

由 $\overrightarrow{QP}=\frac{\lambda}{2}\nabla F(P)$, 可知 $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$ 与 $\nabla F(P)$ 共线; 同理 $\overrightarrow{PQ}$ 也与 $\nabla F(Q)$ 共线。

而切平面的法向量 $\nabla F(P),\nabla F(Q)$ 垂直于切平面, 因此与法向量共线的 $\overrightarrow{PQ}$ 也垂直于切平面, 即两点连线垂直于切平面。

七、(10分) 设$\mathbf{f}:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$是满射, 且存在常数$C,\gamma>0$, 使得对任意$x,y\in[0,1]$都有$\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(y)\|\le C|x-y|^\gamma$成立。证明: $\gamma\le\frac{1}{2}$.

—反证法.

若$\gamma>\frac{1}{2}$, 将$[0,1]$分为$I_k=[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ $k=1,2,\cdots,n$. 对$\forall x,y\in I_k$, $\|f(x)-f(y)\|\le C|x-y|^\gamma\le C(\frac{1}{n})^\gamma$

由满射: $\mathrm{Area}(f(I_k))\le C^2n^{-2\gamma}\Rightarrow\mathrm{Area}(f[0,1])=1\le n\cdot C^2n^{-2\gamma}$ 则 $C^2n^{1-2\gamma}\ge1$ $\forall n\in\mathbb{N}$.矛盾!

2.2016

2. (15分) 设点$P_0(x_0,y_0,z_0)$在曲面$F(x,y,z)=1$上并满足$\nabla F|_{P_0}\neq0$。若函数F在P_0的某邻域U内可微且为n次齐次, 即

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z),\forall t>0,(x,y,z)\in U,$$

证明: 此曲面在P_0处的切平面方程为

$$xF'_x(P_0)+yF'_y(P_0)+zF'_z(P_0)=n.$$

—切平面问题.

在P_0处. $F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0$.

对t求导: $\frac{\partial}{\partial t}F(tx,ty,tz)=xF_x'+yF_y'+zF_z'=nt^{n-1}F(x,y,z)$. 令$t=1$. 得证.

3. 2018

二、(15分) 得分

在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点, 使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\mathbf{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ 的方向导数的值最大.

方向导数最大为梯度.

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\nabla f\cdot\vec{l}$

$(2x,2y,2z)\parallel(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)\Rightarrow\begin{cases}x=-y\\z=0\end{cases}\Rightarrow$ $A:(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\vec{\nabla f_A}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)=\sqrt{2}$

$B:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\vec{\nabla f_B}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)=-\sqrt{2}$.

故此点为$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$

七、(10分) 得分

设函数$f(x,y)$在原点附近有直到二阶的各种形式的连续偏导数, S是球面$x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)$, 求$\lim\limits_{r\to0^+}\frac{\iint\limits_S[f(x,y)-f(0,0)]d\sigma}{r^4}$的值.

考虑Taylor展开

$f(x,y)-f(0,0)=xf_x+yf_y+\frac{x^2}{2}f_{xx}+xyf_{xy}+\frac{y^2}{2}f_{yy}+o(x^2+y^2)$ 积为$o(r^4)$. ⇒除为$o(1)$

常数×x/y/xy. 为奇函数积分为0.

原式$=\lim\limits_{r\to0^+}\frac{\iint\limits_S(\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}y^2)d\sigma}{r^4}$ $a=f_{xx}(0,0)$. $b=f_{yy}(0,0)$

球坐标变换. $=\iint\limits_\Delta(\frac{a}{2}\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{b}{2}\sin^2\theta\sin^2\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{2}{3}\pi(f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0))$

五、(10分) 得分

计算第二型曲线积分$\int_{L^+}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$, 其中$L$为不通过原点的简单光滑闭曲线, L^+为逆时针方向.

分类: 原点是否在L的内部.

八、(10分) 得分

设$f(x,y)$为具有二阶连续偏导数的二元齐次函数, 即对任意x,y,t成立$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

(1) 证明: $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=2f(x,y)$.

(2) 设D是由$L:x^2+y^2=4$所围成的闭区域, 证明:

$$\int_L f(x,y)ds=\iint_D(\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2})dxdy\ .$$

见此式. 先对t导.

对$\vec{F}=(P,Q)$. $\oint_L\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\oint_L-Qdx+Pdy$

七、(10分) 得分

设在上半平面$D=\{(x,y):y>0\}$内, 函数$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数, 且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L, 都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

(2). $LHS=\oint_L(f_x',f_y')\cdot(\frac{x}{2},\frac{y}{2})ds$ $(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$为单位外法向量. 则$LHS=\oint_L-f_y'dx+f_x'dy=\iint_D\Delta f dxdy$

4. 2020

7. 计算曲线$x^2+y^2-2z=0$, $x^2+xy+y^2-1=0$上与原点距离的极值。

基础Lagrange乘子问题

$L=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-2z)-\mu(x^2+xy+y^2-1)$ $\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{\partial L}{\partial \mu}=0\Rightarrow$有$r_{min}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

8. 设$\Phi(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$.

(1)证明: Φ局部为单射且为开映射, 但整体不是单射。

只需证$|J_\Phi|\neq0$. 有$|J_\Phi|=e^{2x}$. ✓.

10. 设A,B为$\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$上给定的两点, 向量场$F=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$, 计算$\int_A^B F\cdot dr$.

只需求F的势函数.

有$F=\nabla u$. $u=\ln r$. r为与原点距离. 由F为保守场(无旋). 则有$I=\ln\frac{r_B}{r_A}$

9. 设Σ为圆心在$(1,0,0)$半径为2的球面, n为其单位外法向量, 向量场$E=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$. 计算$\int_\Sigma E\cdot n\,dS$.

类似二维, 三维挖球

除原点外. 有$\mathrm{div}E=0$. 原点在Σ内部. 取半径足够小的球面. $\Sigma_\varepsilon:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$. 有$\partial\Omega=\Sigma\cup\Sigma_\varepsilon$ Σ为外法向. Σ_ε为内法向. $\vec{n}_\varepsilon=\frac{-1}{\varepsilon}(x,y,z)$

$\iint\limits_\Sigma\vec{E}\cdot\vec{n}dS+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\vec{E}\cdot\vec{n}_\varepsilon dS=\iiint\limits_\Omega\mathrm{div}\vec{E}dV=0.\Rightarrow\iint\limits_\Sigma\vec{E}\cdot\vec{n}dS=-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\vec{E}\cdot\vec{n}dS$. $\vec{E}\cdot\vec{n}_\varepsilon=\frac{(x,y,z)}{\varepsilon^3}\cdot-\frac{1}{\varepsilon}(x,y,z)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\vec{E}\cdot\vec{n}dS=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}dS=-4\pi\Rightarrow I=-(-4\pi)=4\pi$.

5. 2021

四、(20分) 得分

设点P是椭球面$S:x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点, S在点P处的切平面与坐标平面oxy垂直, 求点P的轨迹L, 并计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma\frac{(x+3)\sqrt{|y-2z|}}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}d\sigma$, 其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$L$上方的部分.

更正：分子应当没有根号

$\iint\limits_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_\Sigma\vec{F}d\vec{S}$ $\vec{S}=(dydz,dzdx,dxdy)$

法向量: $(2x_0,2y_0-z_0,2z_0-y_0)$ 则有$y_0=2z_0\Rightarrow L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\y=2z\end{cases}$ 则L为$\begin{cases}x^2+3z^2=1\\y=2z\end{cases}$ 为椭圆 ⟶ $x^2+\frac{3}{4}y^2=1$

上方: $z>\frac{y}{2}$. 故$I=\iint\limits_\Sigma\frac{(x+3)(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}d\sigma$ 故有$\vec{n}=\frac{(2x,2y-z,2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}$ 取$\vec{F}=(0,0,x+3)$. 则$I=\iint\limits_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_\Sigma\vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_\Sigma(x+3)dxdy=3\iint\limits_\Sigma dxdy=3\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\pi$

$4x_0^2+(2y_0-z_0)^2+(2z_0-y_0)^2=4+y_0^2+z_0^2-4y_0z_0$

六、(10分) 得分

计算由三个圆柱体$x^2+y^2\le a^2$, $x^2+z^2\le a^2$和$y^2+z^2\le a^2(a>0)$交成的几何体的体积.

在第一卦限. $0\le x\le y\le a$时 $V_1=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}dx\int_x^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a^3$. 则有$V_总=16V_1=8(2-\sqrt{2})a^3$

八、(10分) 得分

设$f(x)$和$g(x)$在$\mathbf{R}$上, $K(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上都是连续的正值函数, 且满足$\int_0^1f(y)K(x,y)dy=g(x)$, $\int_0^1g(y)K(x,y)dy=f(x)$.

(1) 证明: 若$m=\min\limits_{0\le x\le1}\frac{f(x)}{g(x)}$, $M=\max\limits_{0\le x\le1}\frac{f(x)}{g(x)}$, 则$mM=1$.

(2) 证明: 当$0\le x\le1$时, $f(x)=g(x)$.

第二问信(?)任用第一问的提示.

(1). $g=\int_0^1f(y)K(x,y)dy=\int_0^1g(y)\cdot\frac{f}{g}K(x,y)dy\le\int_0^1Mg(y)K(x,y)dy=Mf.\Rightarrow\frac{f}{g}\ge\frac{1}{M}\Rightarrow Mm\ge1$ 同理$Mm\le1$. 证毕

(2). 设$h=\frac{f}{g}$. $\begin{cases}g(x)=\int_0^1g(y)h(y)K(x,y)dy\\\int_0^1g(y)K(x,y)dy=g(x)h(x)\end{cases}$ (由题干条件转化) $\Rightarrow g\ge m\int_0^1g(y)K(x,y)dy$ 即$Mg\ge g(x)h(x)$

取x_0 s.t. $h(x)$最大. 有$Mg(x)=g(x)h(x)$ 若$h\neq m$. 则$Mg>gh$矛盾. 则$h\equiv m=M=1$. 即$f\equiv g$.

6. 2023

二、(15分) 求函数$f(x,y)=x+y+xy$在曲线$x^2+xy+y^2=3$上的最大方向导数。

条件下的最大方向导数不一定为梯度处. 用Lagrange.

$\nabla f=(1+y,1+x)$. $\|\nabla f\|=\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}$. 化为条件极值.

7.2024

七、(10分)　　得分

设函数$f(x,y)$在R^2上有一阶连续偏导数，令$r=\sqrt{x^2+y^2}$，满足$\lim\limits_{r\to+\infty}(xf_x'+yf_y')=a>0$，证明：函数$f(x,y)$在$R^2$上有最小值.

考虑极坐标变换 $(x,y)\to(r,\theta)$，则 $f_r'=f_x'\cos\theta+f_y'\sin\theta$　(1')

于是，$xf_x'+yf_y'=rf_r'$.　(3')

由题目条件，$\exists R>0$，s.t. 当 $r>R$ 时，总有 $rf_r'>\frac{a}{2}>0 \Rightarrow f_r'>0$.　(5')

考虑闭域 $\overline{B_R(0)}$，f 在 $\overline{B_R(0)}$ 上连续，则在其上存在最小值点 $(x_0,y_0)\in\overline{B_R(0)}$.

记 $f(x_0,y_0)=m$.　(7')

任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，分两种情形讨论：

① 若 $(x,y)\in\overline{B_R(0)}$，则 $f(x,y)\geq m$. 已成立.　(8')

② 若 $(x,y)\in(\overline{B_R(0)})^c$，则考虑 (x,y) 与 $(0,0)$ 连接的一条直线段，其与 $\partial B_R(0)$ 交于一点 (x_1,y_1)，则 $f(x_1,y_1)\geq m$. 又由于 $r>R$ 时 $f_r'>0$，则 $f(x,y)>f(x_1,y_1)\geq m$.　(10')

综上可知，$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上 (x_0,y_0) $(\in\overline{B_R(0)})$ 处取最小值 m.

直接考虑Green公式

八、(10分)　　得分

设D是R^2上的有界单连通域，且原点$(0,0)\in D$，函数$f(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数，且在D的边界上，$f(x,y)=0$，计算$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$，其中$D_\varepsilon=D\backslash B_\varepsilon((0,0))$.

— Green公式配凑

~~先考虑极坐标变换 $(x,y)\to(r,\theta)$，则 $f_r'=f_x'\cos\theta+f_y'\sin\theta$~~

~~于是 $xf_x'+yf_y'=rf_r'$，$dxdy=rdrd\theta$.~~

通过配凑Green公式，得到

$$\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx)\quad(4')$$

$$=\int_{\partial D^+}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx)+\int_{\partial B_\varepsilon^-}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx)$$

$$=-\int_{\partial B_\varepsilon^+}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx).\quad(*)\quad(6')$$

$F=\frac{(x,y)}{x^2+y^2}f$　$\vec{n}=\frac{1}{\varepsilon}(x,y)$

$\iint\limits_{D_\varepsilon}\nabla\cdot F\,d\sigma=-\oint\limits_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,ds=-\frac{1}{\varepsilon}\oint\limits_{\partial B_\varepsilon}f\,ds$

$=-2\pi\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}f(0,0)$

$=-2\pi f(0,0)$

考虑极坐标变换 $x=\varepsilon\cos\theta$，$y=\varepsilon\sin\theta$，则有：

$$(*)=-\int_0^{2\pi}\frac{f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\varepsilon^2}(\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta)d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta\quad(8')$$

由 f 的连续性，可知：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$$

$=-\int_0^{2\pi}\left(\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\right)d\theta=-2\pi f(0,0)$.（这里也可按用积分中值公式写）

9. (6 分) 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在单位圆盘 $U=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant1\}$ 上有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$，证明：在单位圆周上存在一点 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.　(2019B2)

$0=\iint\limits_D(g_x-f_y)ds=\oint\limits_{\partial D}f(x,y)dx+g(x,y)dy\xlongequal[y=\sin\theta]{x=\cos\theta}\int_0^{2\pi}-\sin\theta f(\cos\theta,\sin\theta)+\cos\theta g(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta\Rightarrow\exists\theta_0$ 使 $\xi=\cos\theta_0$，$\eta=\sin\theta_0$，时 $f(\xi,\eta)\cdot\eta=g(\xi,\eta)\cdot\xi$

8.2025

一. (15分) 设 $\alpha>1$. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{y^\alpha}{\sqrt{x+y^2}}\,dx\,dy$，其中 D 是由直线 $x=0,y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的区域.　— 灵活换元.

解　作变换 Φ：$x=r^2\cos^2\varphi$，$y=r\sin\varphi$. 则 $|J\Phi|=2r^2\cos\varphi$，且此变换将矩形 $D'=\{(r,\varphi):0\leqslant r\leqslant1,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ 映成 D. 故，

$$\iint_D\frac{y^\alpha}{\sqrt{x+y^2}}\,dx\,dy=\iint_{D'}\frac{r^\alpha\sin^\alpha\varphi}{r}\cdot2r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi$$
$$=2\int_0^1r^{\alpha+1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$
$$=2\cdot\frac{1}{\alpha+2}\cdot\frac{1}{\alpha+1}.$$

于是所求积分的值为 $\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$.

四. (15分) 设 n 是正整数，Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，法向朝外. 计算

$$I=\iint_\Sigma x^n\,dy\,dz+y^n\,dz\,dx+z^n\,dx\,dy.$$

由Gauss公式，$I=n\iiint\limits_\Omega(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})dxdydz$ ←若直接算，太麻烦，用广义球坐标变换+对称性

取 $x=au$，$y=bv$，$z=cw$，则 $J=abc$. 则 $I=nabc\iiint\limits_\Omega(a^{n-1}u^{n-1}+b^{n-1}v^{n-1}+c^{n-1}w^{n-1})dudvdw=nabc(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\iiint\limits_\Omega w^{n-1}dudvdw$

由于 u,v,w 为球坐标下，可以 $u=r\sin\theta\cos\varphi$，$v=r\sin\theta\sin\varphi$，$w=r\cos\theta$，则 $I=nabc(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1r^{n-1}\cos^{n-1}\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr=abc(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\cdot\frac{4\pi}{n+2}$

五. (本题14分，每小题 7 分) 设有平面向量场 $\vec{\mathbf{F}}=\left(\dfrac{-y}{a^2x^2+b^2y^2},\dfrac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\right)$，其中 a,b 都是正实数.

(1) 求 $\vec{\mathbf{F}}$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\}$ 的所有势函数;

(2) 证明 $\vec{\mathbf{F}}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.　— 证明非保守场

只需证闭曲线积分非0:

适用于绕奇点(如此题原点)的闭曲线.

解: (1)

$$\varphi(u,v)=\int_{(1,0)}^{(u,v)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}dx+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}dy$$
$$=\int_{(1,0)}^{(u,0)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}dx+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}dy$$
$$+\int_{(u,0)}^{(u,v)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}dx+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}dy$$
$$=\int_0^v\frac{u}{a^2u^2+b^2y^2}dy$$
$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{bv}{au}.$$

故，所求的势函数为 $\varphi(x,y)=\frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}+C$，其中 C 是任意常数.

(2) 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=1$，所围成的区域为 D，则 D 的面积为 $\sigma(D)=\frac{\pi}{ab}$. 向量场 $\vec{\mathbf{F}}$ 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\oint_L\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}dx+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}dy$$
$$=\oint_L-y\,dx+x\,dy=2\sigma(D)=\frac{2\pi}{ab}\neq0.$$

故，$\vec{\mathbf{F}}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.

对调和函数，想到用Green公式.

(10分) 设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant R^2\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数且满足 $\Delta f=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=x+x^2+y^2$. 计算 $I=\displaystyle\iint_Df(x,y)\,dx\,dy$.

解:　设 $g(x,y)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12}y^4$，以及 $h(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$，则有

$$\Delta h=\Delta f-\Delta g=\Delta f-(x+x^2+y^2)=0.$$

这说明 h 是 D 上的调和函数. D 的参数方程为 $x=r\cos\varphi$，$y=r\cos\varphi$ $(0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$. 因此

$$\iint_Dh(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)r\,dr\,d\varphi$$
$$=\int_0^Rr\left(\int_0^{2\pi}h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\,d\varphi\right)dr.$$

记 $H(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\,d\varphi$. 设 L 是 D 的边界，顺时针方向，则

$$H'(r)=\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi h_x'(r\cos\varphi,r\cos\varphi)+\sin\varphi h_y'(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\right)d\varphi$$
$$=\int_L-h_y'\,dx+h_x'\,dy\qquad\text{(二重积分转化为曲线积分)}$$
$$=\iint_D\left(h_{xx}''+h_{yy}''\right)d\sigma\qquad\text{(Green 公式)}$$
$$=0.$$

这说明 $H(r)$ 是常数. 因此 $H(r)=H(0)=2\pi h(0,0)$. 因此

$$\iint_Dh(x,y)\,dx\,dy=h(0,0)\int_0^Rr\,dr=\pi R^2h(0,0)=\pi R^2f(0,0).$$

于是

$$I=\iint_Dh(x,y)\,dx\,dy+\iint_Dg(x,y)\,dx\,dy=\pi R^2f(0,0)+\iint_D\left(x+x^2+y^2\right)dx\,dy$$
$$=\pi R^2f(0,0)+\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\pi R^2f(0,0)+\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}r^2\cdot r\,dr\,d\varphi$$
$$=\pi R^2f(0,0)+\frac{\pi}{2}R^4.$$

七. (10分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $D=\{(\theta,\varphi):\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. 求证:

$$\iint_D(\sin\theta+\cos\varphi)f(1-\sin\theta\cos\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\pi\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

→ 想到换元.

证明: 记 $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. 考虑变换

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\sin\theta\sin\varphi.$$

易知此变换将 D 映成 B, 且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=\cos\theta\sin\theta$. 因此,

$$\iint_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\iint_B\frac{f(1-x)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

因为对 $a>0$, 有 $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\iint_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

类似地, 考虑变换 $x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\cos\theta\cos\varphi$. 可得

$$\iint_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

上面两式相加解得所证.

数分A3期中部分

2026.3.25

1.2020

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ 与 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ 同敛散. 故发散 — 是同敛散, 不是值相等的

2. (8分) 设 $\alpha>0$. 讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ 的收敛性. — $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散 ⇔ $\exists N>0$, $n>N$ 时 a_n 不变号 或 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

由于 $\frac{1}{n^\alpha}>0$ 于是与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散 于是 $\alpha>1$ 时收. $\alpha\leq 1$ 时发

4. (18分) 写出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在R上的收敛点集D, 在每个D中的点处判断其绝对收敛性, 讨论该级数在D上的一致收敛性. 均需说明理由.

记 $a_n=\frac{1}{n}$. 有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1\Rightarrow R=1$. $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛 于是 $D:[-1,1)$

在 $x=-1$ 时条件收敛. 在 $x\in(-1,1)$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}}=|x|<1$ 于是绝收

若在 $[-1,1)$ 上一致收敛, 则在 $[-1,1]$ 连续, $x=1$ 处无定义, 矛盾! 于是 D 上不一致收敛

证明不一致: ① 端点处不连续 ② Cauchy 准则 ③ $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|\neq 0$.

8.(10 分) 证明: 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n-2^n}$$

在 R 上一致收敛于一个光滑函数, 将后者记作 $S(x)$. 判断 $S(x)$ 在原点附近能否展开成 Maclaurin 级数并说明理由。

$\left|\frac{\sin nx}{3^n-2^n}\right|<\frac{1}{3^n-2^n}<\frac{1}{3^{n-1}}$ 于是一致收敛

对于其k阶导: $\left|\frac{d^k}{dx^k}\frac{\sin nx}{3^n-2^n}\right|=\left|\frac{n^k\sin(nx+\frac{k\pi}{2})}{3^n-2^n}\right|<\frac{n^k}{3^{n-1}}$

由 D'Alembert 判别法知其收敛, 于是由 Weierstrass 判别法知 n阶导一致收敛

于是 $S^{(n)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{3^n-2^n}\right)^{(n)}$ 连续

$S(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{S^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{k+1}$ $\xi\in(0,x)$

只需证 $\lim_{n\to\infty}\frac{S^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{k+1}=0$. 只需有 $\frac{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p^k}{3^{p-1}}}{(n+1)!}=0$ 易证.

展开为 MacLaurin 级数 ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

原函数一致收敛, n阶导一致收敛. 用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开后

证明余项~~在n→∞时~~为0 即可证原函数能进行 MacLaurin 展开

2.2022

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n)}{\sqrt{n(n+1)}}$ → 见三角函数, 一般用 Dirichlet / Abel 判别法.

若要判断条件/绝对收敛, 用 $|\sin x|>\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 来放缩.

tip: $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$ & $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right|=\left|\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$

四. 求幂级数的收敛区间和在其内的和函数。注意收敛区间的定义!! 很多在这里扣分

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$$

→ 注意端点是否在收敛区间内

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$, 于是 $(-1,1)$ 上收敛. $x=\pm1$ 时均绝对收敛. 故收敛区间为 $[-1,1]$

和函数: $S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$ $x\in(-1,1)$, 则 $S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$. → 积分中 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt$ 此二者易被忽略.

于是 $S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in[-1,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$

七. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=0$, 试证: 存在奇数次多项式 (非常数项的次数为奇数) 列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致逼近于 $f(x)$。 → 奇/偶类. 想到奇/偶延拓.

奇延拓. $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in[0,1]\\ -f(-x) & x\in[-1,0)\end{cases}$ 由 Weierstrass 逼近定理, $\exists\{Q_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $g(x)$. 令 $P_n(x)=\frac{Q_n(x)-Q_n(-x)}{2}$ 则 $P_n(x)$ 为奇多项式.

有 $|P_n(x)-g(x)|\le\frac{|Q_n(x)-g(x)|+|Q_n(-x)-g(-x)|}{2}\to 0$. 则 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $g(x)$. 故在 $[a,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

3. 2023

(3). $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；n 充分大. $\ln\ln n>2\Rightarrow \ln n\cdot\ln\ln n>\ln n^2$ 故 $(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\cdot\ln\ln n}>n^2$ 即 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$. 收敛.

$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$. $\cos\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ 保号. 则与 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2n^2}$ 同敛散. 显然收敛

3. (10 分) 计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 5}f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ —注意一致收敛的x范围.

先 $f(x)$ 一致收敛. 对 $x\in[\frac{1}{2},\infty)$. $\exists N>0, n>N$ 时 $|ne^{-nx}|<|ne^{-\frac{1}{2}n}|<\frac{1}{n^2}$ 于是 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},\infty)$ 上一致收敛 (不在 $(0,\infty)$ 上一致收敛)

则 $\int\Sigma=\Sigma\int=\cdots$　　$x=0$ 时 $f(x)$ 发散, 故在 $(0,\infty)$ 上不一致收敛

5. (20 分)(1) 研究函数列 $\{f_n(x)=e^{-(x-n)^2}\}$ 在下列区间的一致收敛性:

$(a)\ (-1,1)\qquad (b)\ (-\infty,+\infty)$

—证一致收敛: ① Dirichlet. Abel ② $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$. ③ Weierstrass 判别法 ④ Cauchy. $N(\varepsilon)$

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}e^{-(x-n)^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-(1-n)^2}=0$. 一致收敛. (2). $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{-(x-n)^2}=1$ as $x=n$. 不一致收敛

7. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有任意阶导数，且 $f(0)=0$. 若存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f'(x)=f(\alpha x), x\in[0,1]$，则 $f(x)=0$.

设 $n=k$ 时 $f^{(k)}(x)=\alpha^{\frac{k(k-1)}{2}}f(\alpha^k x)$ 则 $n=k+1$ 时 $f^{(k+1)}(x)=\alpha^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot f'(\alpha^k x)=\alpha^{\frac{k(k+1)}{2}}f(\alpha^{k+1}x)$ 由归纳法知成立 — f 能幂级数展开 $\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0\ \forall x\in(x_0-R,x_0+R)$

则有 $f^{(n)}(0)=\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}f(0)=0$. 又余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$ $\xi\in(0,x)$. 有 $|f^{(n)}(\xi)|=|\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}f(\alpha^n\xi)|\le M\cdot\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}\Rightarrow R_n(x)\to 0$ 于是幂级数收敛至f.

则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$.　　f 导数存在故连续

4. 2024

二(14分)、讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\beta}\cos n$$

的条件收敛性和绝对收敛性，其中 $\beta\in\mathbb{R}$。

tip: $\Sigma\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, 不是 $p>2$ 如.

2. 设 $f\in C[a,b]$.

(1) 如果

$$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

那么 $f(x)\equiv 0$;

(2) 如果存在正整数 N, 使得

$$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n\geqslant N),$$

那么 $f(x)\equiv 0$.

(1) $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数, 有多项式列 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 则 $\{f(x)P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f^2(x)$

故有 $\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)P_n(x)dx=0$

则有 $f(x)\equiv 0$.

(2). 有 $x^N f(x)\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.

四(8分)、求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。—幂函数的积. $A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. $B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 则 $A(x)B(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{n-k})x^n$

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad x\in(-1,1]$.

系数 $c_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{n-k}=(-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}=\frac{(-1)^n}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})\cdot 2$

六 (10分)、试证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{n-1}}{n+1}=1$. —证连续. 即一致收敛+各项连续

5. 2025

二、（12分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\neq 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=1$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_n+a_{n+1}}{a_na_{n+1}}$ 的绝对收敛性与条件收敛性。

提示使用比较判别法.

求下列幂级数的收敛域及和函数（其中 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$）: $\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n$ —换序.

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})x^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}x^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(1-x)}=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$　　$R=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{H_n})^{-1}=1$

五、（10分）

设单调递减数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\}$ 有界，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。—级数也是数列. 可用单调收敛

$S_n\le M+na_n$ 只需证 S_n 有界 对 $m<n$. 有 $M\ge\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_n)=S_m-ma_n$ 令 $n\to\infty$. 有 $S_m\le M$. 由单调有界知收敛

数分A3期末部分

2026.3.26

1. 2016

$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ 敛散性。

有两瑕点. $x\to 0^+$ 时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx<\infty$

$x\to 1^-$ 时 $\ln x\sim x-1$　　故为 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}dx$ 收敛.

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)}\to\sqrt{2}\sqrt{1-x}$

三、设 $a>-1$, 计算积分 $\int_1^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx$. —视参数为变量

设为 $I(a)$. 有 $I'(a)=\int_1^{+\infty}e^{-(a+1)x}dx=-\frac{e^{-(a+1)x}}{a+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{a+1}$ 于是 $I(a)=\ln(a+1)+C$. 又 $I(0)=0\Rightarrow C=0$ 于是原式 $=\ln(a+1)$

2. 2017

一、判断题（简述原因）

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛是否蕴含 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$?

2. 积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛是否蕴含 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$?

1. 是. 设 $\sum_{k=1}^{n}a=S_n$. $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$

2. 不是. 不妨取 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{other}\\ n & x\in[n-\frac{1}{n^3},n+\frac{1}{n^3}], n\in\mathbb{Z}\end{cases}$ 有 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$. 但 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

七、令$\phi(u) := \int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}dx$, 其中$u$是非负实数。

(1) 证明: $\phi(u)$关于$u \in [0,+\infty)$是一致收敛的。

(2) 证明: $\phi(u)$在$[0,\pi]$上至少有一个零点。

(1). 对$\forall \delta>0$, $u\in[\delta,+\infty)$, 有$\left|\int_0^{A}\cos ux\,dx\right| \le \frac{2}{u} \le \frac{2}{\delta}$有界. 又$\frac{1}{1+x^2} \searrow 0$. 由Dirichlet判别法知一致收敛.又由$\delta$的任意性知$u\in(0,+\infty)$上一致收敛

$u=0$时 $\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\lim\limits_{A\to\infty}\arctan A=0$. 于是一致收敛. 则$u\ge0$时$\phi(u)$一致收敛

另: $\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\in[0,\pi]}\int_A^{\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\lim\limits_{A\to\infty}\arctan A=0$.

(2). 知一致收敛.且$\frac{\cos ux}{1+x^2}$连续$\Rightarrow\phi(u)$连续. $\phi(0)>0>\phi(\pi)$. 故有至少一零点.

3.2019

三、设$0<u<2$, 问：反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^u}dx$何时条件收敛？何时绝对收敛？

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^u}dx=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{\sin x}{x^u}dx$ —— 分为两段.避免瑕点.

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^u}dx$ 由Dirichlet判别法知其收敛

对于$\int_0^1\frac{\sin x}{x^u}dx$. 只需$x\to0$时收敛. 有$\lim\limits_{x\to0}\int_0^1\frac{\sin x}{x^u}dx=\lim\limits_{x\to0}\int_0^1\frac{dx}{x^{u-1}}$. 则$u<2$时收敛

于是在$0<u<2$时原积分是收敛的.

$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x^u}dx+\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx$

则$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx$与$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx$敛散性相同.

对$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx$. 当$u>1$时 $\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|<\frac{1}{x^u}$且$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^u}dx$收敛. 则原积分绝对收敛

当$u\le1$时 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^u}\right|dx>\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^u}dx-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^u}dx$ 前者发散.后者收敛.于是条件收敛

则$0<u\le1$条件收敛. $1<u<2$绝对收敛

五、令$\phi(u) := \int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{1+x^2}dx$, 其中$u$是非负实数。问: u在什么范围内使得

(1) $\phi(u)$是连续的？ —— 一致收敛.

(2) $\phi(u)$具有连续的导数？

(1). 只需找一致收敛区间. 有$\left|\frac{\sin ux}{1+x^2}\right|<\frac{1}{1+x^2}$ 则由Weierstrass判别法知在$[0,\infty)$上一致收敛.

(2). $\varphi'(u)=\int_0^{\infty}\frac{x\cos ux}{1+x^2}dx$

在$[\delta,\infty)$上由分部积分知一致收敛. $u=0$时$\frac{\phi(u)-\phi(0)}{u}=\infty$ 不存在.在$(0,\infty)$上连续

4.2021

1. 判断敛散性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\cos x}}$

(1). 由于$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\cos x}}$在$[1,2]$上被积函数连续,无瑕点.

原积分敛散性与$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\cos x}}$相同.

有$\left|\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\cos x}}\right|<\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 又$x\to+\infty$时$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$收敛.

由比较判别法知原积分收敛

—— 放缩后的函数也要注意瑕点的存在 最好避免.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $(a>0,b>0)$　　(4) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(3). $I=\int_0^{\infty}\left(\int_a^b e^{-xy}dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^{\infty}e^{-xy}dx\right)dy=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{b}{a}$. 积分交换次序: e^{-xy}非负连续, 又$\int_0^{\infty}e^{-xy}dx$连续

只需证$\int_0^{\infty}e^{-xy}dx$一致收敛. 有$e^{-xy}<e^{-\min\{a,b\}x}$. 由Weierstrass判别法知✓

5. 将$f(x)=x^2x$ $(-\pi<x<\pi)$展开为Fourier级数, 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$的和.

以$T=2\pi$为周期进行延拓. —— 对Fourier级数展开.先延拓

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2\pi^2}{3}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$

于是$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx-(-1)^n\frac{2}{n}\sin nx\right)$ —— 要说明由Dini定理.否则得不到相应结论.

令$x=0\Rightarrow 0=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

5.2023

(3) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$ 发散;

错. $x\to0$. $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$收 $x\to1$. $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$收 $x\to\infty$. $\frac{1}{x^{4/3}}$收. 故收

5. (15分) 设 $\varphi(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx$.

(1) 证明：$\varphi(u)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数;

(2) 证明：当 $u>0$ 时，$\varphi(u)=\frac{\pi}{2}-\arctan u$;

(3) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

5.(1). 0不是瑕点.

e^{-ux}单减且有一致上界1. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$一致收敛

由Abel法. $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx$一致收敛. 从而$\varphi(u)$于$[0,+\infty)$连续

(2). 记$f(x,u)=e^{-ux}\frac{\sin x}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial u}=e^{-ux}\cdot(-x)\cdot\frac{\sin x}{x}=-e^{-ux}\cdot\sin x$

在$[\delta,M]$上

$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\le\frac{1}{e^{ux}}\le\frac{1}{e^{\delta x}}$

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial u}dx$在$u\in[\delta,M]$时一致收敛.

即内闭一致收敛. $\forall u>0$.

$\varphi'=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial u}dx$

$=\int_0^{+\infty}-e^{-ux}\sin x\,dx$

$=-\frac{1}{1+u^2}$.　且$\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u)=0$.

$\Rightarrow\varphi(u)=\frac{\pi}{2}-\arctan u$.

(3).

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{u\to0^+}\varphi(u)=\frac{\pi}{2}$.

6. (12分) (1) 设$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)dx\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

(2) 设$f(x)$在$[a,+\infty]$上绝对可积，$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f(x)g(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)dx\cdot\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

(1). 有限区间上可积,故绝对可积,于是Riemann-Lebesgue引理成立

由$g(x)$为2π周期函数,则其Fourier级数为$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)dx$　$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\cos nx\,dx$　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\sin nx\,dx$

有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\left(\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos nkx+b_k\sin nkx)\right)dx$

$=\int_a^b f(x)\cdot\frac{a_0}{2}dx=\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)dx$

(2). 由绝对可积.知可积.于是可积且绝对可积.

在$[a,A]$上成立(1). 取$A\to+\infty$即可

6.2024

(2) $\lim\limits_{\lambda\to0}\int_0^1[e^{\lambda x^2}+\ln x\cos^2\frac{x}{\lambda}]\mathrm{d}x$.

Riemann-Lebesgue引理应用.

解：原式$=\int_0^1 dx+\lim\limits_{\lambda\to0}\int_0^1\ln x\frac{1+\cos2\lambda^{-1}x}{2}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\mathrm{d}x$.

解：令$t=x^n$后，使用余元公式可得，

$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$ 余元公式.

原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1(1-t)^{-1/n}t^{1/n-1}}{n}\mathrm{d}t=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi/n}{\sin\frac{\pi}{n}}=1$.

$\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{\Gamma(1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\to1$

四、(15分)分别讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x,\quad p>0$$

绝对收敛和条件收敛时参数p的取值范围.

$p>1$时 $\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|\leq\frac{e}{x^p}$ 由Weierstrass判别法知收敛.绝对收敛

$0<p\leq1$时 $\frac{1}{x^p}\searrow0$. $\left|\int_1^A e^{\sin x}d\sin x\right|\leq2e$ 有界. 由Dirichlet判别法知收敛.

又 $\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|\geq\frac{\cos^2x}{ex^p}=\frac{1}{2}(\underbrace{\frac{1}{ex^p}}_{发}+\underbrace{\frac{\cos2x}{ex^p}}_{收})$ 故发散.条件收敛

五、(20分) 试证：反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+2024x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

收敛，并求其值.

Proof. 令

$$f(\alpha,x)=\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2},\quad I(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(\alpha,x)\mathrm{d}x,\quad\alpha\geq0.$$

(1). 对于给定的α，注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{\sqrt{x}}=0$，于是存在 $c>0$ 使得

$$0\leq\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}<c\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}.$$

—$\int f$ 收敛

又由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，因此由比较判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛。（4分）

(2). 取定$A>2024$，当$\alpha\in[0,A]$时，注意到

$$\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\leq\frac{\ln(1+Ax^2)}{1+x^2},$$

—$\int f$一致收敛 → $I(\alpha)$连续

结合(1)可知，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于α在$[0,A]$上一致收敛。又 $f(\alpha,x)\in C([0,\infty)\times[0,A])$，从而

$$I(\alpha)\in C([0,A]),\quad I(0)=0.\qquad（4分）$$

(3). 断言：$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,x)\mathrm{d}x$ 在$\alpha\geq\alpha_0>0$上一致收敛。原因如下：（4分）

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,x)\right|=\left|\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}\right|\leq\frac{1}{\alpha(1+x^2)}\leq\frac{1}{\alpha_0(1+x^2)}.$$

—$\underbrace{\int\frac{\partial}{\partial x}f}_{=\varphi(x)}$一致收敛, f. $\frac{\partial}{\partial x}f$连续 } $\varphi'(x)=\int\frac{\partial}{\partial x}f$

因此有，

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+1)},\quad\alpha>0.$$

解得，$I(\alpha)=\pi\ln(\sqrt{\alpha}+1)+C$，$\alpha>0$.（4分）

(4). 进一步，由$I(\alpha)$的连续性可知 $C=0$，从而得到

$$I(\alpha)=\pi\ln(\sqrt{\alpha}+1),\quad I(2024)=\pi\ln(\sqrt{2024}+1).\qquad（4分）\quad□$$

7.2025

—求复杂积分.化为含参变量积分.对参数求导.

六、(18分) 试证:广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ 收敛,并计算其值. 得分

证明. 为了记号简单，记

$$f(x,\alpha)=\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}},\qquad\psi(\alpha)=\int_1^{+\infty}f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

(1) 先把积分拆分成两部分：

$$\int_1^{+\infty}f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x=\int_1^2f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

下面对$\alpha>0$时都收敛，当然对$\alpha=1$亦成立。注意到

- 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x,\alpha)\sim\frac{\pi}{2x^3}$，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ 收敛.
- 当$x\to1^+$ 时，$f(x,\alpha)\sim\frac{\arctan(\alpha)}{\sqrt{2(x-1)}}$，积分 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ 是收敛的.$(\frac{1}{2}<1)$

从而知广义积分$\int_1^{+\infty}f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$收敛. ……（8分）

(2) 注意到$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 收敛且

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|=\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}\right|\leq\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

由 Weierstrass判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\mathrm{d}x$在$\alpha\geq0$上一致收敛. ……（5分）

因此可以交换积分和导数的顺序，

$$\psi'(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\alpha^2\sec^2\theta}d\theta\qquad令x=\sec\theta,\ t=\tan\theta$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2(1+t^2)}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).$$

结合$\psi(0)=0$有，$\psi(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. ……（5分）

经典分为"有界+0"

七、(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)>0$，定义

$$g(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx,\quad y\in\mathbb{R}.$$

试证：$\lim\limits_{y\to0^+}g(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$.

证法1. 令

$$K_y(x)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

则有

$$\int_0^1K_y(x)\,dx=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}dx=\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^1=\arctan\left(\frac{1}{y}\right).$$

因此

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^1K_y(x)\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

注意到

$$g(y)=f(0)\int_0^1K_y(x)dx+\int_0^1\frac{y[f(x)-f(0)]}{x^2+y^2}dx.\qquad……（2分）$$

已知第一项极限是 $f(0)\cdot\frac{\pi}{2}$，我们只需证明第二项

$$R(y):=\int_0^1\frac{y[f(x)-f(0)]}{x^2+y^2}dx\to0\quad(y\to0^+).$$

给定 $\varepsilon>0$，由连续性，存在 $\delta>0$，当 $0\leq x\leq\delta$ 时，

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

将积分分成 $[0,\delta]$ 和 $[\delta,1]$ 两部分。

(i) 区间 $[0,\delta]$：

$$\left|\int_0^\delta\frac{y[f(x)-f(0)]}{x^2+y^2}dx\right|\leq\varepsilon\int_0^\delta\frac{y}{x^2+y^2}dx\leq\varepsilon\int_0^\infty\frac{y}{x^2+y^2}dx=\varepsilon\cdot\frac{\pi}{2}.\qquad……（3分）$$

(ii) 区间 $[\delta,1]$：当 $x\geq\delta$ 时，$\frac{y}{x^2+y^2}\leq\frac{y}{\delta^2}$，且 $f(x)-f(0)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，故有界 $|f(x)-f(0)|\leq M$，M 是常数。于是

$$\left|\int_\delta^1\frac{y[f(x)-f(0)]}{x^2+y^2}dx\right|\leq M\cdot\frac{y}{\delta^2}\cdot(1-\delta).\qquad……（3分）$$

当 $y\to0^+$，这个上界趋于 0。因此，对任意 $\varepsilon>0$，当 y 足够小：

$$|R(y)|\leq\varepsilon\cdot\frac{\pi}{2}+M\frac{y}{\delta^2}(1-\delta).$$

于是 $\limsup_{y\to0^+}|R(y)|\leq\frac{\pi}{2}\varepsilon$，由 ε 任意性知 $R(y)\to0$。所以

$$\lim_{y\to0^+}g(y)=f(0)\cdot\frac{\pi}{2}.\qquad……（2分）$$

一些熟记积分：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^mx\cos^nx\,dx=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^nx\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!} & n奇\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n偶\end{cases}$

$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha}=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$

$\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\sin\omega x\,dx=\frac{\omega}{\omega^2+\beta^2}$

$\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\omega x\,dx=\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$

$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,a.$

$\sin x$	$\ln x$
$\cos x$	e^x
	$\arcsin x$
$\tan x$	$\arccos x$
$\arctan x$	$(1+x)^\alpha$

函数名称	泰勒展开式（含通式＋前几项）	收敛范围
$\sin x$	$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdot$	$(-\infty,+\infty)$
$\tan x$	$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdot$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
$\arctan x$	$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$	$[-1,\ 1]$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$	$(-1,\ 1]$
e^x	$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdot$	$(-\infty,+\infty)$
$\arcsin x$	$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+$	$[-1,\ 1]$
$\arccos x$	$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2\cdot 3}x^3-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5-\cdot$	$[-1,\ 1]$
$(1+x)^\alpha$（任意实数 α）	$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+$	$(-1,\ 1)$

Green: $\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$; $\oint_{\partial D} F\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D \nabla\cdot F\,dxdy$

$\iint_{\partial\Omega} F\,d\vec{s}$ (Pdydz+Qdzdx+..)

Gauss: $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_\Omega \nabla\cdot F\,dV.$

Stokes: $\oint_{\partial S} F\cdot dr=\iint_S \mathrm{rot}F\cdot\vec{n}\,dS$

方向导数. $\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{n}}=\nabla\vec{F}\cdot\vec{n}$

补.2026(中)

五、求 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上一点，使 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在方向 $l=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ 上的方向导数最大

$\nabla F=(2x,2y,2z)$. $\frac{\partial F}{\partial \vec{l}}=\nabla F\cdot\vec{l}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y.$

$L(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ 时最大，为$\sqrt{2}$.

七、$D\subset\mathbb{R}^n$，D 为有界闭集，映射 $f:D\to D$ 满足对于任意 $x\neq y\in D$，有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，证明存在 $x_0\in D$，$f(x_0)=x_0$

1. 构造连续辅助函数
定义函数
$\varphi(x)=\|x-f(x)\|,\quad \forall x\in D$

由条件：对任意 $x_n\to x$，有
$\|f(x_n)-f(x)\|<\|x_n-x\|\to 0$
故 $f(x)$ 在 D 上连续；
范数运算本身连续，因此复合得到 $\varphi(x)$ 是 D 上的连续实值函数。

2. 紧集上连续函数可达最小值
$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集等价于紧集。
根据最值定理：紧集上的连续函数，一定能在 D 上取得全局最小值，即 $\exists\, x_0\in D$，使得
$\varphi(x_0)=\min_{x\in D}\varphi(x)$

3. 反证导出矛盾
假设 $f(x_0)\neq x_0$，即 $\varphi(x_0)=\|x_0-f(x_0)\|>0$。

代入题设严格压缩条件（$x_0\neq f(x_0)$）：
$\varphi(f(x_0))=\|f(x_0)-f(f(x_0))\|<\|x_0-f(x_0)\|=\varphi(x_0)$

这与 $\varphi(x_0)$ 是全局最小值完全矛盾，故假设不成立。

4. 得出不动点
因此必有 $\varphi(x_0)=0$，即
$\|x_0-f(x_0)\|=0$
也就是
$f(x_0)=x_0$

四、设 $F(x,y,z)$、$G(x,y,z)$ 有连续偏导，且 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 过点 (x_0,y_0,z_0)，记其在 xy 平面上的投影曲线为 L，求 L 过点 (x_0,y_0) 的切线方程

隐函数组: $\begin{cases}F(x(y),y,z(y))=0\\G(x(y),y,z(y))=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_x x_y+F_y+F_z\cdot z_y=0\\G_x x_y+G_y+G_z\cdot z_y=0\end{cases}\Rightarrow x_y=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}$. 切线: $x-x_0=x_y(y-y_0)$

二、设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，$\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内连续。

(1) 当且仅当 φ 满足什么条件时，$f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 存在 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x,0$

(2) 当且仅当 φ 满足什么条件时，f 在 $(0,0)$ 处可微。

(1) 一阶偏导数存在的充要条件

根据二元函数偏导数极限定义：

$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$， $f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$

首先代入得 $f(0,0)=|0-0|\varphi(0,0)=0$

对 $f_x(0,0)$**：**

$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

- $\Delta x\to 0^+$ 时：$\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$，极限为 $\varphi(0,0)$
- $\Delta x\to 0^-$ 时：$\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$，极限为 $-\varphi(0,0)$

偏导数存在 $\iff$ **左右极限相等：**

$\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)\implies \boldsymbol{\varphi(0,0)=0}$

对 $f_y(0,0)$**：**

同理可得，极限存在同样等价于 $\boldsymbol{\varphi(0,0)=0}$**，且此时**

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

(1) 结论：

当且仅当 $\boldsymbol{\varphi(0,0)=0}$ **时，** $f'_x(0,0)$ **与** $f'_y(0,0)$ **同时存在。**

(2) f **在** $(0,0)$ **处可微的充要条件**

二元函数可微严格定义：

f **在** $(0,0)$ **可微，当且仅当**

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=0,\quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

1. 若 $\boldsymbol{\varphi(0,0)\neq 0}$**：**

由 (1)，一阶偏导数根本不存在，函数一定不可微。

2. 若 $\boldsymbol{\varphi(0,0)=0}$**：**

此时 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$**，极限简化为：**

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{|\Delta x-\Delta y|\cdot\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

用 $y=kx$ 方向逼近 $\dfrac{|1-k|}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(0,0)\Rightarrow$ 只有 $\varphi(0,0)=0$ 时极限存在

三、设 $u=f(x,y)$ 有二阶偏导，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，证明 $v=f(x^2-y^2,2xy)$ 满足 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

令

$s=x^2-y^2,\quad t=2xy$

则 $v=f(s,t)$，记偏导简写：

$f_s=\dfrac{\partial f}{\partial s}$，$f_t=\dfrac{\partial f}{\partial t}$，$f_{ss}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}$，$f_{st}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}$，$f_{tt}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

由二阶偏导连续，混合偏导相等：$f_{st}=f_{ts}$

2. 计算一阶偏导 (链式法则)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f_s\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f_t\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=2xf_s+2yf_t$$

$$[4pt]\ \frac{\partial v}{\partial y}=f_s\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_t\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-2yf_s+2xf_t$$

3. 计算二阶偏导

对一阶偏导再次求导：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2f_s+2x(2xf_{ss}+2yf_{st})+2y(2xf_{st}+2yf_{tt})$$

$$[4pt]=2f_s+4x^2f_{ss}+8xyf_{st}+4y^2f_{tt}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2f_s-2y(-2yf_{ss}+2xf_{st})+2x(-2yf_{st}+2xf_{tt})$$

$$[4pt]=-2f_s+4y^2f_{ss}-8xyf_{st}+4x^2f_{tt}$$

4. 合并化简拉普拉斯和

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$[4pt]=\ (2f_s-2f_s)+(8xyf_{st}-8xyf_{st})+4(x^2+y^2)f_{ss}+4(x^2+y^2)f_{tt}$$

$$[4pt]=\ 4(x^2+y^2)\cdot(f_{ss}+f_{tt})$$

$f_{ss}+f_{tt}=u_{xx}+u_{yy}=0$

六、记 $\rho(A,B)=\inf\{|p-q|\mid p\in A,q\in B\}$，若 A 为紧集，B 为闭集，$A\cap B=\emptyset$。证明 $\rho(A,B)>0$

1. **反证假设**

   假设 $\rho(A,B)=0$。

根据下确界的定义，对任意正整数 n，一定存在点列

$p_n\in A,\quad q_n\in B$

满足

$|p_n-q_n|<\dfrac{1}{n}$

2. **紧集提取收敛子列**

   因为 A 是紧集，序列 $\{p_n\}\subset A$ 必有收敛子列

   $p_{n_k}\to p_0\in A\quad(k\to\infty)$

3. **证明** q **子列也收敛到** p_0

   由三角不等式：

   $|q_{n_k}-p_0|\le|q_{n_k}-p_{n_k}|+|p_{n_k}-p_0|$

   当 $k\to\infty$ 时，$|q_{n_k}-p_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}\to 0$，且 $|p_{n_k}-p_0|\to 0$，因此

   $\lim_{k\to\infty}q_{n_k}=p_0$

4. **利用闭集性质导出矛盾**

   B 是闭集，收敛序列的极限仍属于 B，故

   $p_0\in B$

于是得到 $p_0\in A\cap B$，与条件 $A\cap B=\varnothing$ 完全矛盾。