数学分析复习

tip: 此复习笔记为备考2026暑期夏令营而创. 按章进行, 每章内容分为知识点&例题部分与习题&参考部分, 每天一节, 先整理一章知识点后再统一做习题工作. 知识点会包含书中全部定义与定理, 重要程度用符号分辨取舍; 习题&参考部分包含书本、裴、谢中习题, 复习时先只参考教材习题, 裴与谢在后续参考.

第一章 实数与数列极限

知识点&例题

定义 1.2.1 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon, \tag{1}$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限, 记成

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$

也可以简记为 $a_n\to a\,(n\to\infty)$. 我们也说数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a. 存在极限的数列称为**收敛数列**; 不收敛的数列称为**发散数列**.

例: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac1n}=1$

证明: $n^{\frac1n}=(1\cdots1\cdot\sqrt n\cdot\sqrt n)^{\frac1n}\le\frac{n-2+2\sqrt n}{n}<1+\frac{2}{\sqrt n}$. 故 $0\le n^{\frac1n}-1<\frac{2}{\sqrt n}$. 故对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]$ s.t. $n>N$ 时 $|n^{\frac1n}-1|<\varepsilon$. 证毕

定义 1.3.1 数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于实数 a 是指: 对任意的 $\varepsilon>0$, 总存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得此数列中除有限多项 $a_1,a_2,\cdots,a_N$, 其他的项均落在 a 的 ε 邻域内(图 1.2).

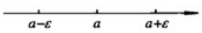


图 1.2

定理 1.3.1 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限. 也就是说, 收敛数列的极限是唯一的.

定义 1.3.2 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 如果存在一个实数 A, 使得 $a_n\le A$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 是**有上界的**, A 是此数列的一个上界.

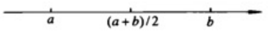


图 1.3

类似地, 可以定义**有下界**的数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 既有下界又有上界, 则称它是一个**有界数列**.

定理 1.3.2 收敛数列是有界的.

定义 1.3.3 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, $k_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=1,2,3,\cdots)$, 且满足 $k_1<k_2<k_3<\cdots$, 那么数列 $\{a_{k_n}\}$ 叫作 $\{a_n\}$ 的一个**子列**.

定理 1.3.3 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a, 那么 $\{a_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 a.

推论 1.3.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 而且有相同的极限.

定理 1.3.4(极限的四则运算) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 则 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ 也是收敛数列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne0$, 则 $\{a_n/b_n\}$ 也收敛, 并且有:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 特别地, 如果 c 是常数, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne0$.

例: 证明 $\{\sin n\}$ 是发散的

证明: 若收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$. 由 $\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin1\cos n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 又 $\sin2n=2\sin n\cos n\Rightarrow a=0$ 则 $\sin^2n+\cos^2n=0$ 矛盾!

定义 1.3.4 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 0, 那么这个数列称为**无穷小数列**, 简称**无穷小**.

关于无穷小, 有下面的定理:

定理 1.3.5 (1) $\{a_n\}$ 为无穷小的充分必要条件是 $\{|a_n|\}$ 为无穷小;

(2) 两个无穷小之和(或差)仍为无穷小;

(3) 设 $\{a_n\}$ 为无穷小, $\{c_n\}$ 为有界数列, 那么 $\{c_na_n\}$ 也为无穷小;

(4) 设 $0\le a_n\le b_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 如果 $\{b_n\}$ 为无穷小, 那么 $\{a_n\}$ 也为无穷小;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充分必要条件是 $\{a_n-a\}$ 为无穷小.

定理 1.3.6(夹逼原理) 设

$$a_n\le b_n\le c_n\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}b_n=a.$$

定理 1.3.7 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, α,β 满足 $\alpha<a<\beta$, 那么当 n 充分大时, 有 $a_n>\alpha$; 同样, 当 n 充分大时, 有 $a_n<\beta$.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 且 $a<b$, 那么当 n 充分大时, 一定有 $a_n<b_n$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 并且当 n 充分大时 $a_n\le b_n$, 那么有 $a\le b$.

定义 1.4.1 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件: 对任何正数 A, 都存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $a_n>A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$(正无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty.$$

如果对任何正数 A, 都存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $a_n<-A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$(负无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty.$$

定义 1.4.2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 趋向于 ∞, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

定义 1.5.1 如果数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n\le a_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则称此数列为**递增数列**; 如果 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n\ge a_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则称此数列为**递减数列**. 如果上面两个不等式都是严格的, 即 $a_n<a_{n+1}$(或 $a_n>a_{n+1}$)$(n=1,2,\cdots)$, 则称此数列为**严格递增的**(或**严格递减的**).

定理 1.5.1 单调且有界的数列一定有极限.

例: 对 $\forall a\in\mathbb{R}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$ 设 $x_n=\frac{|a|^n}{n!}$. 有 $n>|a|$ 时 $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{|a|}{n+1}<x_n$ 又 $x_n>0$. 则 x_n 有极限. 又 $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{|a|}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

定理 1.5.2(闭区间套定理) 设 $I_n=[a_n,b_n]\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 并且 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$. 如果这一列区间的长度 $|I_n|=b_n-a_n\to0\,(n\to\infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 含有唯一的一点.

定理 1.6.1 自然对数的底 e 是无理数.

定义 1.7.1 设 $\{a_n\}$ 是一实数列. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 若存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是一个**基本列**或 Cauchy(柯西, 1789～1857)列.

引理 1.7.1 从任一数列中必可取出一个单调子列.

定理 1.7.1(列紧性定理) 从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

定理 1.7.2 一个数列收敛的充分必要条件是, 它是基本列.

定义 1.8.1 设 E 为一非空的有上界的集合, 实数 β 满足以下两个条件:

(1) 对任何 $x\in E$, 有 $x\le\beta$;

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 必可找到一个 $x_\varepsilon\in E$, 使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$.

这时, 称 β 为集合 E 的**上确界**, 记为 $\beta=\sup E$.

由(1)与(2)可见, E 的上确界 β 是 E 的最小上界.

类似地, 可给出:

定义 1.8.2 设 E 为一非空的有下界的集合, 实数 α 满足以下两个条件:

(1) 对任何 $x\in E$, 有 $x\ge\alpha$;

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 必可找到一个 $y_\varepsilon\in E$, 使得 $y_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$.

这时, 称 α 为集合 E 的**下确界**, 记为 $\alpha=\inf E$.

同理可知, E 的下确界是 E 的最大下界.

定理 1.8.1 非空的有上界的集合必有上确界; 非空的有下界的集合必有下确界.

定义 1.9.1 如果 A 是实数集, $\mathscr{I}=\{I_\lambda\}$ 是一个开区间族, 其中 $\lambda\in\Lambda$, 这里的 Λ 称为指标集. 如果

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda,$$

称开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是 A 的一个**开覆盖**, 或者说 $\{I_\lambda\}$ 盖住了 A.

定理 1.9.1(紧致性定理) 设 $[a,b]$ 是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$, 那么从这个开区间族中必可选出有限个成员(开区间)来, 这有限个开区间所成的族仍是 $[a,b]$ 的开覆盖.

这个定理常称为**有限覆盖定理**, 也叫作 Heine(海涅, 1821～1881)-Borel(博雷尔, 1871～1956)**定理**.

定义 1.10.1 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记

$$a^*=\sup E,\quad a_*=\inf E,$$

则 a^* 和 a_* 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的**上极限**和**下极限**, 记为

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$

$$a^*=\limsup_{n\to\infty}a_n,\quad a_*=\liminf_{n\to\infty}a_n.$$

定理 1.10.1 设 $\{a_n\}$ 为一数列, E 与 a^* 的意义已在定义 1.10.1 中描述. 那么:

(1) $a^*\in E$;

(2) 若 $x>a^*$, 则存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n\ge N$ 时, 有 $a_n<x$;

(3) a^* 是满足前两条性质的唯一的数.

注意上极限与上确界的区别: $\sup a_n$ a^*

定理 1.10.2 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列.

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 当且仅当 $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=a$;

(3) 若 N 是某个正整数, 当 $n>N$ 时, $a_n\le b_n$, 那么

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\le\liminf_{n\to\infty}b_n,\quad\limsup_{n\to\infty}a_n\le\limsup_{n\to\infty}b_n.$$

注意(3)中不能推出 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$. 如 b_n a_n b_n a_n

例: $0\le a_{m+n}\le a_m+a_n$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$. 求证 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 有极限.

对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$ 为固定数. 对 $n\ge k$, 有 $n=mk+l$, $l\in\{0,1,\cdots,k-1\}$, 则 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{mk+l}}{n}\le\frac{ma_k+a_l}{n}=\frac{a_k}{k+l/m}+\frac{a_l}{n}$

令 $n\to\infty$, 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\le\frac{a_k}{k}\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\le\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{a_k}{k}$. 二者相等. 又 $0\le\frac{a_n}{n}\le a_1\Rightarrow a_n$ 有界. 故极限存在.

定理 1.10.3 对数列 $\{a_n\}$, 定义 $\alpha_n=\inf\limits_{k\ge n}a_k$, $\beta_n=\sup\limits_{k\ge n}a_k$, 那么:

(1) $\{\alpha_n\}$ 是递增数列, $\{\beta_n\}$ 是递减数列;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a_*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=a^*$.

实求的均为分母

定理 1.11.1 (Stolz, $\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设 $\{b_n\}$ 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A, \tag{1}$$

↓√ ↑× 比中差比为A

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A, \tag{2}$$

其中 A 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

定理 1.11.2 ($\frac{0}{0}$ 型): $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. $\{b_n\}$ 严格单减. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

教材习题

1.1 3. 证明：$\sqrt[3]{2}$是无理数.（无理证明）

若有理，设 $\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p}$，则 $\frac{q^3}{p^3}=2$ 于是 $q^3=2p^3 \Rightarrow q$ 为偶，设 $q=2k \Rightarrow p^3=4k^3$ 则 p 为偶，与既约矛盾！

1.1 11. 设 $n\geqslant 2$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都大于 -1，并且它们有着相同的符号. 证明：（归纳）

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

$n=2$ 时 $(1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2>1+a_1+a_2$ 成立，设 $n-1$ 时成立，在 n 时
$(1+a_1)\cdots(1+a_n)>(1+a_1+\cdots+a_{n-1})+(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})a_n>(1+a_1+\cdots+a_{n-1})+a_n$ 证毕

1.2 (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}$.

$\forall\varepsilon$ $\left|\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}-\frac{\pi}{2}\right|\leq\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\arctan n}{n^2+1}\right|<\varepsilon$，取 $N=\max\{\tan\frac{\pi-\varepsilon}{2},\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\}$，$n>N$.

1.2 6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{n}=0.$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$n>N$ 时 $\frac{|a_n|}{n}<\varepsilon$
$\exists M>0$，$n\leq N$ 时 $|a_n|<M$. 原式 $\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{|a_1|,\cdots,|a_n|\}}{n}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{M,|a_{N+1}|,\cdots,|a_n|\}}{n}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\max\{\frac{M}{n},\frac{\varepsilon}{2}\}\to 0$ 证毕

1.3 (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$；

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}$

1.3 12. 证明：（夹逼）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}.$$

$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{k/n^2}{\sqrt{1+k/n^2}+1}$，则有 $\frac{k/n^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<$ 原式 $<\frac{k/n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ $\Rightarrow$ 二边夹逼为 $\frac{1}{4}$

1.3 2.（Toeplitz（特普利茨，1881～1940）定理）设 $n,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$t_{nk}\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k,$$

试证：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1>0$. $n>N_1$ 时 $|t_{nk}|<\varepsilon/\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-a|$ $\exists N_2>0$. $n>N_2$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$.
则 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时 $|x_n-a|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}(a_k-a)\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{N}+\sum\limits_{k=N+1}^{n}\cdots\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ 证毕

1.4 1. 设 $a_0=1,a_{n+1}=a_n+1/a_n(n=1,2,\cdots)$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

$a_{n+1}>a_n$ 则 $a_n\geq 1$. 只需证 $a_{n+1}-a_n\geq\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{a_n}\geq\frac{1}{n+1}\Rightarrow a_n\leq n+1$
有 $a_0=1\leq 1$ 成立，设 $n-1$ 时成立 $a_{n-1}\leq n\Rightarrow a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\leq n+1$ 成立，证毕

1.5 6. 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛.

$x_{n+1}\leq x_n+\frac{1}{n^2}<x_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Rightarrow\{x_n+\frac{1}{n-1}\}\downarrow>0\Rightarrow x_n+\frac{1}{n-1}$ 收敛，又 $\{\frac{1}{n-1}\}$ 收敛 $\Rightarrow\{x_n\}$ 收敛

1.5 3. 设 $A>0,0<y_0<A^{-1}$，且

$$y_{n+1}=y_n(2-Ay_n)\quad(n=0,1,\cdots).$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A^{-1}$.

$f(x)=x(2-Ax)$ 在 $(0,\frac{1}{A})\uparrow\Rightarrow 0<f(y_0)<A^{-1}$，即 $0<y_0<y_1<A^{-1}$，归纳有 $0<y_n<y_{n+1}<A^{-1}$
单调有界 $\Rightarrow$ 有极限. 收敛. 设为 a. 则 $a=a(2-Aa)\Rightarrow a=A^{-1}$. 证毕.

1.6 9. 令

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

证明：$\lim x_n$ 存在，此极限常记为 γ，叫作 Euler（欧拉，1707～1783）常数.

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n+1})>0$. 则 $x_n\uparrow$. 又 $\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\Rightarrow x_n<1-\frac{1}{n+1}<1\Rightarrow\{x_n\}$ 收敛. 证毕

1.6 4. 记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，用 k_n 表示使得 $H_k\geqslant n$ 的最小下标. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}=\mathrm{e}.$$

$H_{k_n}\geq n$. $H_{k_n-1}<n$. $n\to\infty$ 时 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k_n}-\ln k_n=\gamma+o(1)$
$1+\cdots+\frac{1}{k_{n+1}}-\ln k_{n+1}=\gamma+o(1)$ $\Rightarrow\ln\frac{k_{n+1}}{k_n}=\sum\limits_{i=k_n+1}^{k_{n+1}}\frac{1}{i}=1+o(1)\Rightarrow$ 证毕.

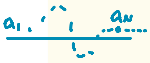
1.7 4. 设数列

$$\{|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\}$$

有界. 求证：$\{a_n\}$ 收敛.

设此数列为 $\{x_n\}$. 显然 $x_{n+1}\geq x_n$，又 $\{x_n\}$ 有界 $\Rightarrow\{x_n\}$ 收敛. $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall m,n>N$ 有
$|x_m-x_n|=|a_{n+1}-a_n|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|<\varepsilon$ 于是此时 $|a_m-a_n|\leq|x_m-x_n|<\varepsilon$ 则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 收敛.

1.8 4. 设在数列 $\{a_n:n\in\mathbf{N}^*\}$ 中，既没有最小值，也没有最大值. 求证：数列 $\{a_n\}$ 发散.



设 $\{a_n\}$ 收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 则 $\exists N>0$. $n>N$ 时 $|a_n-a|<|a-a_1|$. 若 $a_1\geq a\Rightarrow\max\limits_{1\leq k\leq N}\{a_k\}$ 为最大值；若 $a_1<a\Rightarrow\min\limits_{1\leq k\leq N}\{a_k\}$ 为最小值 均矛盾！

1.10 3. 设 $a_n\geqslant 0(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant 1$ 的充分必要条件是，对任意的 $l>1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

$\Rightarrow$) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{l}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{l^n}=0$ $\Leftarrow$) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\alpha>1$. 取 $l=\frac{\alpha+1}{2}$，$\varepsilon=\frac{\alpha-1}{2}\Rightarrow\exists N>0$. $n>N$ 时 $\sqrt[n]{a_n}>l$. 矛盾！

1.11 4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

由 Stolz 定理. $b_n=n^2\nearrow\infty$. $c_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 则 $LHS=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}$

第二章 函数的连续性

知识点&例题

定义 2.1.1 设 A,B 是两个集合，如果 f 是一种规律，使得对 A 中的每一个元素 x，B 中有唯一确定的元素——记为 $f(x)$——与 x 对应，则称 f 是一个从 A 到 B 的**映射**，用

$$f:A\to B$$

来表示. 集合 A 叫作映射 f 的**定义域**；$f(x)\in B$ 叫作 x 在映射 f 之下的**像**或 f 在 x 上的**值**.

定义 2.1.2 设 $f:A\to B$，且 $g:A\to B$. 如果对任何 $x\in A$，均有 $f(x)=g(x)$，则称映射 f 与 g **相等**，记为 $f=g$.

定义 2.1.3 设 $f:A\to B$. 如果 $f(A)=B$，则称 f 是从 A 到 B 上的**满射**，也就是说，B 中的任何元素都是 A 中某一元素在 f 之下的像.

定义 2.1.4 设 $f:A\to B$. 如果当 $x,y\in A$，且 $x\neq y$ 时，有 $f(x)\neq f(y)$，则称 f 为**单射**.

定义 2.1.5 设 $f:A\to B$ 既是单射又是满射，则称映射 f 是**一对一**的. 这时，也说 f 在集合 A 与 B 之间建立一个**一一对应**.

定义 2.1.6 设 $f:A\to B$，$F\subset B$，则 A 的子集

$$f^{-1}(F)=\{x\in A:f(x)\in F\}$$

叫作 F 的**原像**.

例如，对例 1(1)，$f^{-1}(B)=A$，$f^{-1}(\{X\})=\{甲\}$；对例 1(2)，$f^{-1}(\{Y\})=A$，但是，$f^{-1}(\{X\})=f^{-1}(\{Z\})=\varnothing$，这里 $\varnothing$ 表示空集.

定义 2.1.7 设映射 $f:B\to C$，映射 g 的定义域为 A. 当 $x\in A_1=g^{-1}(B)$ 时，定义映射

$$f\circ g(x)=f(g(x)).$$

显然，$f\circ g:A_1\to C$，称为映射 f 与 g 的**复合**.

定义 2.2.1 令 $\mathbf{N}^*$ 是正整数的全体，且

$$N_n=\{1,2,\cdots,n\}.$$

(1) 如果存在一个正整数 n，使得集合 $A\sim N_n$，那么 A 叫作**有限集**. 空集也被认为是有限集.

(2) 如果集合 A 不是有限集，则称 A 为**无限集**.

(3) 若 $A\sim\mathbf{N}^*$，则称 A 为**可数集**.

(4) 若 A 既不是有限集，也不是可数集，则称 A 为**不可数集**.

(5) 若 A 是有限集或者 A 是可数集，则称 A 是**至多可数**的.

定理 2.2.1 可数集 A 的每一个无限子集是可数集.

定理 2.2.2 设 $\{E_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是一列至多可数集. 令

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

那么 S 是至多可数集.

定理 2.2.3 $\mathbf{R}$ 中的全体有理数是可数的.

定理 2.2.4 $[0,1]$ 上的全体实数是不可数的.

定义 2.3.1 函数 $f:X\to Y$ 叫作 X 上的**递增（递减）**函数，如果对任何 $x_1,x_2\in X$，只要 $x_1<x_2$，便有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$）. 函数 f 叫作**严格递增（严格递减）**函数，如果对任何 $x_1,x_2\in X$，只要 $x_1<x_2$，便有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$）.

在 X 上的（严格）递增或（严格）递减函数，统称为（**严格**）**单调函数**.

定理 2.3.1 设函数 f 在其定义域 X 上是严格递增（递减）的，那么反函数 f^{-1} 必存在，f^{-1} 的定义域为 $f(X)$，并且 f^{-1} 在这一集合上也是严格递增（递减）的.

定义 2.4.1 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义，但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，均有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有**极限** l，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l;$$

或者更简单一些，记作

$$f(x)\to l\quad(x\to x_0).$$

这时，也可以说函数 f 在点 x_0 有**极限** l.

定理 2.4.1 函数 f 在 x_0 处有极限 l 的充分必要条件是，对任何一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\neq x_0:n=1,2,3,\cdots\}$，数列 $\{f(x_n)\}$ 有极限 l.

定理 2.4.2（函数极限的唯一性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则它是唯一的.

定理 2.4.3 若 f 在 x_0 处有极限，那么 f 在 x_0 的一个近旁是有界的. 也就是说，存在整数 M 及 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|<M$.

定理 2.4.4 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，那么有：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}fg(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

定理 2.4.5（夹逼原理） 设函数 f,g 与 h 在点 x_0 的近旁（点 x_0 自身可能是例外）满足不等式

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x).$$

如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l，那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l.

定理 2.4.6 设存在 $r>0$，使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立. 又设在 x_0 处这两个函数都有极限，那么

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Cauchy $\Rightarrow$ **定理 2.4.7** 函数 f 在 x_0 处有极限，必须且只需对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x_1,x_2\in B_\delta(\check{x}_0)$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

定理 2.4.8 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$. 如果在 t_0 的某个邻域 $B_\eta(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$，那么

$$\lim_{t\to t_0}f(g(t))=l.$$

定义 2.4.2 设函数 f 在 (x_0, x_0+r)(r 是一个确定的正数)上有定义.设 l 是一个给定的实数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta\in(0,r)$,使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称 l 为 f 在 x_0 处的**右极限**,表示成

$$l=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

在右极限存在的情形下,这个右极限常记为 $f(x_0+)$ 或 $f(x_0+0)$.也就是说,

$$f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

类似地,可以定义 f 在 x_0 处的**左极限** $f(x_0-)$.

右极限和左极限统称为**单边极限**.

定义 2.5.1 设 l 是一确定的实数,表达式

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l$$

的意思是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 A,当 x 满足 $|x|>A$ 时,有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.这时,我们说"当 x 趋向于无穷时,函数 f 有极限 l".上式也可以简记为

定义 2.5.2 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 $A>0$,使得当 $x<-A$ 时,有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

在这种情况下,我们说"在负无穷处函数 f 有极限 l",记为

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=l.$$

第一个表达式的精确定义请读者自行给出.

显然,我们有:

定理 2.5.1 $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ 当且仅当

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=l,\quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

同时成立.

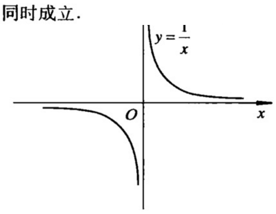


图 2.4

定义 2.6.1 设 x_0 是一个实数,函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个近旁(可能除 x_0 之外)有定义.如果对任意给定的正数 A,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|>A$,则称"当 x 趋向于 x_0 时,函数 f 趋向于**无穷大**",记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,$$

或者

$$f(x)\to\infty\quad(x\to x_0).$$

类似地,还可以定义

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,$$

定义 2.6.2 设当 $x\to x_0$ 时,f 与 g 都是无穷小,并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁(除 x_0 之外)不取零值.

(1) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,那么称 f 是比 g **更高阶的无穷小**;

(2) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq0$,则称 f 与 g 是**同阶的无穷小**;

(3) 如果(2)中的极限值 $l=1$,那么称 f 与 g 是**等价的无穷小**,记为

$$f\sim g\quad(x\to x_0).$$

定理 2.6.1 如果当 $x\to x_0$(x_0 可以是 $\pm\infty$)时,f,g 是等价的无穷小或无穷大,那么:

(1) $\lim_{x\to x_0}f(x)h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)h(x)$;

(2) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}$.

定义 2.6.3 设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁(x_0 除外)有定义,并且 $g(x)\neq0$.

(1) 当 $x\to x_0$ 时,若比值 $f(x)/g(x)$ 保持有界,即存在正常数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ 成立,就用 $f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$ 来表示;

(2) 当 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)/g(x)$ 是一个无穷小,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

就用 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$ 来表示.

定义 2.7.1 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.我们称函数 f 在点 $x_0\in(a,b)$ **连续**,如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

也就是说,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个适当的 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

例:Dirichlet函数处处不连续. $f(x)=xD(x)$ 只在 $x=0$ 处连续.

对 $\forall x_0\in[0,1]$. $\exists\{s_n\}\subset\mathbb{Q}$. $\{t_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. s.t. $s_n\to x$. $t_n\to x$. 则 $\lim_{n\to\infty}D(s_n)=1$. $\lim_{n\to\infty}D(t_n)=0$. 则 x_0 处极限不存在 故处处不连续。$x=0$ 时. $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$. $|x|<\delta$ 时 $|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\leqslant|x|<\varepsilon$. 故在 $x=0$ 处连续.

对 $x_0\neq0$. 若连续. 则 $\lim_{x\to x_0}D(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x_0)}{x_0}=D(x_0)$ 与D不连续矛盾!

定义 2.7.2 如果 $f(x_0+)=f(x_0)$,则称函数 f 在 x_0 处**右连续**;如果 $f(x_0-)=f(x_0)$,则称函数 f 在 x_0 处**左连续**.

定理 2.7.1 如果函数 f 与 g 在 x_0 处连续,那么 $f\pm g$ 与 fg 都在 x_0 处连续.进一步,若 $g(x_0)\neq0$,则 f/g 也在 x_0 处连续.

定理 2.7.2 设函数 g 在 t_0 处连续,记 $g(t_0)$ 为 x_0.如果函数 f 在 x_0 处连续,那么复合函数 $f\circ g$ 在 t_0 处连续.

定义 2.7.3 设 I 是一个开区间,例如 (a,b),$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,+\infty)$.如果函数 f 在 I 上的每一点处都连续,则称 f 在 I 上**连续**.设 $I=[a,b]$,称 f 在 I 上连续,是指 f 在 (a,b) 上连续,并且在 a 点处右连续,同时在 b 点处左连续.人们也称 f 是 I 上的**连续函数**.不论区间 I 是开的或闭的,是有限的或无穷的,我们用 $C(I)$ 记 I 上连续函数的全体.

利用定理 2.7.2,可以从已知的连续函数出发,使用函数复合的技巧,得出不可胜数的其他连续函数,例如 $\sin a^x$,$\cos\sin x$ 等等.

定理 2.7.3 设 f 是在区间 I 上严格递增(减)的连续函数,那么 f^{-1} 是 $f(I)$ 上的严格递增(减)的连续函数.

定理 2.7.4 初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

定义 2.7.4 设 x_0 是函数 f 的间断点.

(1) 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在,且是有限的数,但 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$,则称 x_0 为 f 的一个**跳跃点**,差 $|f(x_0+)-f(x_0-)|>0$ 称为 f 在这一点的**跳跃**;

(2) 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在且有限,并且 $f(x_0+)=f(x_0-)$,但不等于 $f(x_0)$,则称 x_0 为 f 的**可去间断点**(意思是说,如果修改函数 f 在 x_0 处的值,可使 $f(x_0)$ 成为新的函数的连续点);

(3) 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 二者中至少有一个不存在或者不是有限的数,那么 x_0 叫作 f 的**第二类间断点**.

跳跃点和可去间断点统称为 f 的**第一类间断点**.

定理 2.7.5 设 f 是区间 (a,b) 上的递增(减)函数,则 f 的间断点一定是跳跃点,而且跳跃点集是至多可数的.

例:对 1^∞ 型极限.如求 $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1+(\cos\frac{1}{x}-1))^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)}=e^{\lim_{x\to\infty}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

定义 2.9.1 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个 $\delta>0$,使得当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,则称函数 f 在区间 I 上是**一致连续的**.

为了证明某个函数在区间 I 上"不一致连续",我们需要不一致连续的精确表述.

函数 f 在区间 I 上**不是一致连续的**,当且仅当存在一个 $\varepsilon_0>0$,对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$,都可以在 I 中找到两个点,记为 s_n 与 t_n,使得虽然有 $|s_n-t_n|<1/n$,但是

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

按照以上的表述,证明"不一致连续"就变得比较容易了.

定理 2.10.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,那么 f 在 $[a,b]$ 上必定一致连续.

定理 2.10.2 有界闭区间上的连续函数必在该区间上有界.

定理 2.10.3 设 f 在 $[a,b]$ 上连续.记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\quad m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

则必存在 $x^*,x_*\in[a,b]$,使得

$$f(x^*)=M,\quad f(x_*)=m.$$

也就是说,有界闭区间上的连续函数必能取到它在此区间上的最大值和最小值.

定理 2.10.4(零值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续.如果 $f(a)f(b)<0$,则必存在一点 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$.

定理 2.10.5(介值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上非常值的连续函数,γ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数,则必存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=\gamma$.

推论 2.10.1 设非常值函数 f 在 $I=[a,b]$ 上连续,那么 f 的值域 $f(I)$ 是一个闭区间.

定义 2.11.1 令

$$E=\{l\in\mathbf{R}_\infty:\text{存在数列 } x_n\in \check{B}_\delta(x_0),x_n\to x_0,\text{使得 } f(x_n)\to l\}.$$

这是一个非空的集合.设 $a^*=\sup E$,$a_*=\inf E$,分别称它们为 f 当 $x\to x_0$ 时的上极限和下极限,分别记作

$$\limsup_{x\to x_0}f(x),\quad \liminf_{x\to x_0}f(x).$$

定理 2.11.1 设函数 f 定义在 I 上,那么:

(1) $a^*\in E$;

(2) 若 $y>a^*$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)<y$;

(3) a^* 是满足前述两条性质的唯一的数.

定理 2.11.2 设 f,g 在 I 上有定义,那么:

(1) $\liminf_{x\to x_0}f(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0}f(x)$;

(2) $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$ 当且仅当 $\liminf_{x\to x_0}f(x)=\limsup_{x\to x_0}f(x)=a$;

(3) 若当 $x\in I$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$ 成立,则

$$\liminf_{x\to x_0}f(x)\leqslant\liminf_{x\to x_0}g(x),\quad \limsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0}g(x).$$

教材习题

2.2 6. 证明:可数条直线绝不可能覆盖住全平面.

若可数直线族 $\mathcal{L}$ 覆盖整个平面.取 $l\notin\mathcal{L}$. l 与 $\mathcal{L}$ 有可数交点.不能覆盖.矛盾!

2.3 7. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$l$ 为一正数.如果 $f(x+l)=f(x)$ 对一切 x 成立,则称 f 是周期为 l 的周期函数.如果 f 以任何正数为周期,求证:f 为常值函数.

对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $|x|$ 为周期 $\Rightarrow f(x)=f(0)$.为常值函数

2.3 1. 设 $f(x+T)=kf(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立,其中 T 和 k 是两个正数.证明:$f(x)=a^x\varphi(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立,其中 a 为常数,φ 是周期为 T 的函数.

取 $a=k^{\frac{1}{T}}\Rightarrow\frac{f(x+T)}{a^{x+T}}=\frac{f(x)}{a^x}$ 为周期函数

2.4 14. 求极限 $\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\,\mathrm{e})$ 的值.

有 $\frac{1}{(n+1)!}<e-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!n}$.原式 $=\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!(e-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}))$.有 $\sin\frac{2\pi}{n+1}<\sin(2\pi n!(e-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}))<\sin\frac{2\pi}{n}$ 夹逼知为 2π.

2.4 8. 设 f 在 $(-\infty,x_0)$ 上是递增的,并且存在一个数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n<x_0(n=1,2,\cdots)$,$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,且使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

求证:$f(x_0-)=A$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $n>N$ 时 $A-\varepsilon<f(x_n)<A$.对 $x_N<x<x_0$.有 $A-\varepsilon<f(x_N)<f(x)<A\Rightarrow f(x_0^-)=A$

2.5 8. 如果对 $x\in(-1,1)$,有 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$,求证:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant1.$$

$\mathrm{LHS}=\lim_{x\to0}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant1$

2.5 2. 设 a 和 b 是两个大于 1 的常数，函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内有界，并且对一切 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(ax)=bf(x)$. 求证：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\exists M>0.\ \delta>0.\ |x|<\delta$ 时 $|f(x)|<M$. 又对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_0=\frac{\delta}{a^N}$

$|x|<\delta_0$ 时. $|f(x)|=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|<\frac{M}{b^N}<\varepsilon$. 又 $f(0)=bf(0)\Rightarrow f(0)=0$. 证毕.

2.6 1. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，且 $f(x)-f(x/2)=o(x)(x\to0)$. 求证：

$$f(x)=o(x)\quad(x\to0).$$

$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ |x|<\delta$ 时 $-\varepsilon x<f(x)-f(\frac{x}{2})<\varepsilon x.\ -\frac{\varepsilon x}{2^{k-1}}<f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})<\frac{\varepsilon x}{2^{k-1}}$ 则求和后令 $k\to\infty$ 即证.

2.9 2. 设函数 f 和 g 在区间 I 上一致连续. 证明：$f+g$ 也在 I 上一致连续.

$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta_1>0.$ 对 $x_1.x_2\in I.\ |x_1-x_2|<\delta_1$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

$\exists\delta_2>0.$ 对 $x_1'.x_2'\in I.\ |x_1'-x_2'|<\delta_2$ 有 $|g(x_1')-g(x_2')|<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}.\ |x_1-x_2|<\delta$ 时 $|(f+g)(x_1-x_2)|\le|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|<2\varepsilon$ 一致连续

2.10 4. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(+\infty)$ 存在且有限. 证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

$\forall\varepsilon>0.\ \exists A>0.\ \delta_1>0$ s.t. $x_1.x_2>A$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

又 f 在 $[a.A+1]$ 上一致连续 i.e. $\exists\delta_2>0.$ s.t. $x_1.x_2\in[a.A+1].\ |x_1-x_2|<\delta_2$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 证毕.

避免在A处出现未讨论情况.

2.10 7. 设 $\varphi\in C(\mathbf{R})$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0.$$

(1) 证明：当 n 为奇数时，方程 $x^n+\varphi(x)=0$ 有一个实根；

(2) 证明：当 n 为偶数时，存在 y，使得对所有的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x).$$

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n+\varphi(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\cdot(1+\frac{\varphi(x)}{x^n})=+\infty.\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^n+\varphi(x)=-\infty$ 有一实根.

(2). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^n+\varphi(x))=+\infty$ $\forall M>f(0)\ \exists A>0\ |x|>A$ 时 $f(x)>M$. $f(x)=x^n+\varphi(x)$

在 $[-A.A]$ 中由 f 连续. $\exists y.\ f(y)$ 为最小值. 则 $f(y)<f(x)\ \forall x\in[-A.A]$ 且 $f(y)<f(0)<f(x).\ \forall|x|>A$. 证毕.

2.10 1. 设 $f\in C(\mathbf{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$. 求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

若不然. $\exists\{x_n\}\to\infty$. 且 $\{f(x_n)\}$ 有界. 有收敛子列：$f(x_{n_k})\to A$. 则 $\infty=\lim\limits_{k\to\infty}f(f(x_{n_k}))=f(A)$. 矛盾!

2.10 3. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续且有界. 求证：对每一个数 $\lambda>0$，存在数列 $x_n\to+\infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+\lambda)-f(x_n))=0.$$

若 $f(x)$ 在 $[A,\infty)$ 上有 $f(x+\lambda)-f(x)=0$. 显然成立.

若 $f(x)$ 在 $(A.\infty)$ 上无法取 0. 则由介值定理知 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 在 (x,∞) 上成立

若不为 0. 则 $\exists a>0.\ \inf\limits_{x>X}(f(x+\lambda)-f(x))=a\Rightarrow f(x+n\lambda)-f(x)\ge na\to\infty$ 与 f 有界性矛盾!

第三章 函数的导数

知识点&例题

定义 3.1.1 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义，如果极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限，则称这个极限值为 f 在点 x_0 的**导数**，记作 $f'(x_0)$，并称函数 f 在点 x_0 **可导**.

定义 3.1.2 设函数 f 在点 x_0 的右边 $[x_0,x_0+r)$ 上有定义. 若极限

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限，则称此极限为 f 在点 x_0 的**右导数**，记作 $f'_+(x_0)$. 类似地，可定义 f 在点 x_0 的**左导数** $f'_-(x_0)$. 显然，函数 f 在点 x_0 可导的一个充分必要条件是，在点 x_0 的左、右导数存在且相等，这里 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

关于在一点可导与在该点连续的关系，有下面的定理：

定理 3.1.1 若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 必在 x_0 连续.

定义 3.1.3 如果函数 f 在开区间 (a,b) 中的每一点可导，则称 f 在 (a,b) 上**可导**；如果 f 在 (a,b) 上可导，并且在点 a 处有右导数，在点 b 处有左导数，则称 f 在闭区间 $[a,b]$ 上**可导**.

类似地，可以定义 f 在 $[a,b)$ 与 $(a,b]$ 上**可导**.

定理 3.2.1(求导的四则运算) 设函数 f 和 g 在点 x 处可导，则 $f\pm g$，fg 也在点 x 处可导；如果 $g(x)\neq0$，那么函数 f/g 也在点 x 处可导. 精确地说，我们有以下公式：

(1) $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$；

(2) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

定理 3.2.2(链式法则) 设函数 φ 在点 t_0 处可导，函数 f 在点 $x_0=\varphi(t_0)$ 处可导，那么复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 t_0 处可导，并且

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=f'\circ\varphi(t_0)\varphi'(t_0).$$

定理 3.2.3(反函数的求导) 设 $y=f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上连续且严格单调. 如果它在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq0$，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，并且

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

定理 3.3.1(Leibniz(莱布尼茨，1646～1716)) 设函数 f 与 g 在区间 I 上都有 n 阶导数，那么乘积 fg 在区间 I 上也有 n 阶导数，并且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)},$$

这里 $f^{(0)}=f$，$g^{(0)}=g$，其中组合系数 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$.

定义 3.4.1 设函数 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$. 如果对点 $x_0\in(a,b)$，存在 $\delta>0$，使得 $\Delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$，并且当 $x\in\Delta$ 时，$f(x_0)\geqslant f(x)$，即 $f(x_0)$ 是 f 在 Δ 上的最大值，那么称 $f(x_0)$ 是 f 在 (a,b) 上的一个**极大值**，x_0 称为 f 的一个**极大值点**.

类似地，可以定义 f 在 (a,b) 上的**极小值和极小值点**.

极小值和极大值统称为**极值**，而极小值点和极大值点统称为**极值点**.

定理 3.4.1(Fermat) 若函数 f 在其极值点 $x_0\in(a,b)$ 处可导，则必有 $f'(x_0)=0$.

定义 3.4.2 满足 $x_0\in(a,b)$ 且 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0，称为函数 f 的一个**驻点**.

定理 3.4.2(Rolle(罗尔，1652～1719)) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，那么存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

定理 3.4.3(Lagrange) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

在一元函数微分学中，这是一个十分重要的定理，称为 **Lagrange 中值定理**.

例：设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

$\forall\varepsilon>0.\ \exists A>0.\ x>A$ 时 $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 在 $[A,x]$ 上. 有 $f(x)-f(A)=f'(\xi)(x-A)\ (A<\xi<x)$

故 $|f(x)-f(A)|=|f'(\xi)|(x-A)<\frac{\varepsilon}{2}(x-A)\Rightarrow|f(x)|\le|f(A)|+|f(x)-f(A)|\le|f(A)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-A)$

$\frac{|f(x)|}{x}\le\frac{|f(A)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}(1-\frac{A}{x})\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|f(A)|}{x}\to0$. 证毕

推论 3.4.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则函数 f 在 $[a,b]$ 上为常数的充分必要条件是，$f'=0$ 在 (a,b) 上成立.

定理 3.4.4(Cauchy) 设函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 上可导，且当 $x\in(a,b)$ 时，$g'(x)\neq0$，这时必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 3.4.5(Darboux) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可导，那么：

(1) 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值；

(2) f' 无第一类间断点.

定理 3.5.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，那么 f 在 $[a,b]$ 上递增(减)的充分必要条件是，$f'\geqslant0(\leqslant0)$ 在区间 (a,b) 上成立.

定理 3.5.2 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 如果 $f'>0(f'<0)$ 在 (a,b) 上成立，那么 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增(严格递减)的.

定理 3.5.3 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外，有正(负)的导数，那么 f 在 $[a,b]$ 上严格递增(严格递减).

定理 3.5.4 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么 f 在 $[a,b]$ 上严格递增(严格递减)的充分必要条件是：

(1) 当 $x\in(a,b)$ 时，$f'\geqslant0(f'\leqslant0)$； 允许单点处取导为0.

(2) 在 (a,b) 的任何开子区间上，$f'\neq0$.

定理 3.5.5 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_0\in(a,b)$.

(1) 如果存在正数 $\delta>0$，使得在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f'>0$，而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 $f'<0$，那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值，所谓"严格极大值"是指，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<f(x_0)$；

(2) 如果存在正数 $\delta>0$，使得在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f'<0$，而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 $f'>0$，那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值，所谓"严格极小值"是指，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>f(x_0)$.

定理 3.5.6 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，x_0 是 f 的一个驻点. 进一步，设 $f''(x_0)$ 存在，那么：

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值.

定义 3.5.1 设函数 f 在区间 I 上有定义. 如果对任何 $x_1,x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，以及任意的 $\lambda_1,\lambda_2>0$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，都有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

则称 f 为 I 上的**凸函数**. 如果上述不等式对任何 $x_1\neq x_2$ 及 $\lambda_1,\lambda_2>0(\lambda_1+\lambda_2=1)$ 不等号总成立，我们就说 f 在 I 上是**严格凸函数**.

定理 3.5.7 设 f 在区间 I 上是凸函数，则对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$，以及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，都有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i).\qquad(1)$$

如果 f 是 I 上的严格凸函数，则当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等时，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)<\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i).\qquad(2)$$

定理 3.5.9 函数 f 在区间 I 上是凸函数，当且仅当对任何 $(x_1,x_2)\subset I$ 及任何 $x\in(x_1,x_2)$，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.\qquad(4)$$

f 是 I 上的严格凸函数，当且仅当式(4)中出现的都是严格的不等号.

定理 3.5.10 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数(严格凸函数)的一个充分必要条件是，f' 在 (a,b) 上递增(严格递增).

定理 3.5.11 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上有二阶导数，则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数的充分必要条件是，$f''\geqslant0$ 在 (a,b) 上成立；而 f 在 $[a,b]$ 上为严格的凸函数的充分必要条件是，$f''\geqslant0$ 在 (a,b) 上成立，并且在 (a,b) 的任何开的子区间内 f'' 不恒等于 0.

定理 3.6.1(L'Hospital(洛必达 1661～1704)) 设 f,g 在 (a,b) 上可导，并且 $g(x)\neq0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立. 又设

$(\frac{0}{0}型)$ $$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0.$$

在这些条件下，如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在(或为 ∞)，那么便有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 3.6.2 设函数 f, g 在区间 $(a, +\infty)$ 上可导，且 $g(x) \neq 0$ 对 $x \in (a, +\infty)$ 成立，并且 ∞处的 L'Hospital法则

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

那么当 $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞)时，有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 3.6.3 设函数 f 与 g 在 (a,b) 上可导，$g(x) \neq 0$，且

($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty.$$

如果极限 $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞)，那么

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例：f 在 (a,∞) 可导. $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 证 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 由 $g(x)=x\to\infty$. LHS $=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=0$. 证毕

例：f 在 (a,∞) 上可导. 若对 $\alpha>0$. $\lim_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+xf'(x))=\beta$. 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\beta}{\alpha}$

由 $\lim_{x\to+\infty}x^\alpha=\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha f(x)+xf'(x)}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$

定义 3.7.1 设函数 f 在 x_0 的两旁(包括 x_0 在内)有定义. 在 x_0 的一侧图像 $y = f(x)$ 是严格凸的，另一侧是严格凹的，那么称 x_0 是 f 的一个**拐点**.

定义 3.7.2 (1) 如果 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ 或 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$，则称 $y = a$ 或 $y = b$ 为 $y = f(x)$ 的一条**水平渐近线**；

(2) 如果 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$，则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的一条**竖直渐近线**；

(3) 如果 $a \neq 0$，使得 $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ 或 $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称 $y = ax + b$ 为 $y = f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

教材习题

3.2 7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a) = f(b) = 0$，且

$$f'_+(a) f'_-(b) > 0.$$

证明：f 在 (a,b) 内至少有一个零点.

不妨设二者 >0. 即 $0<\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}$. $0<\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}$. $\exists\delta>0$. $x\in(a,a+\delta)$ 时 $f(x)>0$. $x\in(b-\delta,b)$ 时 $f(x)<0$. } 连续知有零点.

3.2 3. 设函数 f 在 $x = 0$ 处连续. 如果

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = m,$$

求证：$f'(0) = m$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. $|x|<\delta$ 时 $m-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<m+\varepsilon$. $\frac{m-\varepsilon}{2^k}<\frac{f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\frac{m+\varepsilon}{2^k}$

$\Rightarrow (m-\varepsilon)(1-\frac{1}{2^{k+1}})<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^k})}{x}<(m+\varepsilon)(1-\frac{1}{2^{k+1}})$. 令 $k\to\infty$ 即可.

3.2 4. 求证：在 $\mathbf{R}$ 上不存在可导函数 f，满足

$$f \circ f(x) = -x^3 + x^2 + 1.$$

若存在. $f'(x)\cdot f'(f(x))=-3x^2+2x$. 有 $1=f(1)$ 为 $f\circ f$ 不动点. $f'(1)\cdot f'(1)=-1$ 矛盾!

3.3 6. 设 $f_n(x) = x^n \ln x \ (n \in \mathbf{N}^*)$. 求极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}.$$

$f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$

$\Rightarrow f_n^{(n)}(x)=(n-1)!+nf_{n-1}^{(n-1)}(x) \Rightarrow \frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n} \Rightarrow$ 原式 $=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln x \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=\gamma$

3.4 (4) $\frac{a - b}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2}} < \arctan a - \arctan b < a - b \ (0 < b < a)$.

由 Lagrange 中值定理：$\arctan a-\arctan b=\frac{a-b}{1+\xi^2}$. $b<\xi<a$ 右侧截止.

左：设 $a=\tan\alpha$. $b=\tan\beta \Rightarrow \sin(\alpha-\beta)<\alpha-\beta$ 截止.

3.4 8. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $ab > 0$. 求证：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

LHS $=\frac{f(b)/b-f(a)/a}{1/b-1/a} \xlongequal[\text{中值定理}]{\text{Cauchy}} \frac{(\xi f'(\xi)-f(\xi))/\xi^2}{-1/\xi^2}=$ RHS.

3.5 23. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二次可导，$f(a) = f(b) = 0$，且存在 $c \in (a,b)$，使得 $f(c) > 0$. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f''(\xi) < 0$.

由 Lagrange 中值定理. $\exists\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$. s.t. $0<\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)$. $0>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\xi_2)$

则 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ s.t. $f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}<0$.

3.6 4. 设 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导. 如果

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) + xf'(x)\ln x) = l,$$

证明：$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l$

第四章 一元微分学的顶峰—Taylor定理.

知识点&例题

定义 4.1.1 设函数 f 在 (a,b) 上有定义，且 $x_0 \in (a,b)$. 如果存在一个常数 λ，使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lambda \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0), \tag{2}$$

则称函数 f 在点 x_0 处**可微**. 函数的改变量的线性主要部分 $\lambda \Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**，记为 $df(x_0)$. 该点处切线函数的改变量

定义 4.2.1 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，这里 n 是任意给定的正整数. 令

$$T_n(f, x_0; x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

称它为 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

我们有下列重要的定理： Peano余项

定理 4.2.1 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，则有

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0). \tag{3}$$

例：一些常用展开式：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

$(1+x)^\lambda=1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2+\cdots+C_\lambda^n x^n+o(x^n)$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n})$

定理 4.2.2 设函数 f 在 x_0 处有直到 k 阶的导数，并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

那么：

(1) 当 k 为奇数时，x_0 不是 f 的极值点.

(2) 当 k 为偶数时，若 $f^{(k)}(x_0) > 0$，则 x_0 是 f 的严格极小值点；若 $f^{(k)}(x_0) < 0$，则 x_0 是 f 的严格极大值点.

定理 4.3.1(Taylor) 设 f 在开区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数，x_0, x 是 (a,b) 中的任意两点，那么

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{2}$$

或者

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0), \tag{3}$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数. 一般来说，式(2)和(3)中的 ξ 是不相等的. 式(2)和(3)分别称为 Lagrange 余项和 Cauchy 余项.

例：f 在 $(a,+\infty)$ 有三阶导数，若 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim_{x\to+\infty}f'''(x)$ 存在有限. 证明 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$

证明：设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$. $\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=\beta$. 有 $f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi)}{6}$ $x<\xi<x+1$

$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\eta)}{6}$ $x-1<\eta<x$ } $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{6}(f'''(\xi)-f'''(\eta))$

令 $x\to\infty$. 有 $2\alpha=2\alpha+\lim_{x\to+\infty}f''(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$. 又 $f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 再由 $\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$

教材习题

4.2 4. 设 $x_1 = \sin x_0 > 0$，$x_{n+1} = \sin x_n \ (n > 1)$. 证明：$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n/3}\, x_n = 1$.

有 $0<x_1<1 \Rightarrow$ 若 $x_{n-1}\in(0,1)$. 有 $x_{n+1}=\sin x_n\in(0,1) \Rightarrow \forall n$. $0<x_n<1$. 此时 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 收敛

设 $\lim_{n\to+\infty}x_n=a$. 则 $a=\sin a$ $a\in[0,1] \Rightarrow a=0$. 由 Stolz 定理 $\lim_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{x^2-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=3$. 证毕

4.2 5. 设 $y_1 = c > 0$，$\frac{y_{n+1}}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{y_n}{n}\right) \ (n \geq 1)$. 证明：$\lim_{n \to \infty} y_n = 2$.

显然 $y_n>0$. 有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{n}=0$. $\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n/y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln(1+\frac{y_n}{n})}-\frac{n}{y_n}}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=2$.

4.3 4. 设函数 f 和 g 在 $(-1,1)$ 上无限次可导，且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!\,|x| \quad (|x| < 1, n = 0,1,2,\cdots).$$

求证：$f = g$.

用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式：有 $|f^{(n)}(0)-g^{(n)}(0)|=0$ 截止. 故在0处展开有 $|f(x)-g(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!}x^{n+1}-\frac{g^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\cdot|x|\to0$ ($|\xi_{n,x}|<|x|$) 即 $f=g$.

4.3 2. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 求证：存在 $c \in (a,b)$，使得 ← 端点展开是常用方法.

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b - a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

$\exists\,\xi,\eta$ 分别 $\in(a,\frac{a+b}{2}),(\frac{a+b}{2},b)$ s.t. $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\Rightarrow|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|)\cdot\frac{(b-a)^2}{4}$ 取 $f''(c)=\max\{f''(\xi),f''(\eta)\}$ 即可.

4.3 7. 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上二次可导. 令 $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f^{(k)}(x)|<+\infty(k=0,1,2)$. 求证:

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

$$\left.\begin{aligned}f(x+h)&=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2\\ f(x-h)&=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2\end{aligned}\right\}f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2-\frac{f''(\eta)}{2}h^2\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{M_2}{2}h+\frac{M_0}{h}$$ 取 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ 即证

第五章 求导的逆运算

知识点&例题 教材习题

$\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\cot x+c$ $\int\frac{dx}{\cos^2x}=\tan x+c$ $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ 带绝对值

分部积分: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$$ 记得加常数C

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int\cot^2t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\cot t\sin t)+c$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c,$$

8. 求出函数 f, 设:

(1) $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$; (2) $f'(\sin^2x)=\cos^2x$.

(1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=2\sqrt{x}+C$ (2) $f'(x)=1-x$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+C$

形如 $\int R(\sin x,\cos x)dx$, 可由 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ 换元为 $\int R(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$ ($t=\tan\frac{x}{2}$)

① 直接换元 (1) $\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}\mathrm{d}x$; $=\int\frac{\cos^2x-1}{\cos^4x}d\cos x=\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}+C$

② 公式换元 (3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$; $=\int\frac{1}{\frac{4t}{1-t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{3t^2+6t+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$

③ 齐次化 (7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4x+\sin^4x}$; $=\int\frac{(\tan^2x+1)^2}{\tan^4x+1}dx=\int\frac{(t^2+1)^2}{t^4+1}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x-\cot x}{\sqrt{2}}+C$

形如 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 换元: $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

形如 $\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$, 若 $\gamma,\frac{\beta+1}{\alpha},\frac{\beta+1}{\alpha}+\gamma$ 三者有一为整数, 可被有理化.

(2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$; 取 $t=x^{\frac{1}{6}}$

(7) $\int\frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}\mathrm{d}x$;

原式 $=\int(\frac{1}{x+1}+\frac{12}{(2x+1)^3}-\frac{6}{(2x+1)^2})dx=\ln|1+x|-\frac{3}{(2x+1)^2}+\frac{3}{2x+1}+C$

第六章 函数与积分

知识点&例题

定义 6.1.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 如果实数 I 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 的分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$, 而不管 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 如何选择, 都有

$$\left|I-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

成立, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**, 称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**.

定理 6.1.1(Newton-Leibniz 公式) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 (a,b) 上有原函数 F. 如果 F 在 $[a,b]$ 上连续, 那么必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).\tag{6}$$

例: 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$

取对数. 令 $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\ln(1+\frac{k}{n})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=[(x+1)\ln(x+1)-x]\Big|_0^1=2\ln2-1$. 故原式 $=\frac{4}{e}$

定理 6.2.1 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界. (无界则不可积. 闭区间!)

定理 6.2.2(积分的可加性) 设 $c\in(a,b)$, f 在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 那么 f 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\tag{1}$$

定理 6.2.3 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续且非负, 但 f 不恒等于 0, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

定理 6.2.4 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.\tag{2}$$

定理 6.2.5(积分平均值定理) 设函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上不改变符号, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 (不一定唯一!!!)

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 6.2.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

现在我们对这个推论作一个几何解释. 为此, 不妨设 $f\geqslant0$. 上式的左边代表一个曲边梯形的面积, 而右边是一个矩形的面积. 这就是说, 曲边梯形的面积可转化为一个矩形的面积, 这个矩形的一边同曲线至少有一个交点, 见图 6.2. 这意味着在这个图中, 阴影部分的两块图形的面积是相等的.

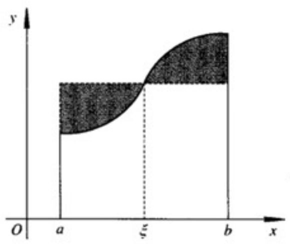


图 6.2

定理 6.3.1 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么上限变动的积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 6.3.2 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 在一点 $x_0\in[a,b]$ 处连续, 那么 F 在 x_0 处可导, 并且

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

定理 6.3.3(微积分基本定理) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

推论 6.3.1 $[a,b]$ 上的连续函数一定有原函数.

从定理 6.3.3 可以再次得到下面的 Newton-Leibniz 公式.

定理 6.3.4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, G 是 f 在 $[a,b]$ 上的任一原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=G(b)-G(a).\tag{1}$$

定理 6.3.5 如果函数 G 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 那么

$$\int_a^x G'(t)\mathrm{d}t=G(x)-G(a)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

例: f 在 $[a,b]$ 上有连续导数. $f(a)=0$. 证明 $\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b(f'(x))^2dx$

有 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt\le(\int_a^x 1\,dt)^{\frac{1}{2}}(\int_a^x(f'(t))^2dt)^{\frac{1}{2}}$ 即 $f^2(x)\le(x-a)\int_a^x(f'(t))^2dt\le(x-a)\int_a^b f'(x)^2dx$ 积分即证.

例: f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数. $f(0)=f(1)=0$. 当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq0$. 求证 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\ge4$

由 $f(x)\neq0$. 不妨设 $f(x)>0$. 记 $\max\limits_{0\le x\le1}f(x)=f(c)$ $(0<c<1)$

有 $f(c)-f(0)=f'(\xi)c$ $\xi\in(0,c)$; $f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$ $\eta\in(c,1)\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(c)}{c}$. $f'(\eta)=\frac{f(c)}{c-1}$

则 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\ge\frac{1}{f(c)}\int_0^1|f''(x)|dx\ge\frac{1}{f(c)}\int_\xi^\eta|f''(x)|dx\ge\frac{1}{f(c)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)dx\right|=\frac{1}{|c(c-1)|}\ge4$

结论: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\begin{cases}\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2} & m\text{为偶数}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\text{为奇数}\end{cases}$

定理 6.4.1(Taylor 公式的积分余项) 设函数 f 在 (a,b) 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数, 那么对任意固定的 $x_0\in(a,b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\quad(a<x<b).$$

定理 6.4.2 设函数 f 在区间 I 上连续, $a,b\in I$, 函数 φ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数, $\varphi([\alpha,\beta])\subset I$, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

定理 6.5.1 设 π 与 π' 是 $[a,b]$ 的两个分割, 其中 π' 是在 π 的分点上多加了 k 个新的分点而成的, 则

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{S}(f,\pi')\leqslant\underline{S}(f,\pi)+k\omega\|\pi\|,$$

$$\overline{S}(f,\pi)\geqslant\overline{S}(f,\pi')\geqslant\overline{S}(f,\pi)-k\omega\|\pi\|.$$

定理 6.5.2 (Darboux) 对 $[a,b]$ 上的任意有界函数, 有

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\overline{S}(f,\pi)=\overline{I},\qquad\lim_{\|\pi\|\to0}\underline{S}(f,\pi)=\underline{I}.$$

定理 6.5.3 设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 有界, 则以下三个条件互相等价:

(1) f 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) $\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0$, 其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 f 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)$ 上的振幅;

(3) $\underline{I}=\overline{I}$.

定理 6.5.4 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6.5.5 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定义 6.6.1 设 A 为实数的集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在至多可数个开区间 $\{I_n:n\in\mathbf{N}^*\}$ 组成 A 的一个开覆盖, 并且 $\sum\limits_{n=1}^\infty|I_n|\leqslant\varepsilon$ ($|I_n|$ 表示开区间 I_n 的长度), 那么称 A 为**零测度集**, 简称**零测集**.

定理 6.6.1(Lebesgue) 设函数 f 在有限区间 $[a,b]$ 上有界, 那么 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是, $D(f)$ 是一个零测集.

推论 6.6.1 若 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且在 $[a,b]$ 上只有至多可数个间断点, 那么 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

这是因为此时 $D(f)$ 是零测集.

推论 6.6.2 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

由于 $D(|f|)\subset D(f)$, 可知 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

推论 6.6.3 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 fg 在 $[a,b]$ 上也可积.

这是因为 $D(fg)\subset D(f)\cup D(g)$.

推论 6.6.4 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, $1/f$ 在 $[a,b]$ 上有定义且有界, 那么 $1/f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

这是因为 $D(f)=D(1/f)$.

推论 6.6.5 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么对任何 $[c,d]\subset[a,b]$, f 在 $[c,d]$ 上也可积.

推论 6.6.6 如果 $c\in(a,b)$，那么当 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积时，f 在 $[a,b]$ 上也可积.

这是因为 $D(f;[a,c])\cup D(f;[c,b])=D(f;[a,b])$.

推论 6.6.7 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 如果 g 在 $[a,b]$ 上除去有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 外和 f 相等，那么 g 也在 $[a,b]$ 上可积，而且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad (15)$$

定理 6.7.1 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积，且有原函数 F，那么

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a);$$

若 f 在 $(-\infty,a]$ 上可积，且有原函数 F，那么

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(-\infty);$$

若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，且有原函数 F，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(-\infty).$$

这里

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x),\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

例：$a>0$. 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 与 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$

$\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\int_0^{\infty}e^{-ax}d\sin bx=\frac{a}{b}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\cdots=\frac{a}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$

则有 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$，$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$

第二类反常积分(瑕积分)

例：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 瑕点0为瑕点. 令 $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx$

$\Uparrow$ $=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt=I$ $\Big\}$ $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

教材习题

6.1 (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

6.2 9. 设 $[0,\pi]$ 上的连续函数 f 满足

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

求证：f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

$\sin\theta>0$ in $(0,\pi)\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上变号. 至少有1个零点. 若只有 θ_0 为零点.

则 $f(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ 在 θ_0 外恒正(负). $\theta\in(0,\pi)\Rightarrow 0\neq\int_0^{\pi}f(\theta)\sin(\theta-\theta_0)\overset{展开}{=\!=}0$. 矛盾!

6.2 4. 函数 f 在 $[a,b]$ 上连续、非负且严格递增. 由积分平均值定理，对每个 $p>0$，存在唯一的一点 $x_p\in[a,b]$，使得

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t.$$

求证：

$$\lim_{p\to+\infty}x_p=b.$$

$\forall\varepsilon>0$. $\frac{f(b-\frac{\varepsilon}{2})}{f(b-\varepsilon)}>1\Rightarrow\exists N>0$. $p>N$ 时 $\frac{f^p(b-\frac{\varepsilon}{2})}{f^p(b-\varepsilon)}>\frac{2(b-a)}{\varepsilon}$ 则 $(b-a)f^p(x_p)>\int_{b-\frac{\varepsilon}{2}}^{b}f^p(t)dt>\frac{\varepsilon}{2}f^p(b-\frac{\varepsilon}{2})>(b-a)f^p(b-\varepsilon)$ 证毕

6.3 5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导(即 f 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数). 求证：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

$\exists\xi\in[a,b]$. LHS $=|f(\xi)|$. $\exists\eta\in[a,b]$. RHS 1 $=|f(\eta)|\Rightarrow$ LHS $\leq|f(\eta)|+|f(\xi)-f(\eta)|\leq|f(\eta)|+|\int_{\xi}^{\eta}f'(x)dx|\leq$ RHS.

6.3 7. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>0$. $x>A$ 时 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 即 $|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-a|\leq|\frac{1}{x}\int_0^A f(t)dt|+|\frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt-a|<2\varepsilon$.

或用 L'Hospital 法则直接得结果.

6.3 5. 设函数 f 连续可导，$f(1)=1$，且当 $x\geqslant1$ 时，有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\leqslant1+\pi/4$.

$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt=1+\int_1^x\frac{1}{t^2+f^2(t)}dt\leq1+\int_1^x\frac{dt}{t^2+1}\leq1+\frac{\pi}{4}$. 又 $f\uparrow\Rightarrow$ 存在.

6.4 2. 设

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots).$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$.

由 Stolz 定理. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)t\,dt}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{2}$.

6.4 5. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，并且

$$\int_0^1 f(x)x^k\mathrm{d}x=0\ (k=0,1,\cdots,n-1),\quad\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=1.$$

求证：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f(\xi)|\geqslant2^n(n+1)$.

若 $\forall\xi\in(0,1)$ 有 $|f(\xi)|<2^n(n+1)$. 则 $1=\int_0^1 f(x)x^n dx=\int_0^1 f(x)(x-\frac{1}{2})^n dx<2^n(n+1)\int_0^1|x-\frac{1}{2}|^n dx=1$ 矛盾!

6.6 4. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 如果对每个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$，必存在 $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$，使得 $f(x_1)f(x_2)\leqslant0$，问 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 应取何值?

$\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx\leq0\leq\overline{\int_a^b}f(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\Rightarrow$ 为0.

6.6 1. 对 $\alpha\in(0,1]$，定义

$$f_\alpha(x)=\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right].$$

证明：

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\mathrm{d}x=\alpha\ln\alpha.$$

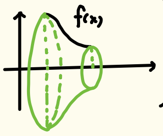
LHS $=\int_0^1(\lfloor\frac{\alpha}{x}\rfloor-\frac{\alpha}{x})dx-\alpha\int_0^1(\lfloor\frac{1}{x}\rfloor-\frac{1}{x})dx\overset{t=\alpha x}{=\!=}\int_{\alpha}^1(\lfloor\frac{\alpha}{x}\rfloor-\frac{\alpha}{x})dx=-\int_{\alpha}^1\frac{\alpha}{x}dx=\alpha\ln\alpha$

第七章 积分学的应用

知识点&例题

极坐标曲线 $r(\theta)$ 围成面积：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$ 弧长：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

参数曲线 $(x(t),y(t))$ 弧长：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$



体积 $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ 面积 $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

若绕 y：$V=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$ $S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

Stirling 公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ Wallis 公式：$\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

4. 设心脏线的极坐标方程为 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$. 试计算：

(1) 它的长度；

(2) 它绕极轴旋转一周所产生的立体的体积；

(3) 它绕极轴旋转一周所产生的立体的侧面积.

(1) $\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=8a$ (2). $V=\pi\int_0^{2a}y^2dx$ (用 θ 换) $=\frac{8\pi}{3}a^3$ (3) $S=2\pi\int_0^{\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2$

7. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{2}\ln^2 n+\alpha+O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

这是 α 是某个常数.

$x\geq3$ 时 $\frac{\ln x}{x}$ 递减. 故 $\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}-\int_3^n\frac{\ln x}{x}dx=\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}\ln^2 n+\frac{1}{2}\ln^2 3$ 在 $n\to\infty$ 时收敛于 β.

取 $\alpha=\beta+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 3\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}\ln^2 n-\alpha|\leq\frac{\ln(n-1)}{n-1}$ 证毕.

2. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^n dt=B(\frac{1}{2},n+1)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$

第八章 多变量函数的连续性

知识点&例题

定义 8.2.1 设 $\{x_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，$a\in\mathbf{R}^n$. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $i>N$ 时，有

$$\|x_i-a\|<\varepsilon,$$

我们就称点 a 是点列 $\{x_i\}$ 的极限，记作

$$\lim_{i\to\infty}x_i=a\quad\text{或}\quad x_i\to a\ (i\to\infty).$$

这时也称点列 $\{x_i\}$ 收敛于点 a.

定理 8.2.1 设 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$，$\lim\limits_{i\to\infty}y_i=b$，那么：

(1) $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i\pm y_i)=a\pm b$；

(2) 对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\lim_{i\to\infty}(\lambda x_i)=\lambda a.$$

定义 8.2.2 设 $\{x_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $k,l>N$ 时，有 $\|x_k-x_l\|<\varepsilon$，我们就称 $\{x_i\}$ 是一个**基本(点)列**.

定理 8.2.2 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$ 等价于点列 $\{x_i\}$ 按分量收敛于 a.

定理 8.2.3 $\{x_i\}$ 为收敛点列的充分必要条件是 $\{x_i\}$ 是基本点列.

定理 8.2.4(Bolzano-Weierstrass) 从任一有界的点列中可以选出收敛的子点列.

定义 8.3.1 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 如果点 $a\in E$，并且存在 $r>0$，使得 $B_r(a)\subset E$，那么称 a 为 E 的一个**内点**. 点集 E 的全体内点所构成的集合记作 E°，称之为 E 的**内部**. 如果 $E^\circ=E$，那么称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开集**.

定理 8.3.1 对任何集 E，E 的内部 E° 是开集.

定理 8.3.2 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中：

(1) $\mathbf{R}^n,\varnothing$ 是开集；

(2) 设 $\{E_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集族，其中指标 α 来自一个指标集 I，那么并集 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 也是开集(任意多个开集的并是开集)；

(3) 设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是有限个开集，那么交集 $\bigcap_{i=1}^{m}E_i$ 也是开集(有限个开集之交是开集).

定义 8.3.2 设 $F\subset\mathbf{R}^n$. 如果 F^c 是开集，则称 F 是**闭集**.

定理 8.3.3 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中：

(1) $\varnothing,\mathbf{R}^n$ 是闭集；

(2) 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭子集族，其中指标 α 来自一个指标集 I，那么交集 $\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集(任意多个闭集的交是闭集)；

(3) 设 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 是有限个闭集，那么并集 $\bigcup_{i=1}^{m}F_i$ 也是闭集(有限个闭集的并是闭集).

定义 8.3.3 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $a\in\mathbf{R}^n$ 有这样的性质：对任何 $r>0$，在空心球 $B_r(\check{a})$ 中总有 E 中的点，那么称点 a 为 E 的**凝聚点**或**极限点**.

定义 8.3.4 点集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 的凝聚点的全体称为 E 的**导集**，记作 E'. 记 $\bar{E}=E\cup E'$，称 $\bar{E}$ 为 E 的**闭包**.

推论 8.3.1 E 是闭集的充分必要条件是，E 中的任何收敛点列的极限必在 E 中.

定理 8.3.5 E 的导集 E' 与闭包 $\bar{E}$ 都是闭集.

定理 8.3.6 E° 是含于 E 内的最大开集，$\bar{E}$ 是包含 E 的最小闭集.

定义 8.3.5 设点集 $E\subset\mathbf{R}^n$，$(E^c)^{\circ}$ 中的点称为 E 的**外点**，E 的外点的全体称为 E 的**外部**；既不是 E 的内点也不是 E 的外点的点称为 E 的**边界点**，E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记为 ∂E.

定理 8.3.7（闭集套定理） 设 $\{F_i\}(F_i\neq\varnothing, i=1,2,3,\cdots)$ 是一闭集列，并且 $F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots$. 若

$$\lim_{i\to\infty}\operatorname{diam}(F_i)=0,$$

那么 $\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i$ 只含唯一的一个点.

定义 8.4.1 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 如果 E 中的任一点列都有一子列收敛于 E 中的一点，则称 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**列紧集**.（闭列紧）

下面的定理道出了 $\mathbf{R}^n$ 中的列紧集实际上是有界闭集.

定理 8.4.1 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 E 为列紧集的充分必要条件是 E 为有界闭集.

定义 8.4.2 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\mathscr{J}=\{G_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族. 如果

$$E\subset\bigcup_{\alpha}G_\alpha,$$

则称开集族 $\mathscr{J}$ 覆盖了 E，或者称 $\mathscr{J}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

定义 8.4.3 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若能从 E 的任一个开覆盖中选出有限个开集，它们仍能组成 E 的开覆盖，那么称 E 为一个**紧致集**.

定义 8.5.1 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 如果 E 的任一分解式 $E=A\cup B$ 满足条件 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，并且 $A\cap B=\varnothing$，便可使得以下两式：

$$A\cap B'\neq\varnothing \quad 和 \quad A'\cap B\neq\varnothing$$

中将至少有一个成立，那么称 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**连通集**，或者说 E 是**连通的**.

定义 8.5.2 在 $\mathbf{R}^n$ 中，连通的开集称为**区域**；区域的闭包称为**闭区域**.

定理 8.5.1 开集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为连通集的充分必要条件是，E 不能分解成为两个不相交的非空开集之并.

定理 8.5.2 在 $\mathbf{R}$ 上，集合 E 连通的充分必要条件是 E 为区间.

定义 8.5.3 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 如果对任意的两点 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in E$，都有一条"连续曲线" $l\subset E$ 将 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 连接起来，则称点集 E 是**道路连通**的. 所谓 $\mathbf{R}^n$ 中的**连续曲线** l，是指可以表示为参数方程：

$$x_i=\varphi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且

$$\boldsymbol{p}=(\varphi_1(a),\varphi_2(a),\cdots,\varphi_n(a)),$$
$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1(b),\varphi_2(b),\cdots,\varphi_n(b)),$$

定理 8.5.3 道路连通集一定是连通集.

定义 8.6.1 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，那么映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为一个 n **元函数**，其中 D 称为函数 f 的**定义域**，而 $f(D)\subset\mathbf{R}$ 称为 f 的**值域**.

定义 8.6.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 是 D 的一个凝聚点（即 $\boldsymbol{a}\in D'$），又设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in D$ 且 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$ 时，有

$$|f(\boldsymbol{x})-l|<\varepsilon,$$

我们就称函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处有**极限** l，也可以说当 $\boldsymbol{x}$ 趋向于 $\boldsymbol{a}$ 时，$f(\boldsymbol{x})$ 趋向于 l，记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l,$$

或者更简单些，写作

$$f(\boldsymbol{x})\to l\quad(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

定理 8.6.1 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，点 $\boldsymbol{a}\in D'$. 函数极限

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l$$

的充分必要条件是，对任何点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset D$，$\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{a}(i=1,2,3,\cdots)$ 且 $\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{a}(i\to\infty)$，数列极限

$$\lim_{i\to\infty}f(\boldsymbol{x}_i)=l.$$

例：$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处极限存在性？

$f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$. $f(\frac{1}{n},0)=0$. 不存在

定理 8.6.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f,g:D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{a}\in D'$. 如果 f,g 存在着有限的极限：

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l,\quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})=m,$$

那么有：

(1) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(f\pm g)(\boldsymbol{x})=l\pm m$；

(2) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}fg(\boldsymbol{x})=lm$；

(3) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x})=\frac{l}{m}$，其中 $m\neq0$.

证明留给读者.

定理 8.6.3 设函数 f 在以 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 为球心、r 为半径的某个空心球 $B_r(\check{\boldsymbol{a}})$ 上有定义，且 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l$；一元函数 φ 在以 l 为球心的空心球 $U=\{t:0<|t-l|<\delta\}$ 上有定义，且 $\lim_{t\to l}\varphi(t)=m$. 再设

$$f(B_r(\check{\boldsymbol{a}}))\subset U,$$

那么就有

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\varphi(f(\boldsymbol{x}))=m.$$

定理 8.6.4（Cauchy 收敛原理） 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in D'$，$f:D\to\mathbf{R}$. 那么极限 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ 存在的充分必要条件是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$ 且

$$0<\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{a}\|<\delta \quad 和 \quad 0<\|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{a}\|<\delta$$

同时成立时，一定有 $|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.

定义 8.7.1 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{a}\in D$. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in D\cap B_\delta(\boldsymbol{a})$ 时，有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处**连续**. $\boldsymbol{a}$ 称为 f 的一个**连续点**，D 中 f 的非连续点称为 f 的**间断点**.

如果 f 在 D 中的每个点上都连续，则称 f **在 D 上连续**.

定义 8.7.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$. 如果任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$，则称 f 在 D 上**一致连续**.

定理 8.7.1 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，且 f 在 D 上连续. 如果 D 是紧致集，那么 f 在 D 上一致连续.

定理 8.7.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，且 f 在 D 上连续. 如果 D 是紧致集，那么 f 的值域 $f(D)$ 也是紧致集.

定理 8.7.3 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$ 连续. 如果 D 是一个紧致集，那么 f 在 D 上能取到它的最小值和最大值.

定理 8.7.4 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一连通集，函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 是连续的，那么 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的连通集.

定理 8.7.5（介值定理） 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一个连通集，函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 连续. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$ 和 $r\in\mathbf{R}$ 使得

$$f(\boldsymbol{a})<r<f(\boldsymbol{b}),$$

那么存在 $\boldsymbol{c}\in D$，使得 $f(\boldsymbol{c})=r$.

第九章 多变量函数的微分学

知识点&例题

定义 9.1.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{u}$ 是一个方向，$\boldsymbol{x}_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\tag{1}$$

存在且有限，那么称这个极限是函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数**，记为 $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$.

例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 原点处哪些方向的方向导数存在？

$\frac{f(t\sin\theta,t\cos\theta)-f(0,0)}{t}=\frac{t\sin\theta\cos\theta}{|t|}\Rightarrow\theta=0,\frac{\pi}{2}$ 时存在.

定义 9.2.1 设 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$. 如果成立着

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ih_i+o(\|\boldsymbol{h}\|)\quad(\|\boldsymbol{h}\|\to0).\tag{1}$$

式中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是不依赖于 $\boldsymbol{h}$ 的常数，那么称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可微**，并称 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ih_i$ 为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ih_i.\tag{2}$$

如果 f 在开集 D 上的每一点处都可微，则称 f 是 D 上的**可微函数**.

定理 9.2.1 设 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 f 必在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

定理 9.2.2 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微当且仅当下面的等式成立：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i.$$

当 $\|\boldsymbol{h}\|\to0$ 时，

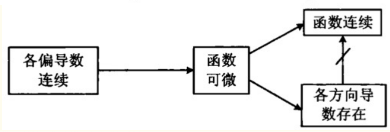
$$\beta_i(\boldsymbol{h})\to0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

定义 9.2.2 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0\in D$，包含着点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一开集称为 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个**邻域**.

定理 9.2.3 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}_0\in D$. 如果 $\mathrm{D}_if(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域中存在且在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

定理 9.2.4 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的任意方向 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 的方向导数都存在，而且

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)u_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)u_n.\tag{7}$$



定义 9.3.1 如果映射 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}),\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，它的元素不依赖于 $\boldsymbol{h}$，并且

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to0}\frac{\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0,\tag{2}$$

则称映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可微**，并称 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}.\tag{3}$$

记

$$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix},$$

称之为映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 **Jacobi 矩阵**，它是一个 $m\times n$ 矩阵. 于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}.\tag{5}$$

定理 9.3.1 若映射 f 在 x_0 的某一邻域内存在 Jacobi 矩阵 Jf，且 Jf 的各元素在点 x_0 处连续，则映射 f 在点 x_0 处可微.

定义 9.3.2 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}^m$. 如果 f 在 D 上的每一点处都连续，则记 $f\in C(D)$；如果 Jf 在 D 上的每一点处都连续，则记 $f\in C^1(D)$.

定理 9.4.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$g:D\to\mathbf{R}^m$，g 在点 $x_0\in D$ 处可微. 又设 f 把包含 $g(D)$ 的一个开集映射至 $\mathbf{R}^l$，并且 f 在点 $g(x_0)$ 处可微，那么复合映射 $f\circ g$ 在点 x_0 处可微，并且

$$J(f\circ g)(x_0) = Jf(g(x_0))Jg(x_0). \tag{1}$$

推论 9.4.1 设 $z=f(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 是一个 m 元可微函数，其中每个变量 y_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 又是 n 个变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的可微函数：

$$y_i = g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad (i=1,2,\cdots,m),$$

那么复合函数

$$z = f(g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$

是 n 个变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的可微函数，而且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

曲线 Γ 在 P_0 处切线方程：$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

定义 9.5.1 设 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 是一段光滑曲线，$\boldsymbol{r}'(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0+\Delta t)$ 之间的夹角记为 $\Delta\theta$，$\boldsymbol{r}(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$ 之间的弧长记为 Δs. 如果 $\lim\limits_{\Delta s\to0}|\Delta\theta/\Delta s|$ 存在，就称此极限为 Γ 在 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的**曲率**，记为

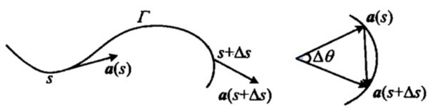
$$k(t_0) = \lim_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

定理 9.5.1 设曲线 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$（$s$ 是弧长参数）的每一点处有一个单位向量 $\boldsymbol{a}(s)$，$\boldsymbol{a}(s+\Delta s)$ 和 $\boldsymbol{a}(s)$ 之间的夹角记为 $\Delta\theta$. 如果 $\boldsymbol{a}(s)$ 可导，那么

$$\|\boldsymbol{a}'(s)\| = \lim_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|. \tag{3}$$

定理 9.5.2 设 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条以弧长为参数的曲线，那么它的曲率

$$k(s) = \|\boldsymbol{r}''(s)\|.$$



定理 9.6.1（隐函数定理） 设开集 $D\subset\mathbf{R}^2$，函数 $F:D\to\mathbf{R}$ 满足条件：

(a) $F\in C^1(D)$；

(b) 点 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$；

(c) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq0$.

那么存在一个包含 (x_0,y_0) 的开矩形 $I\times J\subset D$，使得：

(1) 对每一个 $x\in I$，方程 $F(x,y)=0$ 在 J 中有唯一的解 $f(x)$；

(2) $y_0=f(x_0)$；

(3) $f\in C^1(I)$；

(4) 当 $x\in I$ 时，有

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}, \tag{2}$$

其中 $y=f(x)$.

例：方程 $\sin x+\ln y-xy^3=0$ 在 $(0,1)$ 旁确定函数 $f(x)$. 求 $f'(0)$.

令 $F(x,y)=\sin x+\ln y-xy^3$. 有 $\dfrac{\partial F(0,1)}{\partial x}=0$. $\dfrac{\partial F(0,1)}{\partial y}=1\Rightarrow f'(0)=-\dfrac{\frac{\partial F(0,1)}{\partial x}}{\frac{\partial F(0,1)}{\partial y}}=0$

定理 9.6.2 设开集 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$，$F:D\to\mathbf{R}$，满足条件：

(a) $F\in C^1(D)$；

(b) $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$，这里 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，$y_0\in\mathbf{R}$ 且 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)\in D$；

(c) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0,y_0)}{\partial y}\neq0$.

那么存在 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)$ 的一个邻域 $G\times J$，其中 G 是 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个邻域，J 是 $\mathbf{R}$ 中含 y_0 的一个开区间，使得：

(1) 对每一个 $\boldsymbol{x}\in G$，方程

$$F(\boldsymbol{x},y)=0$$

在 J 中有唯一解，记为 $f(\boldsymbol{x})$；

(2) $y_0=f(\boldsymbol{x}_0)$；

(3) $f\in C^1(G)$；

(4) 当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)}\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 $y=f(\boldsymbol{x})$.

定理 9.10.5 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ 是 $[a,b]$ 上的连续映射，在开区间 (a,b) 上可微，那么存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|Jf(\xi)\|(b-a).$$

应用定理 9.10.5，我们就可以证明下面的所谓**拟微分平均值定理**.

定理 9.10.6 设凸区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，且映射 $f:D\to\mathbf{R}^m$ 在 D 上可微，则对任何 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$，在由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的线段上必有一点 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\|f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})\| \leqslant \|Jf(\boldsymbol{\xi})\|\,\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|.$$

定理 9.7.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^{n+m}$，$F:D\to\mathbf{R}^m$，满足下列条件：

(a) $F\in C^1(D)$；

(b) 有一点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D$，使得 $F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$；

(c) 行列式 $\det J_yF(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq0$.

那么存在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的一个邻域 $G\times H$，使得：

(1) 对每一个 $\boldsymbol{x}\in G$，方程(3)在 H 中有唯一的解，记为 $f(\boldsymbol{x})$；

(2) $\boldsymbol{y}_0=f(\boldsymbol{x}_0)$；

(3) $f\in C^1(G)$；

(4) 当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时，

$$Jf(\boldsymbol{x}) = -(J_yF(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{-1}J_xF(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$.

例：$z=f(x,y)$. $g(x,y)=0$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

法一：$g(x,y)=0$ 确定 $y=\varphi(x)$. 代入有 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi'(x)$. $\varphi'(x)=-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$

法二：令 $F_1=f(x,y)-z$. $F_2=g(x,y)$. $F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$

有 $JF=\begin{pmatrix}f_x & f_y & -1\\ g_x & g_y & 0\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}f_y & -1\\ g_y & 0\end{vmatrix}=g_y\neq0$ 时 y 与 z 为 x 的函数. 有 $\begin{pmatrix}\frac{dy}{dx}\\ \frac{dz}{dx}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}f_y & -1\\ g_y & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f_x\\ g_x\end{pmatrix}$ 即证

定理 9.8.1（局部逆映射定理） 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}^n$，满足：

(a) $f\in C^1(D)$；

(b) 有 $\boldsymbol{x}_0\in D$，使得

$$\det Jf(\boldsymbol{x}_0)\neq0. \qquad \square$$

记 $\boldsymbol{y}_0=f(\boldsymbol{x}_0)$，那么存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 U 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个邻域 V，使得：

(1) $f(U)=V$，且 f 在 U 上是单射；

(2) 记 g 是 f 在 U 上的逆映射，$g\in C^1(V)$；

(3) 当 $\boldsymbol{y}\in V$ 时，

$$Jg(\boldsymbol{y}) = (Jf(\boldsymbol{x}))^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{y})$.

定理 9.8.2（逆映射定理） 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}^n$，满足：

(a) $f\in C^1(D)$；

(b) 对每一 $\boldsymbol{x}\in D$，$\det Jf(\boldsymbol{x})\neq0$.

那么 $G=f(D)$ 为一开集. 又如果：

(c) f 是 D 上的单射，

那么：

(1) 存在从 G 到 D 上的映射 f^{-1}，满足：对一切 $\boldsymbol{y}\in G$，有

$$f\circ f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}; \tag{1}$$

(2) $f^{-1}\in C^1(G)$；

(3)

$$Jf^{-1}(\boldsymbol{y}) = (Jf(\boldsymbol{x}))^{-1}\quad (\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{y})). \tag{2}$$

定义 9.8.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$. 映射 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 满足以下三个条件：

(1) $f\in C^1(D)$；

(2) f 是 D 上的单射；

(3) $\det Jf(\boldsymbol{x})\neq0$ 对一切 $\boldsymbol{x}\in D$ 成立.

我们称 f 是 D 上的一个**正则映射**.

例：求极坐标变换中 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$. 有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$. 取逆即可.

定理 9.9.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^2$，$f:D\to\mathbf{R}$. 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上存在，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 处连续，那么 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处存在，而且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

定理 9.10.1 设定义在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 可微，则对任何两点 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$，在由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 确定的线段上存在一点 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}). \tag{1}$$

定理 9.10.2 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域. 如果对任意的 $\boldsymbol{x}\in D$，有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

那么 f 在 D 上为一个常数.

引理 9.10.1 设 k,n 是两个正整数，那么

$$(x_1+\cdots+x_n)^k = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是非负整数.

定理 9.10.3 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一个凸区域，$f\in C^{m+1}(D)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}=(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)$ 是 D 中的两个点，则必存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}\frac{\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}} + R_m, \tag{3}$$

其中

$$R_m = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m+1}\frac{\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

称为 Lagrange 余项.

从定理 9.10.3，还可得到带 Peano 余项的 Taylor 公式.

定理 9.10.4 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一个凸区域，$f\in C^m(D)$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ 是 D 中的两个点，那么

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}\frac{\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}} + o(\|\boldsymbol{h}\|^m)\quad (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}). \tag{7}$$

定义 9.11.1 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，函数 $f: D\to\mathbf{R}$，点 $x_0\in D$. 如果存在一个球 $B_r(x_0)\subset D$，使得对任意的 $x\in B_r(x_0)$，都有 $f(x)\geqslant f(x_0)$（$f(x)>f(x_0)$），那么 x_0 称为 f 的一个（严格）极小值点，$f(x_0)$ 称为函数 f 的一个（严格）极小值.

同样定义（严格）极大值点和（严格）极大值. 极小值和极大值统称为极值.

下面的定理给出了极值点的必要条件.

定理 9.11.1 设 n 元函数 f 在 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 处取得极值，且 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$（$i=1,2,\cdots,n$）都存在，那么必有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

例：在闭三角形 $D=\{(x,y)\mid 0\le x,y,\ x+y\le\pi\}$ 上. 求 $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$ 的 min 与 max.

显然有 $f\ge0$. 有 min=0. 在 ∂D 上取到. 令 $f_x=f_y=0\Rightarrow x=y=\frac{\pi}{3}$ 时为 max. $f(x,y)=\frac{3}{8}\sqrt{3}$

定义 9.11.2 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶对称方阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$（$i,j=1,2,\cdots,n$）. 设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

其转置记为 $x^{\mathrm T}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 称

$$Q(x)=x^{\mathrm T}Ax=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个**二次型**，方阵 A 称为二次型 Q 的**系数方阵**.

如果对任何 x，恒有 $Q(x)\geqslant0$（$\leqslant0$），则称二次型 Q 是**正（负）定**的，其系数方阵 A 相应地称为**正（负）定方阵**.

如果对任何 $x\neq0$，恒有 $Q(x)>0$（<0），则称二次型 Q 是**严格正（负）定**的，其系数方阵 A 相应地称为**严格正（负）定方阵**.

如果总存在 $p,q\in\mathbf{R}^n$，使得 $Q(p)<0<Q(q)$，就称二次型 Q 是**不定**的，其系数方阵 A 相应地称为**不定方阵**.

矩阵理论中有下列判断严格正定方阵的定理.

定理 9.11.2 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶对称方阵. 方阵 A 为严格正定的一个充分必要条件是，它的各阶**顺序主子式**均大于零，也就是说，

$$a_{11}>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots,$$

$$\det A>0.$$

由于做习题的时候常用到 $n=2$ 时的结果，我们把这个特殊结果单独列成下列定理并加以证明.

定理 9.11.3 设二阶对称方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

则 A 为严格正（负）定的一个充分必要条件是

$$a_{11}>0\quad(a_{11}<0),\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0.$$

定理 9.11.4 设二阶对称方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

那么 A 是不定方阵的充分必要条件是

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$$

定理 9.11.5 设 x_0 是 n 元函数 f 的一个驻点，函数 f 在 x_0 的某一邻域内有连续的二阶偏导数.

（1）如果 Hesse 方阵 $Hf(x_0)$ 是严格正（负）定方阵，那么 x_0 是 f 的一个严格极小（大）值点.

（2）如果 Hesse 方阵 $Hf(x_0)$ 是不定方阵，那么 x_0 不是 f 的极值点.

定理 9.11.6 设 (x_0,y_0) 是二元函数 f 的一个驻点，f 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内有连续的二阶偏导数. 记

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

那么：

（1）当 $ac-b^2>0$，且 $a>0$ 时，f 在 (x_0,y_0) 处有严格极小值；

（2）当 $ac-b^2>0$，且 $a<0$ 时，f 在 (x_0,y_0) 处有严格极大值；

（3）当 $ac-b^2<0$ 时，f 在 (x_0,y_0) 处没有极值.

定理 9.12.1 如果目标函数（1）在条件式（2）的约束下，在点 $z_0=(x_0,y_0)=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$ 处取到极值，那么存在 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$，使得 (x_0,y_0) 是函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(x,y)$$

的驻点. 也就是说，(x_0,y_0) 满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0,y_0)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}(x_0,y_0)=0 & (k=1,\cdots,n),\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y_j}(x_0,y_0)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}(x_0,y_0)=0 & (j=1,\cdots,m).\end{cases}$$

定理 9.12.1′ 设开集 $D\subset\mathbf{R}^{n+m}$，函数 $f: D\to\mathbf{R}$，映射 $\boldsymbol{\Phi}: D\to\mathbf{R}^m$. 函数 f 与映射 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足以下条件：

（a）$f,\boldsymbol{\Phi}\in C^1(D)$；

（b）存在 $z_0=(x_0,y_0)\in D$，满足 $\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}$，其中 $x_0=(a_1,\cdots,a_n)$，$y_0=(b_1,\cdots,b_m)$；

（c）$\det J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0)\neq0$.

如果 f 在条件式（2）的约束下，在 $z_0=(x_0,y_0)$ 处取到极值，那么存在 $\lambda\in\mathbf{R}^m$，使得

$$Jf(z_0)+\lambda J\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}.\tag{9}$$

定理 9.12.2 设 z_0 是辅助函数

$$F(z)=f(z)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(z)$$

的一个驻点，其中 $z=(z_1,\cdots,z_{n+m})=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$. 记

$$HF(z_0)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_j\partial z_k}(z_0)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant m+n}.$$

（1）如果 $HF(z_0)$ 严格正定，那么 f 在 z_0 处取严格的条件极小值；

（2）如果 $HF(z_0)$ 严格负定，那么 f 在 z_0 处取严格的条件极大值.

教材习题

9.2 3. 利用可微的定义，证明：函数 $f(x,y)=xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的每一点处可微.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)-(x-x_0)f_x(x_0,y_0)-(y-y_0)f_y(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$. 证毕.

9.3 4. 设 $u=f(\varphi(x)+\psi(y))$. 证明：$\psi'(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(\varphi(x)+\psi(y))\cdot\varphi'(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'\cdot\psi'(y)$. 证毕.

6. 设 $u=f(x,y)$. 当 $y=x^2$ 时，有 $u=1$，并且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$. 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2}$.

$f(x,x^2)=1$. $0=\frac{d}{dx}f(x,x^2)=f_x+2xf_y\Rightarrow f_y|_{y=x^2}=-\frac{1}{2}$

9. 求以下的 $J(f\circ g)$：

（1）$f(x,y)=(x,y,x^2y)$，$g(s,t)=(s+t,s^2-t^2)$，在点 $(2,1)$ 处；

$J(f\circ g)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2xy&x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2s&-2t\end{pmatrix}\overset{x=s+t}{\underset{y=s^2-t^2}{=}}\begin{pmatrix}1&1\\2s&-2t\\4s^3+6s^2t-2t^3&2s^3-6st^2-4t^3\end{pmatrix}$ 代入为 $\begin{pmatrix}1&1\\-4&2\\54&0\end{pmatrix}$

9.4 1. 设 $f\in C^1(\mathbf{R}^3)$. 证明：对非零的实数 a,b,c，

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial z}$$

在 $\mathbf{R}^3$ 上成立的充分必要条件是，存在 $g\in C^1(\mathbf{R})$，使得

$$f(x,y,z)=g(ax+by+cz).$$

充分性是显然的. 下证必要性. 即 f 只与 $ax+by+cz$ 有关. 设 $u=ax+by+cz$, $v=y$, $w=z$.

有 $h(u,v,w)=f(x,y,z)$. 则 $\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$. $x=\frac{u-bv-cw}{a}\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{b}{a}$. 有 $\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{\partial h}{\partial w}=0$. 证毕.

9.5 10. 求出下列曲面在指定点处的法向量和切平面方程：

（4）$z=y+\ln\dfrac{x}{z}$，$p_0=(1,1,1)$.

$\ln x+y-\ln z-z=0$. 法：$(\frac{1}{x},1,-\frac{1}{z}-1)=(1,1,-2)$. 切：$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0$ 即 $x+y-2z=0$

9.5 13. 试定出正数 λ，使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在某一点相切，即有共同的切平面.

$x_0y_0z_0=\lambda$, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$, $\dfrac{y_0z_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\dfrac{x_0z_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\dfrac{x_0y_0}{\frac{z_0}{c^2}}\Rightarrow\lambda=\frac{\pm\sqrt{3}}{9}abc$

18. 证明：曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 的所有切平面与某一直线平行，其中 a,b 为常数.

切：$F_1(x-x_0)+F_2(y-y_0)-(aF_1+bF_2)(z-z_0)=0$. 与 $(a,b,1)$ 平行. 可取直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$.

9.6 1. 对由下列方程确定的隐函数 $y(x)$，计算 $\dfrac{dy}{dx}$：

（4）$x^y=y^x$.

设 $F(x,y)=x^y-y^x$. 有 $\frac{\partial F}{\partial x}=yx^{y-1}-y^x\ln y$. $\frac{\partial F}{\partial y}=x^y\ln x-xy^{x-1}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$

4. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$. 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$F_x=F_1-F_3$. $F_y=F_2-F_1$. $F_z=F_3-F_2$. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_3-F_1}{F_3-F_2}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2-F_1}{F_2-F_3}$

$-(上)^{-1}(下)$

9.7 2. 对方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-z=0,\\x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$$

计算 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{dz}{dx}$. $\begin{pmatrix}\frac{dy}{dx}\\\frac{dz}{dx}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2y&-1\\4y&6z\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2x\\2x\end{pmatrix}$

4. 对下列方程，计算 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex]\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}:$$

（1）$xu-yv=0$，$yu+xv=1$；

（2）$x+y=u+v$，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v}$.

$x+y-u-v=0$. $x\sin v-y\sin u=0$.

(1). $-\begin{pmatrix}u&-v\\v&u\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$

(2). $-\begin{pmatrix}1&1\\\sin v&\sin u\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\-y\cos u&x\cos v\end{pmatrix}$

9.7 6. 设 $u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$。计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

$F_1=f(x,y,z,t)-u$. $F_2=g(y,z,t)$. $F_3=h(z,t)$.

有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$. $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$. 有 $\begin{pmatrix}\partial z/\partial y\\ \partial t/\partial y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}g_z & g_t\\ h_z & h_t\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}g_y\\ 0\end{pmatrix}$ [代入即可]

9.8 1. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 $f:D\to\mathbf{R}^n$。如果 f 把开集映为开集，则称 f 为一个**开映射**

是不是开映射：

(1) $f(x,y)=\left(x^2,\dfrac{y}{x}\right)$； $\det Jf=\begin{pmatrix}2x & 0\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}=2>0$. 是.

9.9 8. 设 a,b,c 满足 $b^2-ac>0$，λ_1,λ_2 是二次方程 $cx^2+2bx+a=0$ 的两个根。试通过引进新变量

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y,$$

解二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

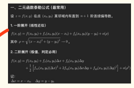
设 $u(x,y)=f(\xi,\eta)$，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_2$. $\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1 f_{11}+(\lambda_1+\lambda_2)f_{12}+\lambda_2 f_{22}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2 f_{11}+2\lambda_1\lambda_2 f_{12}+\lambda_2^2 f_{22}$

代入得到：$f_{12}=0 \Rightarrow u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y)$

9.10 4. 证明：当 $|x|$ 和 $|y|$ 充分小时，有近似式

$$\frac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$


一、二元函数泰勒公式（最常用）
设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内有直到 $n+1$ 阶连续偏导数。
1. 一阶展开（线性近似）
$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)$
其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$。
2. 二阶展开（极值、判定必用）
$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\right]+o(\rho^2)$
记：$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$

设 $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$. $f_x=-\frac{\sin x}{\cos y}$. $f_y=\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$. $f_{xx}=-\frac{\cos x}{\cos y}$. $f_{xy}=-\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}$. $f_{yy}=\frac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y}$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+o(x^2+y^2)$

9.11 3. 求函数

$$f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$$

在正方形 $[0,\pi/2]^2$ 上的极值。

令 $f_x=f_y=0$，有唯一驻点 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$. Hessian矩阵为 $\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $a_{11}<0$. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{9}{4}>0$. 负定，为极大值.

1. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x^2+y^2<1\}$，二元函数 f 在 $\bar{D}$ 上连续，在 D 上满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f.$$

证明：

(1) 如果在 ∂D 上，$f(x,y)\geqslant 0$，那么当 $(x,y)\in D$ 时，也有 $f(x,y)\geqslant 0$；

若 $\exists(x_0,y_0)\in D$. $f(x,y)<0$. 则 $f(x,y)$ 在 D 中取极小值. 设为 (x_0,y_0). 则有 $0>f(x_0,y_0)=f_{xx}+f_{yy}$

二者一定有一小于0. 设为 $f_{xx}<0$. 又 $f_x=0$. 则 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处取极大值. 矛盾!

第十章 多重积分

知识点&例题

定义 10.1.1 如果存在数 A，使得对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\|\pi\|<\delta$ 时，不论值点 ξ_i 在子矩形 I_i 中如何选择，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(I_i)-A\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在矩形 I 上**可积**，并将 A 写作

$$\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_I f\mathrm{d}\sigma,$$

称之为 f 在矩形 I 上的**二重积分**，或者简称 f 在 I 上的**积分**，这里 f 称为**被积函数**，I 称为积分区域.

定理 10.1.1 如果 f 在 I 上可积，那么 f 必在 I 上有界.

定理 10.1.2 设 f 和 g 在 I 上可积，那么：

(1) 若 c 为任何常数，那么 cf 在 I 上也可积，并且

$$\int_I(cf)\mathrm{d}\sigma=c\int_I f\mathrm{d}\sigma,$$

这表明，常数因子可以直接提到积分号的外面；

(2) $f\pm g$ 在 I 上可积，并且

$$\int_I(f\pm g)\mathrm{d}\sigma=\int_I f\mathrm{d}\sigma\pm\int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

定理 10.1.3 设 f 和 g 在 I 上可积，那么：

(1) 若 $f\geqslant 0$，则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma\geqslant 0;$$

(2) 若 $f\geqslant g$，则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma\geqslant\int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

定理 10.1.4 设 π 和 π' 是矩形 I 的两个分割，并且 $\pi\leqslant\pi'$，那么

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{S}(f,\pi')\leqslant\bar{S}(f,\pi')\leqslant\bar{S}(f,\pi).$$

这就是说，在细分之下，下和不会减少而上和不会增大.

定理 10.1.5 设 π_1 和 π_2 是 I 的任何两个分割，那么

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\bar{S}(f,\pi_2).$$

也就是说，任意下和绝不大于任意上和.

定理 10.1.6 等式

$$\underbrace{\underline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma}_{\sup_\pi \underline{S}(f,\pi)}=\underbrace{\overline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma}_{\inf_\pi \bar{S}(f,\pi)}$$

成立的充分必要条件是，对任意给定的 ε，存在 I 的一个分割 π，使得

$$\bar{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon.$$

定理 10.1.7 函数 f 在矩形 I 上可积的充分必要条件是

$$\underline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma=\overline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

这个公共的值就是积分值 $\int_I f\mathrm{d}\sigma$.

定理 10.1.8 设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有界，那么以下四个条件等价：

(1) f 在 I 上可积；

(2) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=0$，其中 $\omega_i=M_i-m_i(i=1,2,\cdots,k)$，$M_i$ 和 m_i 分别为 f 在 I_i 上的上、下确界；

(3) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 I 的一个分割 π，使得

$$\bar{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon;$$

(4) $\underline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma=\overline{\int_I}f\mathrm{d}\sigma$.

证明留作练习.

定义 10.2.1 设 $B\subset\mathbf{R}^2$。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在可数个闭矩形序列 $\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$，使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则 B 称为(二维)**零测集**.

定义 10.2.2 设 $B\subset\mathbf{R}^2$。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在有限个闭矩形 $I_1,I_2,\cdots,I_m$，使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则称 B 为**零面积集**.

很显然，零面积集必定是零测集.

注意 在零测集和零面积集的定义中，闭矩形 I_i 也可以改为开矩形 I_i，什么时候用闭矩形，什么时候用开矩形，视方便而定.

定理 10.2.1 下列性质是明显的：

(1) 至多可数集是零测集；

(2) 至多可数个零测集的并是零测集；

(3) 有限个零面积集的并是零面积集；

(4) B 为零面积集，必须且只需 $\bar{B}$ 也是零面积集；

(5) 如果 B 是有界闭集，则 B 为零测集的充分必要条件是 B 为零面积集.

现在，我们着手介绍 Lebesgue 定理.

定义 10.2.3 设集合 $B\subset\mathbf{R}^2$，$f:B\to\mathbf{R}$ 有界。对任何 $\boldsymbol{x}\in B$ 及 $r>0$，令 $I_{\boldsymbol{x},r}=B\cap B_r(\boldsymbol{x})$。用 $\omega_f(\boldsymbol{x},r)$ 表示函数 f 在 $I_{\boldsymbol{x},r}$ 上的振幅。令

$$\omega_f(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to 0^+}\omega_f(\boldsymbol{x},r),$$

称之为函数 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的振幅.

请读者自行证明

$$\omega_f(\boldsymbol{x},r)=\sup\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|:\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in I_{\boldsymbol{x},r}\}.$$

以下三条引理的证明和引理 6.6.2～6.6.4 的证明完全类似，这里从略.

引理 10.2.1 设集合 $B\subset\mathbf{R}^2$。函数 f 在点 $\boldsymbol{x}\in B$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(\boldsymbol{x})=0$.

设 I 是一个矩形。对 $\delta>0$，记

$$D_\delta=\{\boldsymbol{x}\in I:\omega_f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta\}.$$

用 $D(f)$ 记 f 在矩形 I 上不连续点的全体，那么有：

引理 10.2.2 $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{1/n}$.

引理 10.2.3 设 f 是定义在有限闭矩形 I 上的函数。如果存在一列开矩形 $I_j(j=1,2,\cdots)$，使得 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$。记 $K=I\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$，那么对任意的 $\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in K$，$\boldsymbol{y}\in I$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$.

现在可以证明本节的主要定理了.

定理 10.2.2(Lebesgue 定理) 设函数 f 在闭矩形 I 上有界，那么 f 在 I 上 Riemann 可积的充分必要条件是，f 在 I 上的全体不连续点所成的集 $D(f)$ 是一零测集.

定理 10.2.3 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 有界。如果集合 $B=\{\boldsymbol{x}\in I:f(\boldsymbol{x})\neq 0\}$ 为一零面积集，那么 f 在 I 上可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=0.$$

定理 10.2.4 设函数 f,g 在 I 上有界，且集合 $B=\{\boldsymbol{x}\in I:f(\boldsymbol{x})\neq g(\boldsymbol{x})\}$ 为一零面积集，那么若 f 与 g 中有一个在 I 上可积，则另一个也在 I 上可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

例：$f(x,y)=\arctan\frac{1}{y-x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积

在 $y=x^2$ 处无定义，为零测集，可在 $y=x^2$ 处赋值使 f 有界，故可积

定理 10.3.1 如果 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，那么单变量函数 φ 与 ψ 在区间 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $\varphi(x)=\underline{\int_c^d}f(x,y)\mathrm{d}y$，$\psi(x)=\overline{\int_c^d}f(x,y)\mathrm{d}y$.

定理 10.3.2 设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

同样, 如果对每一个 $y\in[c,d]$, 函数 $f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 那么又有

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

定理 10.3.3 设 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数, 则有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 10.3.4(Minkowski 不等式) 设 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上非负、连续, $p\geqslant 1$, 那么

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y. \tag{5}$$

当 $p>1$ 时, 等式成立的充分必要条件是

$$f(x,y) = u(x)v(y).$$

定义 10.4.1 设 $B\subset\mathbf{R}^2$, 函数 $f:B\to\mathbf{R}$. 令

$$f_B(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p}\in B, \\ 0, & \boldsymbol{p}\in B^c, \end{cases}$$

则函数 f_B 在全平面 $\mathbf{R}^2$ 上有定义; 如果限制在集合 B 上, f_B 与 f 相等.

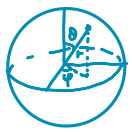
定义 10.4.2 任取有界的闭矩形 $I\supset B$. 如果函数 f_B 在 I 上可积, 则称函数 f 在 B 上可积, 并称数值 $\int_I f_B\mathrm{d}\sigma$ 为函数 f 在 B 上的(二重)积分, 记作

$$\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_B f\mathrm{d}\sigma.$$

定理 10.4.1 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$, 函数 $f:B\to\mathbf{R}$ 有界. 如果集合 B 的边界 ∂B 和 f 在 B 上的间断点集都是零测集, 那么 f 在 B 上可积.

定理 10.4.2 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$, $f:B\to\mathbf{R}$ 在 B 上可积, 那么对任何常数 c, 函数 cf 在 B 上也可积, 并且

$$\int_B cf\mathrm{d}\sigma = c\int_B f\mathrm{d}\sigma.$$



$x=r\sin\theta\cos\varphi$
$y=r\sin\theta\sin\varphi$
$z=r\cos\theta.$

又若 $g:B\to\mathbf{R}$ 在 B 上可积, 那么 $f\pm g$ 在 B 上也可积, 并且

$$\int_B(f\pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_B f\mathrm{d}\sigma \pm \int_B g\mathrm{d}\sigma.$$

定理 10.4.3(积分的集合可加性) 设 $B_1, B_2\subset\mathbf{R}^2$ 有界, 并且 $B_1\cap B_2$ 是一零面积集. 若函数 f 在 B_1 和 B_2 上都可积, 那么 f 在 $B_1\cup B_2$ 上可积, 并且

$$\int_{B_1\cup B_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{B_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

定义 10.4.3 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界点集. 若常值函数 1 在 B 上可积, 那么称积分 $\int_B 1\mathrm{d}\sigma$ 为点集 B 的**面积**, 记为 $\sigma(B)$. 这时称 B **是有面积的**.

定理 10.4.4 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是一个有界集, 则点集 B 为零面积集的充分必要条件是

$$\sigma(B) = \int_B 1\mathrm{d}\sigma = 0.$$

定理 10.4.5 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$, 则 B 有面积当且仅当 B 的边界 ∂B 是一零面积集.

定理 10.4.6 设 B 是 $\mathbf{R}^2$ 中有面积的点集, f 在 B 上可积. 对 B 的任意分割 T 作 Riemann 和, 那么对任意的 $\xi_i\in D_i(i=1,2,\cdots,m)$, 有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) = \int_B f\mathrm{d}\sigma,$$

也就是说, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要分割 $T=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 满足 $\|T\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) - \int_B f\mathrm{d}\sigma\right| < \varepsilon.$$

定理 10.4.7(积分平均值定理) 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域, 函数 $f,g:K\to\mathbf{R}$ 连续且 g 在 K 上不变号. 于是存在一点 $\boldsymbol{\xi}\in K$, 满足

$$\int_K fg\mathrm{d}\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\int_K g\mathrm{d}\sigma.$$

推论 10.4.1 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域, 函数 f 在 K 上连续, 那么存在一点 $\boldsymbol{\xi}\in K$, 使得

$$\int_K f\mathrm{d}\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\sigma(K).$$

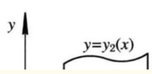
定理 10.5.1 设点集

$$B = \{(x,y): y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中函数 y_1 和 y_2 在 $[a,b]$ 上连续(图 10.6), 函数 f 在 B 上可积. 如果对任意的 $x\in[a,b]$, 单变量积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

存在, 那么



$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

定理 10.8.2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, $\Delta\subset\Omega$ 有体积, 映射 $\boldsymbol{\varphi}: x_i=x_i(u_1,u_2,\cdots,u_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 Δ 上是正则的, 那么对 $\boldsymbol{\varphi}(\Delta)$ 上的连续函数 F, 有

$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)} F(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int\cdots\int_\Delta F(x_1(u_1,\cdots,u_n),\cdots,x_n(u_1,\cdots,u_n))\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

定理 10.6.1 设 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域 D 有面积, 函数 $F:D\to\mathbf{R}$ 连续, 映射

$$\boldsymbol{\varphi}: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad ((u,v)\in\Delta)$$

是从 Δ 到 D 上的正则映射, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 将 Δ 一对一地映射成 D, $\boldsymbol{\varphi}\in C^1(\Delta)$, 并且在 Δ 上,

$$\det J\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么

$$\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

也可以写成

$$\iint_{\varphi(\Delta)} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta F(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$

定理 10.7.1 设有界集 $V\subset\mathbf{R}^3$ 有体积, 有界的函数 $f:V\to\mathbf{R}$ 连续.

(1) 设 V 在 xy 平面上的垂直投影为 D(图 10.17), 且当 $(x,y)\in D$ 时, 过这一点且垂直于 D 的直线与 V 交成一个区间 $[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$, 那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z; \tag{3}$$

(2) 设 V 在 z 轴上的垂直投影为区间 J(图 10.18), 且当 $z\in J$ 时, 通过点 $(0,0,z)$ 又垂直于 z 轴的平面同 V 交成的图形在 xy 平面上的垂直投影是一有面积的点集 D_z, 那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int_J\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

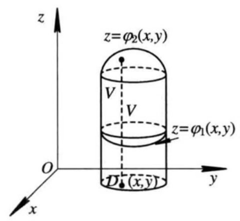


图 10.17

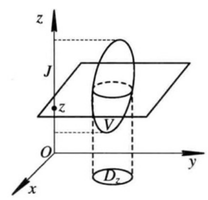


图 10.18

定理 10.7.2 设有界的闭区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 有体积, 函数 $F:D\to\mathbf{R}$ 连续, 映射

$$\boldsymbol{\varphi}: \begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad ((u,v,w)\in\Delta)$$

是从 Δ 到 D 上的正则映射, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 将 Δ 一对一地映射成 D, $\boldsymbol{\varphi}\in C^1(\Delta)$, 并且在 Δ 上,

$$\det J\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则有

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)} F\mathrm{d}\mu = \int_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}\,|\det J\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}\mu, \tag{5}$$

即

$$\iiint_D F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Delta F(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

定理 10.8.1 设 $V\subset\mathbf{R}^n$ 是有体积的有界闭集, 有界函数 $f:V\to\mathbf{R}$ 连续.

(1) 如果

$$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n: 当 (x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in D\subset\mathbf{R}^{n-1} 时, \varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\},$$

其中 φ_1, φ_2 是 D 上的连续函数, 那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int\cdots\int_D\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_n.$$

(2) 如果

$$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n: 当 x_n\in[a,b] 时, (x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbf{R}^{n-1}\},$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int_a^b\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{D_{x_n}} f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

(3) 当然, 也可把 n 重积分化成一个 $k(1\leqslant k<n)$ 重积分和一个 $n-k$ 重积分来计算. 这就是说,

$$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n: (x_{k+1},\cdots,x_n)\in D_1\subset\mathbf{R}^{n-k}, (x_1,x_2,\cdots,x_k)\in D_2\subset\mathbf{R}^k\},$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \overbrace{\int\cdots\int_{D_1}}^{n-k个}\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n\overbrace{\int\cdots\int_{D_2}}^{k个} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

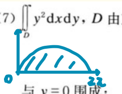
n 重积分也有换元公式, 从形式上看, 它与二重积分和三重积分的换元公式没有区别.

教材习题

10.5 (4) $\iint_D |xy|\,dxdy$, $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$;

原式 $=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r\cdot r^2\sin\theta\cos\theta\,dr=\frac{a^4}{2}$

(7) $\iint_D y^2dxdy$, D 由旋轮线



$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

与 $y=0$ 围成;

原式 $=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}y^3(x)dx=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$

10.6 (2) $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=1$ 和 $xy=2$ 围成的图形在第一象限中的那部分.

设 $u=x^2-y^2$, $v=xy$. $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}2x & -2y\\ y & x\end{matrix}\right\|^{-1}=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$. 原式 $=\int_1^2dv\int_1^2\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}$

4. 设 D 是由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ 和 $y=4x$ 围成的图形在第一象限中的那一部分.

求证: $\iint_D f(xy)dxdy=\ln 2\int_1^2 f(t)dt$.

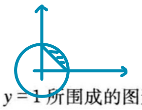
设 $u=xy$. $v=\frac{y}{x}$. $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}y & x\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{matrix}\right\|^{-1}=\frac{x}{2y}$. LHS $=\int_1^2du\int_1^4\frac{1}{2v}f(u)dv=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)du$

(4) $\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2}$ 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}r^2dr=\frac{8\sqrt{2}}{9}$

4. 计算二重积分:

$$\iint_D\frac{dxdy}{xy(\ln^2x+\ln^2y)},$$



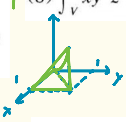
其中 D 是由在第一象限里的圆周 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 所围成的图形.

设 $x=e^{r\cos\theta}$, $y=e^{r\sin\theta}$. $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\left|\begin{matrix}e^{r\cos\theta}\cdot\cos\theta & -re^{r\cos\theta}\sin\theta\\ e^{r\sin\theta}\cdot\sin\theta & re^{r\sin\theta}\cdot\cos\theta\end{matrix}\right|=re^{r(\sin\theta+\cos\theta)}$

则原式 $=\iint_{D'}\frac{1}{r}drd\theta$ 上下限: 边界: $e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1$ 记 $r=r(\theta)$, 则外边界为 $r=\frac{r(\theta)}{2}$

由 $x,y\in(0,1]\Rightarrow\ln x,\ln y<0.\Rightarrow\theta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]\Rightarrow$ 原式 $=\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{r(\theta)}{2}}^{r(\theta)}\frac{1}{r}dr=\frac{\pi}{2}\ln 2$

10.7 (3) $\int_V xy^2z^3dxdydz$, V 由 $z=xy$ 和 $z=0$ 以及两张平面 $x=1$ 和 $x=y$ 围成.



$\int_0^1dx\int_0^xdy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\frac{1}{364}$

(1) $z^2=x^2+\frac{y^2}{4}$, $2z=x^2+\frac{y^2}{4}$; $V=\int_0^2dz\iint_{z^2\leqslant x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 2z}dxdy=\int_0^2 2\pi(2z-z^2)=\frac{8\pi}{3}$

(2) $\iiint_D(x^2+y^2)dxdydz$, 其中 $D=\{(x,y,z):z\geqslant 0,a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2\}$;

$x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$. 原式 $=\int_a^b r^4dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ (常数 $a>0$);

变换为 $r^3=a^3\cos\theta$. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}}r^2\sin\theta\,dr=\frac{\pi}{3}a^3$

10.8 3. 计算下列 $\mathbf{R}^n$ 中区域的体积 $(a_1,a_2,\cdots,a_n>0)$:

(1) $V_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\right\}$;

$u_i=\frac{x_i}{a_i}\Rightarrow J=a_1\cdots a_n$. 则 $\mu(V_n)=\int_{S_n(1)}a_1\cdots a_n dx_1\cdots dx_n=\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{n!}$

第十一章 曲线积分

知识点&例题

定义 11.1.1 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一条可求长曲线, $f:\Gamma\to\mathbf{R}$, Γ 的两个端点分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 在 Γ 上依次取一列点 $\{\boldsymbol{r}_i:i=0,1,\cdots,n\}$, 使得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{B}$. 我们称 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 为 Γ 的第 i 段曲线. 令 $\Delta s_i=s(\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i})$, 即 Γ 的第 i 段曲线的弧长. 在 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$. 如果极限

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta s_i \tag{1}$$

是一个有限数, 并且其值不依赖于点 ξ_i 在 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上的选择, 那就把这个极限值记为

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{r})ds\quad\text{或}\quad\int_\Gamma f(x,y,z)ds,$$

称之为函数 f 在 Γ 上的**第一型曲线积分**.

定理 11.1.1 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一段光滑曲线, 有向量表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 函数 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 连续, 那么

$$\int_\Gamma f ds=\int_\alpha^\beta f\circ\boldsymbol{r}(t)\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt. \tag{5}$$

也就是说, 第一型曲线积分可以化成定积分来计算.

推论 11.1.1 设平面曲线 Γ 有显式表达 $y=\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 φ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_\Gamma f ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \tag{6}$$

为了方便读者, 我们把这个计算过程总结如下.

(1) 求出 Γ 的一个向量参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$;

(2) 计算弧元 $ds=\|\boldsymbol{r}'(t)\|dt$;

(3) 计算定积分 $\int_\alpha^\beta f\circ\boldsymbol{r}(t)\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt$.

定义 11.2.1 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一段可求长的有向曲线, 映射 $\boldsymbol{F}:\Gamma\to\mathbf{R}^3$. Γ 的起点记为 $\boldsymbol{A}$, 终点记为 $\boldsymbol{B}$. 在 Γ 上按从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的方向顺次取一列点 $\{\boldsymbol{r}_i:i=0,1,\cdots,n\}$, 使得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{B}$. 令 $\Delta\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 如果对在 Γ 的弧段 $\widehat{\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i}$ 上任取的点 ξ_i, 极限

$$\lim_{\max\|\Delta\boldsymbol{r}_i\|\to 0}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{F}(\xi_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \tag{1}$$

为一确定的有限数, 则将这个数记为

$$\int_\Gamma\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

称它是向量值函数 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 Γ 上的**第二型曲线积分**.

定理 11.2.1 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一段可求长的有向曲线, 连续映射 $\boldsymbol{F}:\Gamma\to\mathbf{R}^3$. 又设 Γ 具有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 并且**参数 t 的增加对应着 Γ 的定向**, 那么有

$$\int_\Gamma\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt. \tag{3}$$

定理 11.3.1(Green(格林, 1793~1841)) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是由有限条分段光滑的曲线围成的闭区域. 如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 Ω 上连续, 并有连续的偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$, 那么有

$$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\quad(\text{Green 公式}),$$

其中 $\partial\Omega$ 是区域 Ω 的边界. 它的定向是这样被确定的: 一个人沿着 $\partial\Omega$ 的正方向行进时, 区域 Ω 总在这个人的左边.

例: 设 D 为适合Green公式的平面闭区域, 证其面积 $\sigma(D)=\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy-ydx)$

由 Green公式, $\int_{\partial D}xdy=\iint_D d\sigma=\sigma(D)$, 其余同理可证.

定义 11.3.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域. 如果 D 中由任何简单曲线(即自身不相交的曲线)围成的有界区域全部包含在 D 中, 就称 D 是**单连通**的, 否则就说 D 是**多连通**的.

定理 11.3.2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单连通区域, 函数 P, Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 都在 D 上连续, 那么以下四个条件等价:

(1) 对 D 中任意的分段光滑的闭曲线 Γ, 有

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy=0;$$

(2) 对 D 中任意的两条连接 A 和 B 的分段光滑曲线 Γ_1 和 Γ_2, 有

$$\int_{\Gamma_1}Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_2}Pdx+Qdy,$$

即曲线积分(3)与路径无关;

(3) 存在 D 上连续可微的函数 $u(x,y)$, 使得

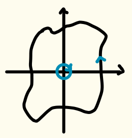
$$du=Pdx+Qdy;$$

(4) 在 D 上, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

积分与路径无关.

例: 计算积分 $A=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Γ 为包含原点(不通过原点)的分段光滑闭曲线.



作以原点为中心, 充分小 ε 为半径的圆周 C_ε. 正向为逆时针. 二者夹成区域 D.

在 D 中 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, 满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$.

而 ∂D 由 Γ 与 $-C_\varepsilon$ 组成, 故 $A=-\int_{-C_\varepsilon}Pdx+Qdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2=2\pi$

第一型曲线积分表达的Green公式: $\oint_{\partial D}P\cos\theta_1+Q\cos\theta_2\,ds=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy$

$\vec{n}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2)$

教材习题

11.1 (3) $\int_\Gamma z\,ds$, Γ: 圆锥螺线 $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

$ds=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\cdot dt=\sqrt{t^2+2}\,dt\Rightarrow$ 原式 $=\int_0^{2\pi}t\sqrt{t^2+2}\,dt=\frac{1}{3}(4\pi^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

11.2 4. 计算 $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的边界, 方向是 $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$.

Γ_1 有 $A=3\int_{\Gamma_1}y^2dx-x^2dy=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^3\theta-\cos^3\theta)d\theta=-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=-4$

11.3 1. 利用 Green 公式, 计算下列积分:

(1) $\int_\Gamma xy^2dy-x^2ydx$, Γ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 按逆时针方向;

(1). $A=\iint_D(y^2+x^2)dxdy=2\pi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi}{2}a^4$

11.3 5. 设 Γ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的光滑封闭曲线, 用 $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 上各点处的单位外法向量. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个固定的单位向量, 求证:

$$\int_\Gamma\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})ds=0,$$

这里 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间夹成的角.

即 $\int_\Gamma a_1\cos(n,i)+a_2\cos(n,j)\,ds=\iint_D(0+0)dxdy=0$.

(1) $\int_L(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$, 其中 L 是连接 $A=(0,0)$, $B=(2,1)$ 的任意光滑线段;

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y-2x+2y=0$ 与路径无关. 取路径为 $(0,0)\to(2,0)\to(2,1)$. $A=\int_0^2x^2dx+\int_0^1(4-4y-y^2)dy=\frac{7}{3}$

1. 设 P, Q 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数, 用 Γ 表示以任意点 (x_0,y_0) 为中心、以任意正数 r 为半径的上半圆周. 如果

$$\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

证明: 在 $\mathbf{R}^2$ 上, 有 $P=0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$.

由Green公式有, $0=\iint_{半圆}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy-\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)dx$.

由积分中值定理与连续性命题得证

第十二章 曲面积分

知识点&例题

定义 12.1.1 设正则曲面 Σ 有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)((u,v)\in\Delta)$. 称

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (2)$$

为曲面 Σ 的**面积**,并且记

$$\mathrm{d}\sigma=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad (3)$$

称 $\mathrm{d}\sigma$ 为曲面的**面积元素**,简称**面元**.

曲面面积有下列几种表示方法. 由 9.5 节中的式(19),可知

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (5)$$

此外,由 9.5 节的式(21),得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad (6)$$

其中 E,F,G 是曲面的第一基本量:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x\partial x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y\partial y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z\partial z}{\partial u\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

当曲面 Σ 是由显式

$$z=f(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

表达时,我们可以将它写为参数形式

$$x=x,\quad y=y,\quad z=f(x,y)\quad((x,y)\in D).$$

这时,

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial x},\quad\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial y},\quad\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.$$

由式(5),得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (7)$$

例:计算 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下的面积

有 $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}d\theta d\varphi=a^2\sin\theta d\theta d\varphi$. 在第一卦限中. $\theta,\varphi\geq0$.

曲线: $a^2\sin^2\theta=a^2\sin\theta\cos\varphi\Rightarrow\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 故 $D=\{(\theta,\varphi):\theta,\varphi\geq0,\theta+\varphi\leq\frac{\pi}{2}\}$

于是 $S=4\iint_D a^2\sin\theta d\theta d\varphi=2a^2(\pi-2)$

定义 12.2.1 设 Σ 是一张可求面积的曲面片,f 是定义在 Σ 上的函数,分割 π 把 Σ 分成若干更小的曲面片 $S_1,S_2,\cdots,S_n$. 定义分割 π 的宽度为 $\|\pi\|=\max\{\mathrm{diam}(S_i):i=1,2,\cdots,n\}$. 在每一小片 S_i 上任取一点 $\boldsymbol{p}_i$,如果和数

$$\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i)$$

当 $\|\pi\|\to0$ 时有有限的极限,并且其极限值不依赖于点 $\boldsymbol{p}_i$ 在 S_i 上的选择,那么称这个极限值为函数 f 沿曲面 Σ 的**第一型曲面积分**,记作 $\int_\Sigma f\mathrm{d}\sigma$.

如果 Σ 是正则曲面,它的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)((u,v)\in\Delta)$;函数 f 在 Σ 上连续,那么利用 12.1 节中关于曲面面积元素的表达式(3),便可得出第一型曲面积分的计算公式:

$$\int_\Sigma f\mathrm{d}\sigma=\iint_{\Delta}f\circ\boldsymbol{r}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \text{—— ①} \qquad (1)$$

请注意,定义 12.1.1 之后的前两点说明(即(a)和(b)),对定义 12.2.1 显然仍起作用.

若常值函数 $f=1$,则它在 Σ 上的第一型曲面积分正是曲面 Σ 的面积 $\sigma(\Sigma)$.

如果曲面 Σ 可以由显式

$$z=\varphi(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

表示,其中 D 是有面积的平面闭区域,$\varphi\in C^1(D)$,则公式(1)变成

$$\int_\Sigma f\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \text{—— ②} \qquad (2)$$

例:对上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 为Σ,求 $\int_\Sigma(x+y+z)d\sigma$.

显然 x 与 y 积分为0. 只需求 z. 有 $2x+2zz_x=0\Rightarrow z_x=-\frac{x}{z}, z_y=\frac{y}{z}\Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{z}dxdy$.

于是 $A=a\iint_{x^2+y^2\leq a^2}z\cdot\frac{1}{z}dxdy=\pi a^3$

定义 12.3.1 设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中定向的光滑曲面,Σ 上确定其方向的单位向量记为 $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{F}$ 是定义在 Σ 上的向量值函数. 记 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$,$\mathrm{d}\sigma$ 是 Σ 上的面积元素. 称

γ

图 12.9

$$\int_\Sigma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_\Sigma\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \qquad (1)$$

为 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲面 Σ 上的**第二型曲面积分**.

如果曲面 Σ 是由显式表达的,即

$$\Sigma:z=f(x,y)\quad((x,y)\in D),$$

那么

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D\left(-P\frac{\partial f}{\partial x}-Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (10)$$

例:计算积分 $A=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$. Σ为三角形 $\{(x,y,z)|x,y,z\geq0, x+y+z=1\}$.

法一: 单位法向量为 $\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$. 于是 $A=\frac{1}{\sqrt3}\int_\Sigma(x+y+z)d\sigma=\frac{1}{\sqrt3}\int_\Sigma d\sigma=\frac12$

法二: $A=3\int_\Sigma zdxdy=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac12$

法三: $P=x, Q=y, R=1-x-y$. 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}=-1$, 有 $A=\iint_D(x+y+1-x-y)d\sigma=\frac12$

定理 12.4.1(Gauss 公式) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中由逐片光滑曲面围成的有界闭区域,它可同时分拆为有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并,同一类中任何两个区域至多有公共的边界. 如果函数 P,Q 和 R 都在 Ω 上连续可微,那么有

$$\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad (6)$$

这里 ∂Ω 表示 Ω 的边界,∂Ω 按外法线方向来定向.

如果式(6)的左边用第一型曲面积分来表达,那么 Gauss 公式也可写成

$$\iint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用 Green 公式,可以通过第二型曲线积分来表示闭曲线围成的图形的面积. 同样,利用 Gauss 公式,可以通过第二型曲面积分来表示闭曲面所围成的立体的体积. 因为

$$\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_\Omega\mathrm{d}\mu=3\mu(\Omega),$$

所以

$$\mu(\Omega)=\frac13\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (7)$$

例:题干同上. 补充三坐标轴上截下三角形. 有 $xdydz+ydzdx+zdxdy$ 在其上为0不影响.

故 $A=\int_{\partial\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy=3\int_\Omega d\mu=3\mu(\Omega)=\frac12$

定理 12.4.2(Stokes 公式) 设 Σ 是由有限块二阶连续可微的正则曲面拼接而成的定向曲面. 如果 P,Q 和 R 是定义在 Σ 上的连续可微函数,那么

一般与次向量一起.

$$\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (10)$$

这里 ∂Σ 表示曲面 Σ 的边界,曲面 Σ 的定向与其边界曲线 ∂Σ 的定向应当是协调的.

用行列式的记法,Stokes 公式可以表示为

$$\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}, \qquad (11)$$

也可表示为

$$\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma, \qquad (12)$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$表示曲面 Σ 的单位正法向量. 公式(11)和公式(12)可方便人们记忆.

例:有向曲面Σ为 $x+y+z=1$ $(x,y,z\geq0)$. 法线同向于(1,1,1). 求力场 $F=(y^2,z^2,x^2)$ 绕∂Σ一周的功.

$\int_{\partial\Sigma}y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_\Sigma(-2z-2y-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)d\sigma=-\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=-1$

例:计算曲线积分 $I=\int_\Gamma(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$. Γ为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\x^2+y^2=2bx\end{cases}$ $z\geq0, 0<b<a$. 从(b,0,0)看Γ是逆时针方向.

记Σ为Γ在球面上围成的曲面. 则由Stokes公式. $I=\int_\Sigma(y-z,z-x,x-y)\cdot\frac{1}{a}(x-a,y,z)d\sigma$

又 $d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{z}dxdy\Rightarrow I=2a\iint_D dxdy=2\pi ab^2$ $=2\int_\Sigma zd\sigma$

教材习题

12.1 (1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=r$. 有 $f_r=(\cos\theta,\sin\theta,1)$ 则 $E=2, F=0, G=r^2$

曲线: $r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=2\cos\theta$. $f_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)$ $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt2 rdr=\sqrt2\pi$.

(5) 马鞍面 $az=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.

设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\frac{r^2}{2a}\sin2\theta$. $\Rightarrow f_r=(\cos\theta,\sin\theta,\frac{r}{a}\sin2\theta)$ $E=1+\frac{r^2}{a^2}\sin^22\theta$ $F=\frac{r^3}{a^2}\sin2\theta\cos2\theta$.

$\sqrt{EG-F^2}=r\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}$ $f_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,\frac{r^2}{a}\cos2\theta)$ $G=r^2+\frac{r^4}{a^2}\cos^22\theta$

曲线: $r=a$. 故 $S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}dr=\frac{4\sqrt2}{3}\pi a^2-\frac23\pi a^2$

(6) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 被柱面$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部分.

设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\frac{r^2}{2a}$. $f_r=(\cos\theta,\sin\theta,\frac{r}{a})$ $f_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)$. $E=1+\frac{r^2}{a^2}$, $G=r^2$

曲线: $r^4=2a^2r^2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow r=a\sqrt{\sin2\theta}$. 故 $S=2\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}r\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}dr=(\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3})a^2$

12.2 (2) $\int_\Sigma|xyz|\mathrm{d}\sigma$, $\Sigma:z=x^2+y^2, z\leqslant1$;

$d\sigma=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy\Rightarrow A=4\int_{\substack{x,y\geq0\\z=x^2+y^2\leq1}}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\frac{125\sqrt5-1}{420}$

(3) $\int_\Sigma(xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma$, $\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=r$. $E=2, G=r^2, F=0$. 曲线: $r^2=2r\cos\theta$, $r=2\cos\theta$.

$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2(\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)\cdot\sqrt2 rdr=8\sqrt2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\frac{64\sqrt2}{15}$

12.3 (2) $\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$,外侧;

① 由Gauss公式. $A=\iiint_\Omega 2zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a 2r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta dr=0$.

② 法向量$(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$. $A=\iint_\Sigma\frac{z}{a}(2x^2+y^2)d\sigma=0$(对称性)

12.4

1. 利用 Gauss 公式，计算下列积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，方向朝外；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是由四张平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的封闭曲面，方向朝外；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$，方向朝下；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，方向朝下.

(1). $A=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. (2). $A=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z=\frac{1}{8}$

(3). 补充 $z=1$. 即有 $3V=A+\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$

(4). 补充 $z=1$. 有 $2\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I+\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I+\pi$. LHS $=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$. $I=-\frac{\pi}{2}$

4. 利用 Stokes 公式，计算下列积分：

(1) $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，从第一卦限看去，Γ 是逆时针方向绕行的；

(2) $\int_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=2y, y=z$，从点 $(0,1,0)$ 向 Γ 看去，Γ 是逆时针方向绕行的；

(3) $\int_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=a$，从原点看去，Γ 是逆时针方向绕行的.

(1). $I=-\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma=-\sqrt{3}\pi a^2$ (2). $I=0$

(3). $I=-2\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}\sigma=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\pi(\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$

6. 计算 $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周，从原点看去，顺时针方向是 Γ 的正向.

7. 计算上题中的积分，但 Γ 是曲面 $z=xy$ 和 $x^2+y^2=1$ 的交线，沿 Γ 的正向行进时，z 轴在左手边.

$I=-\int\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 法：$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. $I=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{\Sigma} 2\mathrm{d}\sigma=-\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 2=-2\sqrt{2}\pi$

7. $z_x=y$. $z_y=x$. $I=-\int\limits_{x^2+y^2\leq 1}(-y-x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{x^2+y^2\leq 1}(y+x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r\sin\theta+r\cos\theta-1)r\mathrm{d}r=-\pi$

$\iint\limits_{\Sigma} A\mathrm{d}y\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(-Az_x-Bz_y+C)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

第十三章 场的数学

知识点&例题

定义 13.2.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中区域 D 上的一个向量场，Σ 是 D 中一张有面积且可定向的曲面，$\boldsymbol{n}$ 是指向 Σ 正侧的单位法向量. 称积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过 Σ 正侧的**通量**.

定义 13.2.2 设 S 是包围点 M 的一个封闭曲面，V 是 S 所包围的空间区域，用 $\mu(V)$ 记它的体积. 如果

$$\lim_{V\to M}\frac{1}{\mu(V)}\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

存在，就称此极限为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 M 处的散度，记为 $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{F})_M$（div 是 divergence 的缩写），即

$$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{F})_M=\lim_{V\to M}\frac{1}{\mu(V)}\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

定理 13.2.1 设向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 P,Q,R 在区域 D 上有连续偏导数. 那么

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{3}$$

在 D 上成立.

现在，引入记号 $\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$，即

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

称之为 **Laplace 算子**. 设 Ω 为一区域，如果 Ω 上的数量场 u 满足 **Laplace 方程**

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

那么称 u 是 Ω 上的**调和函数**.

定义 13.3.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的一个向量场，Γ 是 D 中的一条封闭曲线，称积分

$$\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿闭曲线 Γ 的**环量**，其中 $\boldsymbol{t}$ 是 Γ 的指向正向的单位切向量.

定义 13.3.2 如果平均环量的极限

$$\lim_{\Gamma\to M}\frac{1}{A}\int_{\Gamma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}s$$

存在，就称此极限为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处以 $\boldsymbol{n}$ 为旋转轴的漩涡的强度.

定义 13.3.3 向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 的**旋度**是这样一个向量：以这个向量的方向为旋转轴的漩涡强度的值最大，而且最大值就是这个向量的模. 向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度记为 rot $\boldsymbol{F}$（rot 是 rotation 的缩写）.

根据上面的讨论，向量 $\boldsymbol{a}$ 就是满足定义中所要求的那个向量. 这样，我们得到了向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的旋度 rot $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标系中的表达式：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

或用行列式表达为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

利用 Nabla 算子，旋度能写成“向量积”的形式：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}.$$

旋度运算适合下列法则：

(a) $\nabla\times(c\boldsymbol{F})=c\nabla\times\boldsymbol{F}$，其中 c 为常数；

(b) $\nabla\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\nabla\times\boldsymbol{F}_1+\nabla\times\boldsymbol{F}_2$；

(c) 设 φ 是数量函数，则有

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{F};$$

(d) $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2)=(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)\cdot\boldsymbol{F}_2-(\nabla\times\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{F}_1$.

散度 div F 为偏导之和 $=\nabla\cdot F$

旋度 rot F 与 Stokes公式有关 $=\nabla\times F$

定义 13.4.1 设向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上. 如果存在 D 上的一个数量场 φ，满足

$$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \tag{1}$$

对一切 $\boldsymbol{p}\in D$ 成立，则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为**有势场**，数量场 φ 叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个**势函数**.

定义 13.4.2 设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场. 如果对含于 D 中的任何一条封闭曲线 Γ，都有 $\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的一个**保守场**.

即F的曲线积分与路径无关

定义 13.4.3 设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场. 如果

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$$

在 D 上处处成立，则称 $\boldsymbol{F}$ 为 D 上的一个**无旋场**.

对平面区域而言，定理 11.3.2 告诉我们，这三种场是等价的. 但有一个前提条件：这个平面区域必须是**单连通**的. 对空间区域，单连通的概念比平面区域要复杂一些. 我们有：

定义 13.4.4 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域. 如果 Ω 中任意封闭曲面的内部完全在 Ω 中，则称 Ω 为**空间单连通区域**；否则称为**空间多连通区域**.

定义 13.4.5 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域. 如果对 Ω 中任意逐段光滑的曲线 Γ，总能在 Ω 中找到一张逐片光滑的曲面 Σ，以 Γ 为其边界，即 $\partial\Sigma=\Gamma$，则称 Ω 为曲面单连通区域.

定理 13.4.1 设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面单连通区域，$\boldsymbol{F}$ 是定义在 D 上的一个向量场. 如果 $\boldsymbol{F}\in C^2(D)$，那么以下三个命题等价：

(1) $\boldsymbol{F}$ 是有势场；

(2) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场；

(3) $\boldsymbol{F}$ 是保守场.

有势 ⇔ 无旋 ⇔ 保守

旋度 ⇔ 无源（散度为0）

例：设向量场 $F=(x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$. 证明F为有势场，求出F的一个势函数.

令 $P=x^2-2yz$, $Q=y^2-2xz$, $R=z^2-2xy$. 显然有 $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 即 rot $F=0$. F无旋故有势

取原点 $O=(0,0,0)$. 设 (x,y,z) 为 $\mathbf{R}^3$ 中任一点. 取折线 $(0,0,0)\to(0,0,z)\to(0,y,z)\to(x,y,z)$ 积分.

有 $\varphi(x,y,z)=\int_0^z t^2\mathrm{d}t+\int_0^y t^2\mathrm{d}t+\int_0^x(t^2-2yz)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz$ 为F的一个势函数，$+C$ 后为一般势函数

定理 13.4.2 设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 Ω 上的有势场，如果不计常数加项，那么势函数是唯一的.

势函数后一定要加常数C！

$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$ （即任一向量函数的旋度的散度为零），

$\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0}$ （即任一数量函数的梯度的旋度为零向量）.

定义 13.5.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域 D 上的一个向量场. 如果存在向量场 $\boldsymbol{G}$，使得

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G},$$

就称 $\boldsymbol{F}$ 是一个旋度场，$\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的向量势.

若F是旋度场. 则 $\nabla\cdot F=\nabla\cdot(\nabla\times G)=0$

即 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,G)=0$

只有在星形域中可推出F为旋度场

定义 13.5.2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域，$\boldsymbol{P}_0\in\Omega$. 如果对任意的 $\boldsymbol{P}\in\Omega$，线段 $\overline{\boldsymbol{PP}_0}$ 完全落在 Ω 中，就称 Ω 关于 $\boldsymbol{P}_0$ 是星形区域.

定理 13.5.1 设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中关于 $\boldsymbol{P}_0$ 的星形区域，$\boldsymbol{F}\in C^1(D)$. 那么 $\boldsymbol{F}$ 是旋度场的充分必要条件是 $\boldsymbol{F}$ 为无源场，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$.

定理 13.5.2 设 $\boldsymbol{G}$ 是旋度场 $\boldsymbol{F}$ 的向量势，那么对 D 中任意连续可微的函数 φ，$\boldsymbol{G}+\nabla\varphi$ 也是 $\boldsymbol{F}$ 的向量势.

例：证明 $F=(xy+1)i+zj+yzk$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的旋度场. 并求其向量势.

令 $P=xy+1$. $Q=z$. $R=-yz$. 有 $\mathrm{div}F=y-y=0$. 为无源场.

设其向量势为 $G=G_1i+G_2j+G_3k$. $\Rightarrow\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=xy+1$. $\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=z$. $\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=-yz$.

令 $G_3=0$. 有 $G_2=-xyz-z+f(x,y)$. $G_1=\frac{z^2}{2}$. 又 $-yz+\frac{\partial f}{\partial x}=-yz$. 可取 $f=0$.

可得一向量势为 $G=\frac{z^2}{2}i-(xyz+z)j$，一般的向量势为 $G=\frac{z^2}{2}i-(xyz+z)j+\nabla\varphi$. φ 为 $\mathbf{R}^3$ 上任意连续可微函数

教材习题

13.1 3. 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，$p=\|\boldsymbol{p}\|$，f 为单变量函数. 计算：

(1) $\nabla \ln p$；　(2) $\nabla f(p)$；

(3) $\nabla f(p^2)$；　(4) $\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量）.

(1). $\nabla \ln p=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\vec{p}}{p^2}=\frac{\vec{p}}{p^2}$ (2). $\nabla f(p)=f'(p)\cdot\frac{\vec{p}}{p}$. (3). $\nabla f(p^2)=f'(p^2)\cdot 2\vec{p}$. (4). $\nabla(f(p)\vec{p}\cdot\vec{a})=f(p)\cdot\vec{a}+\vec{p}\cdot\vec{a}\,f'(p)\cdot\frac{\vec{p}}{p}$

5. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区间，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场，数量场 $u\in C^1(\Omega)$，点 $\boldsymbol{p}\in\Omega^{\circ}$. 求证：

$$\nabla u(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\iint_{\partial\Omega}u\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

$\iint_{\partial\Omega}u\boldsymbol{n}d\sigma=i\iint_{\partial\Omega}u\,dydz+j\iint_{\partial\Omega}u\,dzdx+k\iint_{\partial\Omega}u\,dxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})dxdydz$ 由积分中值定理与连续性可证.

13.4 2. 计算下列恰当微分的曲线积分：

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$；$=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}z^3)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)}=-\frac{65}{6}$

(2) $\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$；$=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}=-6$

(3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 (x_1,y_1,z_1) 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的点，(x_2,y_2,z_2) 是球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上的一点，并设 $a>0,b>0$. $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=b-a.$

1. 求下面 $\boldsymbol{F}$ 的势函数：

(1) $\boldsymbol{F}=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2}\right)$；

$\mathrm{rot}F=0$. 故为有势场. 从 $(1,1,1)$ 到 (x,y,z)，有 $\varphi=\int_{(1,1,1)}^{(1,1,z)}+\int_{1,1,z}^{1,y,z}+\int_{1,y,z}^{x,y,z}F\,dp=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+x-1$

于是势函数为 $\varphi=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+x+c$　c 为常数.

4. 设 f 为单变量的连续函数. 计算：

(1) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$；势函数为 $\int_a^{x+y+z}f(u)du$.

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$. 势函数为 $\int_a^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}uf(u)du$.

(5) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$；

即求向量场 (e^y,xe^y-2y) 的势函数. $F=\int_{(0,0)}^{(0,y)}+\int_{(0,y)}^{(x,y)}f\,dp=\int_0^y-2t\,dt+\int_0^x e^y dt=xe^y-y^2$

故通解为 $xe^y-y^2=c$.

13.5 1. 证明下列向量场都是 $\mathbf{R}^3$ 中的旋度场，并求其向量势：

(1) $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$；

$\mathrm{div}F=0$. 为旋度场. 设向量势为 (G_1,G_2,G_3). 有 $\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=z$, $\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=x$, $\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=y$

设 $G_3=0$. $G_2=-\frac{z^2}{2}+f(x,y)$, $G_1=xz\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=y$. 取 $f=xy$. 于是向量势为 $G=(xz,-\frac{z^2}{2}+xy,0)+D\varphi$.

φ 为 R^3 上任一连续可微函数

第十四章 数项级数

知识点&例题

定义 14.1.1 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

的前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

称为这个级数的第 n 个**部分和**. 如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S，就说级数(1)是**收敛**的，其和为 S，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S;$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限，就说级数(1)是**发散**的.

定理 14.1.1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

即若 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 但 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 不可说明级数收敛.

定理 14.1.2 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 都收敛，那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \tag{3}$$

这里 α,β 是任意两个实数.

定理 14.1.3 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序，得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{4}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$，那么新级数也收敛，且与原级数有相同的和.

必须注意，这个命题的逆命题是不成立的. 也就是说，即使级数(4)收敛，也不能断言原级数一定收敛. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\cdots$$

便是一个例子：如果把它的项两两结合起来，便得一个收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

但它本身是发散的.

绝对收敛

但若对级数(4)加上一些条件，定理 14.1.3 的逆命题也能成立.

定理 14.1.4 如果级数(4)在同一括号中的项都有相同的符号，那么从级数(4)收敛，便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而且两者有相同的和.

定理 14.1.5 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性.

定理 14.2.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

一般地，可以证明：对任意的 $\alpha>1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}<+\infty.$$

当然证明要比这儿困难(参见问题 14.2 中的第 3 题).

定理 14.2.2(比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\ln\ln n}$. $n^{-\ln\ln n}<n^{-2}$ 在 $n>9$ 时成立. 收敛.

定理 14.2.3(比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

那么：

(1) 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散；

(2) 若 $l=0$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

(3) 若 $l=+\infty$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$　$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

定理 14.2.4(Cauchy 积分判别法) 设当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant0$ 且递减，那么无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛 ($p=1$ 时不行)

定理 14.3.1(Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个正项级数.

(1) 如果存在正数 $q<1$，使得对充分大的 n，有

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 如果对无穷多个 n，有

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 14.3.2(Cauchy 判别法的极限形式) 设对所有的 $n=1,2,\cdots$，有 $a_n\geqslant0$，且

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

那么：

(1) 当 $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 当 $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

(3) 当 $q=1$ 时，无法判断.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{e}{2}>1$. 发散

引理 14.3.1 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n\geqslant n_0$ 时，有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么：

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

定理 14.3.3(D'Alembert 判别法) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在正数 $q<1$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；D'Alembert 判别法一般使用在含 $n!$ 或 n^n 的级数

(2) 如果当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 14.3.4(D'Alembert 判别法的极限形式) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$; $\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$ 必发散.

(2) 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q'>1$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$;

(3) 如果 $q=1$ 或 $q'=1$,那么无法判断.

例: $x\in[0,\infty)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=(n+1)x=\infty$. 对 $\forall x>0$ 发散.

定理 14.3.5 设$\{a_n\}$是任意的正数列,那么

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

定理 14.3.6(Raabe 判别法) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在 $r>1$,使得当 $n>n_0$ 时,有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant r, \tag{3}$$

多用于 $n!$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. >1 收敛 ≤1

(2) 如果对充分大的 n,有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \tag{4}$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 14.3.7 设数列$\{a_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

那么,当 $l>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;当 $l<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;当 $l=1$ 时,无法判断.

例: 设 $\alpha>0$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 收敛.

$\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|/\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\dfrac{|\alpha-n|}{n-\alpha}\to 1$ 于是不能用 D'Alembert 判别法. 下用 Raabe 判别法.

有 $n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|/\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|-1\right)=n\left(\dfrac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=\dfrac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to 1+\alpha>1$ 故收敛.

定理 14.3.8(Gauss 判别法) 设正数列$\{a_n\}$满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty). \tag{6}$$

那么,当 $\beta>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;当 $\beta<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 14.4.1(Cauchy 收敛原理) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是,对任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

例: $\{a_n\}$为递减正数列,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

由 Cauchy 收敛原理 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $n>N$ 时 $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对 $\forall p$ 成立. 取 $p=n$. 有 $2na_{2n}<\varepsilon$.

有 $(2n+1)a_{2n+1}<2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0$ 证毕.

定理 14.4.2(Leibniz 判别法) 如果$\{a_n\}$递减趋于 0,那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

若非递减趋于0也不可用 Leibniz 判别法

引理 14.4.1(Abel(阿贝尔,1802~1829)分部求和公式) 设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$是两列实数,则对任意的正整数 n,有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n, \tag{4}$$

这里 $S_k=\sum\limits_{l=1}^{k}a_l$.

引理 14.4.2(Abel 引理) 设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,记 $S_k=\sum\limits_{l=1}^{k}a_l$. 如果 $|S_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$,那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant M(|b_1|+2|b_n|).$$

定理 14.7.8 任意改变绝对收敛的无穷乘积因子的次序,所得的新的无穷乘积仍然绝对收敛,且其积不变.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散 $\Leftrightarrow$ $\exists N>0$. $n>N$ 时 a_n 不变号 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

例: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ 且不变号 $\Rightarrow\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})=\infty$. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})=0$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty\Rightarrow\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同为发散.

定理 14.4.3(Dirichlet 判别法) 设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$是两个数列,$S_k=\sum\limits_{l=1}^{k}a_l$,它们满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$单调趋于 0; 单调0必有界

(b) $\{S_k\}$有界.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

定理 14.4.4(Abel 判别法) 设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$单调有界; 单有界必收敛.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 有 $\{\frac{1}{n}\}\downarrow 0$. $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\cos n\right|=\left|\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{|\sin\frac{1}{2}|}$ 有界. 由 Dirichlet 判别法知收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 有 $(1+\frac{1}{n})^n\to e$. 有界. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛. 由 Abel 判别法知收敛.

定理 14.5.1 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

由此可见,所有收敛的变号级数可以分成两类:一类是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛;另一类是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 我们把前一类级数叫做**绝对收敛级数**,后一类叫做**条件收敛级数**.

定理 14.5.2 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序,所得的新级数仍然绝对收敛,其和也不变.

定理 14.5.3(Riemann 定理) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则适当交换各项的次序,可使其收敛到任一事先指定的实数 S,也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.

定理 14.6.1(Cauchy) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛,其和分别为 A,B,那么把

$$a_ib_j\quad(i,j=1,2,\cdots)$$

按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的,且其和就等于 AB.

定理 14.6.2(Mertens(梅尔滕斯,1840~1927)) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛,其和分别为 A 和 B. 如果其中至少有一个绝对收敛,那么它们的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=AB,$$

其中 $c_n=\sum\limits_{i+j=n+1}a_ib_j$.

定理 14.6.3(Abel) 设

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A,\quad\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B.$$

如果它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,那么必有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=AB.$$

无穷乘积收敛 $\Leftrightarrow\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq 0$ $P<\infty$.

定理 14.7.1 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

定理 14.7.2 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) \tag{1}$$

收敛. 在收敛的情况下,如果式(1)的和是 S,那么

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=e^S.$$

定理 14.7.3 如果从某个 n 起都有 $a_n>0$(或者 $a_n<0$),那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

定理 14.7.4 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$ 那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

定理 14.7.5 如果 $-1<a_n<0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

定理 14.7.6 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散,那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛,则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **绝对收敛**.

定理 14.7.7 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

教材习题

$n!>(\frac{n}{e})^n$

14.2 2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性:

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{1/(n^2+1)}-1)$; $\sim\frac{\ln n}{n^2+1}$ 收敛. (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+(1/n)}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^{1+\frac{1}{n}}}{1/n}=1$. 发散.

6. 证明:级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ 发散. $>\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

8. 问 p,q 取何值时,级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$$

收敛?

与 $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln^p x\ln^q\ln x}$ 同收敛. $=\int_3^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln^p x\ln^q\ln x}=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t^p\ln^q t}$

$p>1$ 时收敛

$p=1$ 时 $q>1$ 时收敛.

14.1 (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+(1/n)}}{(n+1/n)^n}$; $\to 1$ 发散.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}<1$. 由 Cauchy 判别法知收敛.

2. 利用 Raabe 判别法,讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}(a>0)$; $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{na}{\sqrt{n+1}}\to\infty$. 收敛.

4. 设 $a_n>0$,$\{a_n-a_{n+1}\}$为一个严格递减的数列. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

转化条件

若 $\exists N>0$. $n\geqslant N$ 时 $a_n-a_{n+1}<0$ 则有 $a_{n+1}>a_n>a_N\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 矛盾!

于是一定有 $\forall n>0$. $a_n>a_{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}>\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})(a_k-a_{k+1})}>\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})}=+\infty$

14.4 6. 设$\{a_n\}$递减趋于0.讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$$

的敛散性.

$\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 有界. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 在 $x\neq 2k\pi$ 时有界. $x=2k\pi$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

有界时由Dirichlet判别法知二者均收敛.

11. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$.

(1). $=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 由Leibniz知收敛.

(2). $\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ 单减. 又 $\sim\frac{\ln n}{n}$ 知 $\searrow 0$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 有界. 由Dirichlet知收敛.

3. 设$\{a_n\}$是一个递增的正数列. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$有界.

$\Leftarrow$) 设 $a_n\le M$. 则有 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\le\frac{M}{a_1}-1$ 有界. 又 $\sum_{n=1}^{N}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 单调↑. 知收敛.

$\Rightarrow$) 若 a_n 无界. 发散至 $+\infty$. 则 $\sum_{n=m}^{m+p}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)\ge\sum_{n=m}^{m+p}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{m+p+1}}=1-\frac{a_m}{a_{m+p+1}}\to 1$ as $p\to\infty$ 发散. 矛盾! 证毕

2. 设 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1)(n=2,3,\cdots)$. 证明: $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\mathrm{e}$.

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{a_n})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}/n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_1(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n!})=\cdots=\lim_{n\to\infty}(a_1+1!+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e$

4. 证明: $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0$. 由此证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0.$$

$\ln(\frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n)=n\ln(1+\frac{1}{n})-1=-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$ 于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2n})$ 发散可知原级数发散

$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{e}(1+\frac{1}{k})^k=\lim_{n\to\infty}e^{-n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}e^{-n}=0.$ □

14.5 4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

(1) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty$, 其逆命题是否成立?

(2) 证明: 记 $S_N^+=\sum_{n=1}^{N}a_n^+, S_N^-=\sum_{n=1}^{N}a_n^-$, 那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N^+}{S_N^-}=1.$$

(1). 若只有一者为 $+\infty$. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty$. 不收敛矛盾. 于是二者均至 $+\infty$.

(2) $LHS=\lim_{N\to\infty}\frac{S_N+S_N^-}{S_N^-}=1+\lim_{N\to\infty}\frac{S_N}{S_N^-}=1$

1. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)(p>0)$;

$p>1$ 时 $|\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})|<\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

$\frac{(-1)^n}{n^p}-\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})\sim\frac{1}{2n^{2p}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛. $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时RHS收敛. 则原级数收敛为条件收敛.

$0<p\le\frac{1}{2}$ 时发散.

14.7 (3) $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$. $LHS=2(1-\frac{1}{2})\prod_{n=0}^{\infty}(1+(\frac{1}{2})^{2^n})=2\lim_{n\to\infty}(1-(\frac{1}{2})^{2^{n+1}})=2$

4. 讨论下列无穷乘积的敛散性:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 发散到0.

(2) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$; $=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n(n+2)})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 同敛散. 收敛.

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$. $=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}\sim\frac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$ (p为任意的实数); $(\frac{n^2-1}{n^2+1})^p-1=(1-\frac{2}{n^2+1})^p-1\sim-\frac{2p}{n^2+1}$ 收敛.

7. 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1.$$

$\frac{a_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}(1+a_i)}-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)}\Rightarrow$ 原式 $=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)}=1$

第十五章 函数项级数

知识点&例题

定义 15.2.1 设函数列$\{f_n\}$在点集 I(可以是区间, 也可以不是区间)上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列$\{f_n\}$在 I 上**一致收敛**于函数 f.

从几何上来看, $y=f_n(x)(n=1,2,\cdots)$表示一系列曲线. 所谓$\{f_n\}$一致收敛于 f, 就是指从某个下标 $N(\varepsilon)$之后, 曲线

$$y=f_n(x)\quad(n=N+1,N+2,\cdots)$$

全部落入条形区域 $f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon$ 之中(图15.1).

从图15.2中可以看出, 不论 n 多大, 曲线 $y=x^n$ 永远不会全部落入条形区域 $0<y<\varepsilon$ 之中, 这里 $\varepsilon\in(0,1)$. 因而$\{x^n\}$在$(0,1)$上不是一致收敛于0的.

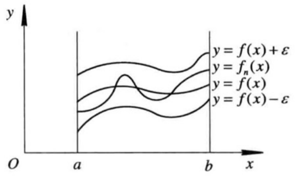


图 15.1

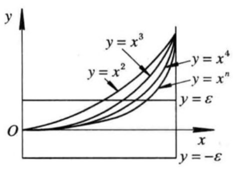


图 15.2

如果记

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|,$$

那么从上面的几何考察, 可以得到:

定理 15.2.1 函数列$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0. \tag{2}$$

例: 讨论 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间$(0,+\infty)$与$[\delta,+\infty)$上的一致收敛性. $\delta>0$.

对 $\forall x>0$. $f_n(x)\to 0$ as $n\to\infty$. 当 $\delta\le x<\infty$ 时 $|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\le\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}\le\frac{1}{n\delta}$

于是有 $\beta_n=\sup_{x\ge\delta}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n\delta}\to 0$ as $n\to\infty$. 于是此时$\{f_n\}$在$[\delta,+\infty)$一致收敛于0.

当 $0<x<\infty$ 时 由于 $\beta_n\ge|f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})|=\frac{1}{2}\not\to 0$. 此时不一致收敛

定理 15.2.2(Cauchy 收敛原理) 设$\{f_n\}$是定义在区间 I 上的一个函数列, 那么$\{f_n\}$在 I 上一致收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{3}$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立.

收敛: $N=N(\varepsilon,x)$

一致收敛: $N=N(\varepsilon)\Leftarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n-f|=0$

定义 15.2.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数, 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列$\{S_n(x)\}$在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上**一致收敛**于 $S(x)$.

定理 15.2.3(Cauchy 收敛原理) 定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立.

推论 15.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是, 它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于0. 只是必要条件

定理 15.2.4(Weierstrass 判别法) 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)|\le a_n\quad(n=1,2,\cdots), \tag{4}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

满足条件式(4)的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上的一个**优级数**. 定理15.2.4是说, 在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在$(-\infty,\infty)$上一致收敛. $|\frac{x}{1+n^4x^2}|\le\frac{1}{2n^2}$ 由Weierstrass判别法知.

设$\{a_n\}$是一数列, 此数列有界是指: 存在正数 M, 使得$|a_n|\le M$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都能成立. 设$\{f_n\}$是定义在区间 I 上的函数列. 如果对每一个 $x\in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得$|f_n(x)|\le M(x)$对 $n=1,2,\cdots$成立, 则称函数$\{f_n\}$在 I 上**逐点有界**. 应当注意, 这里的 $M(x)$是随 x 的变化而变化的. 如果能找到一个常数 M, 使得

$$|f_n(x)|\le M\quad(n=1,2,\cdots)$$

对一切 $x\in I$ 成立, 则称函数列$\{f_n\}$在 I 上**一致有界**.

定理 15.2.5(Dirichlet 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

(a) $\{b_n(x)\}$对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于0;

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即 注意:两个函数项都不单调.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|\le M\quad(x\in I,n=1,2,\cdots).$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 15.2.6(Abel 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

(a) $\{b_n(x)\}$对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)|\le M\quad(x\in I,n=1,2,\cdots);$$

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛.

对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. 令 $a_n(x)=\cos nx$, $b_n(x)=\frac{1}{n}$. 有 $b_n(x)\searrow 0$. $|\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$ 由Dirichlet知.

定理 15.3.1 如果函数列$\{f_n\}$的每一项都在区间 I 上连续, 且$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 15.3.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例: 证明 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{x}{\ln n})^n$ 在$(-\infty,\infty)$上连续

对 $\forall M>0$. $|x|\le M$ 时 $|f_n(x)|<|\frac{M}{\ln n}|^n$ 又由Cauchy判别法知 $(\frac{M}{\ln n})^n$ 收敛 $\Rightarrow f(x)$ 在$(-M,M)$上一致收敛

于是 $f(x)$ 为$(-M,M)$上的连续函数. 又 M 为任意正数. f 在$(-\infty,\infty)$连续.

定理 15.3.3(Dini 定理) 设函数列$\{f_n\}$在有限闭区间$[a,b]$上连续.如果对每一个$x\in[a,b]$,数列$\{f_n(x)\}$递减地趋于 0,那么$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 0.

定理 15.3.4(Dini 定理) 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的每一项在有限闭区间$[a,b]$上连续且非负.如果它的和函数$S(x)$也在$[a,b]$上连续,那么该级数在$[a,b]$上一致收敛.

一致收敛的判别法

① Dirichlet 与 Abel

② 优级数判别法(Weierstrass 判别法)

③ Cauchy 判别法(注意 $N=N(\varepsilon)$ 而非 $N(\varepsilon;x)$) 对函数项级数为 $|S_n(x)-S(x)|$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

连续函数列也成立

定理 15.3.5 如果$[a,b]$上的可积函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于f,那么f也在$[a,b]$上可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

定理 15.3.6 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$,且每一项$u_n(x)$都在$[a,b]$上可积,那么$S(x)$也在$[a,b]$上可积,并且

或连续

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 15.3.7 设函数列$\{f_n\}$满足条件:

(a) 每一个f_n在$[a,b]$上有连续的导函数;

(b) 由导函数构成的函数列$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数g;

(c) 至少在某一点$x_0\in[a,b]$上收敛.

那么函数列$\{f_n\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于某个连续可微函数f,并且对每一个$x\in[a,b]$,有

$$f'(x)=g(x),\quad 即\quad (\lim_{n\to\infty}f_n(x))'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 15.3.8 设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足条件:

(a) 每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数;

(b) 由各项的导函数组成的级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于函数$g(x)$;

(c) 至少在某一点$x_0\in[a,b]$处收敛.

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,其和函数$S(x)$在$[a,b]$上连续可导,并且$S'(x)=g(x)$,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

定理 15.4.1(Abel) 如果幂级数(2)在点$x=x_0(x_0\neq0)$处收敛,那么它必在区间$|x|<|x_0|$上绝对收敛;如果幂级数(2)在点$x=x_1$处发散,那么它必在$|x|>|x_1|$上发散.

定理 15.4.2(Cauchy-Hadamard(阿达马,1865～1963)) 对给定的幂级数(2),记

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

那么:

(1) 当$R=0$时,级数(2)只在$x=0$这一点处收敛;

(2) 当$R=+\infty$时,级数(2)在整个数轴上都绝对收敛;

(3) 当$0<R<+\infty$时,级数(2)在区间$(-R,R)$内绝对收敛,在$[-R,R]$之外发散.

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在,则 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

② $\sum a_nx^n$ 在端点处的收敛性不确定

例:计算 $\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{2n}$ 的收敛半径.

$n=2k$ 时,$a_n=2^k$;$n=2k+1$ 时 $a_n=0\Rightarrow\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{2}$ 则 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

定理 15.4.3 设级数(2)的收敛半径为R,则对任意的$r\in(0,R)$,级数(2)在$[-r,r]$上一致收敛.

未必在$(-R,R)$上一致收敛

这时称级数(2)在$(-R,R)$上$\boxed{内闭}$一致收敛.

定理 15.4.4 设级数(2)的收敛半径为R,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续,而且在$(-R,R)$内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots). \tag{3}$$

定理 15.4.5 设级数(2)的收敛半径为R,$S(x)$是它的和函数,那么对任意的$x\in(-R,R)$,有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \tag{6}$$

而且式(6)右边幂级数的收敛半径仍为R.

定理 15.4.6(Abel 第二定理) 设级数(2)的收敛半径为R.如果在$x=R$处级数(2)收敛,则其和函数$S(x)$在$x=R$处左连续;如果级数(2)在$x=-R$处收敛,则$S(x)$在$x=-R$处右连续.

例:求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的和.

当 $x\in(-1,1)$ 时 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 在 $x=1$ 时收敛.由Abel第二定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim\limits_{x\to1}\ln(x+1)=\ln2$.

定理 15.4.7(Tauber 定理) 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 1,且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

存在.如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

那么$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

定理 15.4.8 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径均为$R$,那么当$x\in(-R,R)$时,有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中$c_n=\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}(n=0,1,2,\cdots)$.

例:证明 $x\in(-1,1)$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$

定理 15.5.1 如果存在常数M,使得对(x_0-R,x_0+R)内的所有x及一切充分大的正整数n,均有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

那么f能在(x_0-R,x_0+R)上展开为 Taylor 级数.

现在设f在$x=x_0$处有任意阶导数,那么由f就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为f在$x=x_0$处的 **Taylor 级数**,记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{1}$$

特别地,当$x_0=0$时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为f的 **Maclaurin 级数**.

下面六个初等函数的幂级数展开式以后会经常用到,应该熟练地掌握:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\leqslant1),$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant1),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

最后一个展开式的成立范围视α的数值而定,详见例 3.

例:求 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的Maclaurin展开式.

有原式 $=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\Rightarrow$ 在$(-1,1)$上,$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$

定理 15.6.1(Weierstrass 逼近定理) 闭区间$[a,b]$上的任何连续函数f都能在这个区间上用多项式一致逼近.

注意两个条件

定义 15.6.1 设$f:[0,1]\to\mathbf{R}$.称

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)$$

为f的n次 **Bernstein 多项式**.

定义 15.7.1 设$\{a_n\}$是一个给定的数列.称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为$\{a_n\}$的母函数或生成函数.

例:求 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

$R=(\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^{-1}=1$.对 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ 求导:$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.于是 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\ (|x|<1)$

例:将 $\ln(x+1)$ 展开为幂级数

$x\in(-1,1)$ 时 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$.积分有 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

教材习题

15.1 (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$; 收敛点集? $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{x}{n})^n}{n^x}$ 于是为$(1,\infty)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; 收敛点集? $\leqslant\min\{x^n,x^{-n}\}$.于是为$\mathbb{R}\setminus\{1\}$

15.2 2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性:

$f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$,$(-\infty,+\infty)$; $\leqslant\frac{1}{2n^{3/2}}$ 一致收敛.

(2) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$: (a)一致.$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1-\lambda]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1-\lambda]}\frac{x^n}{1+x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-\lambda)^n}{1+(1-\lambda)^n}=0$.

(a) $0\leqslant x\leqslant1-\lambda$; (b) $1-\lambda\leqslant x\leqslant1+\lambda$; (b).不一致.$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[1-\lambda,1+\lambda]}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{1<x\leqslant1+\lambda}\frac{1}{1+x^n}=1$

(c) $1+\lambda\leqslant x<+\infty\ (\lambda>0)$. (c).一致.$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\geqslant1+\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\geqslant1+\lambda}\frac{1}{1+x^n}=0$.

7. 设$\{u_n(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数列.证明:如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b)$内的每一点收敛,但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$发散,那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b)$上不一致收敛.

若一致收敛.$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,$m\geqslant N$ 时对 $\forall p\geqslant1$,有 $\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}u_n(x)\right|<\varepsilon$.由连续性 $\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}u_n(b)\right|=\lim\limits_{x\to b}\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}u_n(x)\right|\leqslant\varepsilon$.矛盾!

9. 证明:级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$在$(0,\pi]$上不一致收敛.

由Dirichlet判别法知收敛.但 $x=0$ 时发散.由上题知不一致收敛

12. 设f_1在$[a,b]$上 Riemann 可积,定义

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明:函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 0.

则 $f_1(x)$ 有界.设为 M.则有 $|f_2(x)|\leqslant M(x-a)$

归纳得:$|f_n(x)|\leqslant\frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\to0$.

证毕

15.3 1. 确定下列函数的存在域，并研究它们的连续性：

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|$. 于是 $|x|<1$ 时绝对收敛. $x=\pm1$ 时 $(\pm1+\frac{1}{n})^n\not\to0$. 故级数发散

故 $f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 对 $\forall\delta\in(0,1)$. $x\in[-1+\delta,1-\delta]$ 时 $n\geq[\frac{2}{\delta}]$ 时 $|x+\frac{1}{n}|^n\leq(|x|+\frac{\delta}{2})^n\leq(1-\frac{\delta}{2})^n$ 收敛.

由 Weierstrass 判别法知其在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛. 则连续

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 证明：

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\ln 2.$$

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 一致有界. $\frac{1}{n^x}$ 在 $x\geq\frac{1}{2}$ 时单调一致收敛至0. 由 Dirichlet 判别法知一致收敛. 连续.

15.4 1. 求下列幂级数的收敛半径，并研究它们在收敛区间端点处的性质：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

(1) $R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{e}$. $x=\pm\frac{1}{e}$ 时通项 $\not\to0$. 不收敛. (2). $R=(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n})^{-1}=1$. $x=\pm1$ 时通项 $\not\to0$. 发散

2. 求下列广义幂级数的收敛点集：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$； $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$ 收敛范围为 $(-1,1)$. 故 x 范围为 $(0,+\infty)$

1. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一个发散的正项级数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0+\cdots+a_n}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=1$ 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为1. 又 $S_n\geq a_n\Rightarrow R\geq1$. 又 $x=1$ 时发散 $\Rightarrow R\leq1\Rightarrow R=1$

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，且 $a_n\geq0$.

(1) 证明：$\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR_n$；

(2) 由(1)，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛. 由 Abel 第二定理. 成立.
若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=\infty$. 对 $\forall M>0$. $\exists N>0$. $\sum\limits_{n=0}^{N}a_nR^n>2M$.
故 $\frac{R}{\sqrt[N]{2}}<x<R$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geq\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{N}a_nR^n>M$. 得证

(2). 原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\lim\limits_{x\to1^-}-\ln(1-x)=+\infty$

15.5 2. 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $(1+x)\ln(1+x)$；　　(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(1). 原式 $=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ (2) 原式 $=x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)x^{2n}$

3. 将下列函数展开成幂级数：

(1) $\arcsin x$； $=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^2dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^nt^{2n}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$

4. 把函数 $f(x)=\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$y=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow x=\frac{1+y}{1-y}$ 则 $f(x)=\ln(1+y)-\ln(1-y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$

15.6 2. 设 $f\in C[a,b]$.

(1) 如果

$$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

那么 $f(x)\equiv0$；

(2) 如果存在正整数 N，使得

$$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0\quad(n\geq N),$$

那么 $f(x)\equiv0$.

(1) $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数. 有多项式列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 则 $\{f(x)f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f^2(x)$. 故有 $\int_a^b f^2(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)f_n(x)dx=0$
则有 $f(x)\equiv0$.
(2). 有 $x^Nf(x)\equiv0\Rightarrow f(x)\equiv0$.

4. 设 $f\in C[-1,1]$. 证明：

(1) 如果

$$\int_{-1}^{1}x^{2n+1}f(x)\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

那么 f 是偶函数；

(2) 如果

$$\int_{-1}^{1}x^{2n}f(x)\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

那么 f 是奇函数.

(1). $\int_{-1}^{1}-x^{2n+1}f(-x)dx=0\Rightarrow\int_{-1}^{1}(f(x)-f(-x))x^{2n+1}dx=0$ 提一个 x. 设 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 即可.
(2). 同理.

5. 证明：若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能用多项式一致逼近，那么 f 必为一多项式.

设 $\{f_n(x)\}$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的多项式列. $\exists N>0$. $n>N$ 时 $\forall x$. 有 $|f_N(x)-f_n(x)|\leq1$
则 $f_n(x)$ 与 $f_N(x)$ 只差常数. 故 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f_N(x)+\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)-f_N(0)=f_N(x)-f_N(0)+f(0)$ 为多项式.

第十六章 反常积分

知识点&例题

定理 16.1.1 若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

根据这个定理，就能得到类似于正项级数中的比较判别法.

定理 16.1.2 设对充分大的 x，函数 f 和 g 满足不等式

$$0\leq f(x)\leq g(x).$$

那么：

区别于级数. $f(x)\to0$ 不是 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的必要条件!!

(1) 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样.

设 $a>0$，则当 $p>1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛；当 $p\leq1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散，所以经常拿 f 和函数 $1/x^p$ 作比较，正像在正项级数中经常拿 a_n 和 $1/n^a$ 作比较一样.

定理 16.1.3 设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

那么：

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

(2) 当 $l=0$ 时，如果 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 16.1.4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数. 如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1=a)$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

例：证明积分 $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$ 收敛.

证明：被积函数非负. 只需证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$ 收敛

有 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}\leq(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\sin^2x}=2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+n^6\sin^2x}\leq2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2x+n^6\sin^2x}$

$=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(n^3\tan x)}{1+(n^3\tan x)^2}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\leq\frac{2\pi^2}{n^2}$ 故收敛.

定理 16.2.1（Cauchy 收敛原理） 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 $A',A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

这个定理说明，要想使反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，必须且只需在充分远的、不管多长的区间上，积分的绝对值可以任意小.

根据定理 16.2.1，容易证明：

定理 16.2.2 如果积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

定理 16.2.3（第二积分平均值定理） 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上非负，那么：

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上递减，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上递增，则必存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 16.2.4（推广的第二积分平均值定理） 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

定理 16.2.5 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调. 如果对任意的 $A\in[a,b]$，有 $\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leq M$，那么

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq M(|g(a)|+2|g(b)|).$$

定理 16.2.6（Dirichlet 判别法） 设 f,g 满足下面两个条件：

(a) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$；

(b) $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界.

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 16.2.7（Abel 判别法） 设 f,g 满足下面两个条件：

(a) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界；

(b) $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例：证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛. $\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 发散.

证明：对 $\forall A\geq1$. 有 $\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=|\cos A-\cos1|\leq2$. $\frac{1}{x}\searrow0$ 由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛

有 $\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos2x}{2x}$ 前发散后收敛. 故其发散.

例：设 $\max(p,q)>1$. 证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

证明：不妨设 $p\geq q$. $p>1$. 则原积分为 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}(1+x^{q-p})}dx$. 由 Dirichlet 判别法 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}dx$ 收敛. $\frac{1}{1+x^{q-p}}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调有界

则由 Abel 判别法知收敛

一般来说，如果 a 是 f 的瑕点，作变换 $x=a+(1/y)$，那么有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x=-\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{1/\varepsilon}^{1/(b-a)}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y.$$

这就是说，通过上面的变换，每一个瑕积分一定可以化成一个无穷积分.

定理 16.3.1 设对充分靠近 a 的 $x(x>a)$，f 和 g 满足不等式 $0\leq f(x)\leq g(x)$，那么：

(1) 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛； (16.3定理中均假定a为瑕点)

(2) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 16.3.2 设 f 和 g 都是 $(a,b]$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

那么：

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

(2) 当 $l = 0$ 时，如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 16.3.3(Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$，就有

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定理 16.3.4 如果积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

Beta函数：积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 敛散性？ $B(p,q)$

$p<1$ 时 $x=0$ 为瑕点. $q<1$ 时 $x=1$ 为瑕点. 于是分别考虑两点附近. $\int_0^1 \cdots dx = (\int_0^a + \int_a^1)\cdots dx$ $a\in(0,1)$

当 $x\to 0$ 时 $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$ 故 $p>0$ 时收敛. $x\to 1$ 时 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$. $q>0$ 时收敛. 即 $p,q>0$ 时收敛

Gamma函数：积分 $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ 的敛散性？ $\Gamma(s)$

$s<0$ 时 $x=0$ 为瑕点. 分为两部分考虑. $\int_0^\infty \cdots dx = (\int_0^1 + \int_1^\infty)\cdots dx$

$x\to 0$ 时 $x^{s-1}e^{-x}\sim x^{s-1}$ 于是 $s>0$ 时收敛. $x\to\infty$ 时 $x^{s-1}e^{-x}\cdot x^2\to 0$. 即对充分大的 x. $x^{s-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}$ 一定收敛.

于是 $s>0$ 时 $\Gamma(s)$ 收敛.

例：$p>0$ 时 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$ 的敛散性？

$x=0$ 为瑕点. 作 $t=\frac{1}{x}$. 有原式 $=\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-p}}dt$. $p\geq 2$ 时 取 $A=2k\pi$, $A'=(2k+1)\pi$ $k\to\infty$ 时 $|\int_A^{A'}\cdots dt| \geq (2k\pi)^{p-2}\int_0^\pi \sin t\,dt \geq 2$.

不满足Cauchy收敛原理. 故发散. 由 $|t^{p-2}\sin t|\leq\frac{1}{t^{2-p}}$ 故 $p<1$ 时绝对收敛.

当 $1\leq p<2$ 时. $t\to\infty$ 时 $t^{p-2}\downarrow 0$. 由Dirichlet判别法知其收敛. 对于 $\int_1^\infty |t^{p-2}\sin t|dt$. 同上页例知发散. 故此时条件收敛.

综上. $0<p<1$ 时绝对收敛. $1\leq p<2$ 时条件收敛. $p\geq 2$ 时发散

如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称这个极限为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值**，记为

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x.$$

例如

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

对瑕积分，同样可以定义 Cauchy 主值的概念.

设 c 是 f 在区间 $[a,b]$ 内唯一的瑕点，定义

$$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

例如，$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是发散的，但它的 Cauchy 主值存在：

$$\mathrm{P.V.}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = 0.$$

容易知道，收敛的无穷积分或瑕积分的 Cauchy 主值一定存在，但反之不然.

16.1 1. 判断下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；$\sim\frac{1}{x}$ 发散 (2) $\int_0^{+\infty}\frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$；$\sim\frac{3}{x^2}$ 收敛

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$；$\sim\frac{1}{x^2}$ 收敛 (4) $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ $=\int_1^\infty\frac{dt}{t^p}$ $p>1$ 收敛. $p\leq 1$ 发.

2. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 存在，那么必有 $b = 0$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(\xi_x)=\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$. 证毕.

16.2 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$. $\frac{1}{x\ln x}\downarrow 0$. $\int_0^A \sin x\,dx$ 有界. 由Dirichlet判别法知其收敛.

$\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x\ln x} = \frac{1}{2x\ln x} - \frac{\cos 2x}{2x\ln x}$ 前发散后收敛. 则总发散. 于是条件收敛.

引理 16.4.1 设 $f(x,y)$ 是无界区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的非负函数. 如果 $\{\Gamma_n\}$ 是一列分段光滑曲线，它们割出的 D 的有界子区域 $\{D_n\}$ 满足

$$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots,\quad 且\quad \lim_{n\to\infty} d(\Gamma_n) = +\infty,$$

那么 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛的充分必要条件是，数列

$$\left\{\iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

有界. 如果记

$$I = \sup_n\iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在收敛时，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

定理 16.4.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域. 在 D 上，

$$0\leq f(x,y)\leq g(x,y), \tag{2}$$

那么：

(1) 当 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也收敛；

(2) 当 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散时，$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也发散.

定理 16.4.2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域，那么 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是，$|f(x,y)|$ 在 D 上可积.

定义 16.4.2 设 $f: D\setminus\{p_0\}\to\mathbf{R}$，$p_0$ 为 f 的一个瑕点. 设 Γ 为 D 中一条分段光滑的闭曲线，p_0 含在 Γ 的内部. 记 Γ 包围的区域为 σ，

$$\rho(\Gamma) = \sup\{\|p-p_0\| : p\in\Gamma\}.$$

如果二重积分

$$\iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

总存在，而且极限

$$\lim_{\rho(\Gamma)\to 0}\iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

存在，且极限值与 Γ 的取法无关，则称 f 在 D 上可积，并记

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\rho(\Gamma)\to 0}\iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这时称无界函数的反常重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛；反之，称积分发散.

反常重积分不能随意交换积分次序.

教材习题

3. 设 f 为非负的减函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$0=\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^{2A}f(x)dx \geq \lim\limits_{A\to\infty}\int_A^{2A}f(2A)dx = \frac{1}{2}\cdot 2Af(2A)$. 即 $x\to\infty$ 时 $f(x)=o(\frac{1}{x})$

16.3 2. 判断下列反常积分的绝对收敛性和条件收敛性：

~~(1)~~ $\int_0^{+\infty} x^p\sin x^q\mathrm{d}x\,(q\neq 0)$； $x\to 0$ 时 $x^p\sin x\sim x^{p+1}$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x\,(q\geq 0)$.

(2). 原式 $=(\int_0^1+\int_1^\infty)\cdots dx$. 前者在 $p>-2$ 时收敛. 后者在 $p<q$ 时由Dirichlet判别法知收敛. 即 $-2<p<q$ 时收敛

由比较判别法. $\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right| < \frac{x^p}{1+x^q}$ 则 $p-q<-1$ 时绝对收敛. 即 $-2<p<q-1$ 时绝对收敛

当 $p>-2$ 且 $q-1\leq p<q$ 时 $\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right| \geq \frac{x^p}{2(1+x^q)} - \frac{x^p\cos 2x}{2(1+x^q)}$ 右侧由Dirichlet判别法知收敛. 左侧发散. 故整体发散.

即此时条件收敛.

1. 判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x\ (\beta\geq 0)$；$\int_0^\infty\cdots dx = (\int_0^1+\int_1^\infty)\cdots dx$ 前者 $\alpha>-1$ 时收敛. 后者 $\alpha-\beta<-1$ 时收敛 $\Rightarrow -1<\alpha<\beta-1$ 时收敛.

4. 利用第 2 题的结果，证明：对任意的 $\alpha>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

$LHS=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n(\frac{k}{n})^{\alpha-1}=\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}$

第十七章 Fourier分析

知识点&例题

定义 17.1.1 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 称由公式(5)确定的 a_n, b_n 为 f 的 **Fourier**(傅里叶，1768～1830)**系数**，由 a_n, b_n 确定的级数(6)称为 f 的 Fourier 级数，记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

定理 17.1.1(Riemann-Lebesgue 引理) 设 f 在 $[a,b]$(b 可以是 $+\infty$)上可积且绝对可积，那么

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots), \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$ 仍为 $\frac{T}{2}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

推论 17.1.1 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 系数，那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{10}$$

例：证明 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

证明：对等式 $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^n\cos kt=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上积分. 有 $\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_0^\pi(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t})\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$

$+\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt$. 由于 $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t})=0$. 无瑕点. 则由Riemann-Lebesgue引理知第1项在 $n\to\infty$ 时为0

故 $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ 证毕. 作 $x=\lambda t\,(\lambda>0)$ 有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

定理 17.2.1 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 那么 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处是否收敛，以及收敛到什么数值，仅与 f 在 x_0 点附近的行为有关.

现在利用 Riemann-Lebesgue 引理给出 f 的 Fourier 级数收敛的充分条件.

定理 17.2.2(Dini 判别法) 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 对某个实数 s，令

$$\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$，使得函数 $\varphi(t)/t$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s.

定义 17.2.1 设 f 是定义在 x_0 附近的函数. 如果存在 $\delta>0, L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$，使得当 $t\in(0,\delta]$ 时，有

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leq Lt^\alpha,\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leq Lt^\alpha,$$

则称 f 在 x_0 附近满足 α 阶 **Lipschitz**(利普希兹，1832～1903)**条件**.

定理 17.2.3 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 f 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

定理 17.2.4 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$.

(1) 如果 f 在 x_0 处存在导数 $f'(x_0)$，或者有两个有限的单侧导数：

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},\quad f'_-(x_0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$.

定义 17.2.2 如果存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

使得按以下方式定义在每个子区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的函数

$$g_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}+0), & x = t_{i-1}, \\ f(x), & x\in(t_{i-1},t_i) \quad (i=1,\cdots,n), \\ f(t_i-0), & x = t_i \end{cases}$$

都是可微的(在两个端点处单侧可微)，则称函数 f 在 $[a,b]$ 上是分段可微的.

定理 17.2.5 如果周期为 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是分段可微的，那么 f 的 Fourier 级数在每点 x_0 处收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$. 特别是在 f 的连续点处，它收敛于 $f(x_0)$.

例：把函数 $f(x)=x^2$, $-\pi\le x\le\pi$ 展开成 Fourier 级数

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0.$

将定义域扩充到整个数轴上，使其成为 $T=2\pi$ 的函数，记为 $\tilde{f}$

由 Dini 判别法，$\tilde{f}(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx$. 限制在 $[-\pi,\pi]$ 有 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx$.

取 $x=\pi$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 取 $x=0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{\pi^2}{12}$

下面的两种补充方法是最常用的.

一种方法是用公式

$$f(x)=f(-x)\quad(-\pi<x<0)$$

来补充 f 在 $(-\pi,0)$ 上的定义，使 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上成为偶函数. 这种补充方法简称为**偶性延拓**. 这样便有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此，f 的 Fourier 级数中只含余弦项：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称它为**余弦级数**.

另一种补充方法是所谓的**奇性延拓**，即用公式

$$f(x)=-f(-x)\quad(-\pi<x<0)$$

来补充 f 在 $(-\pi,0)$ 上的定义. 这时，f 是 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数. 于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

因而 f 的 Fourier 级数是一个**正弦级数**：

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

由此可见，对只定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，只要满足 Dini 定理的条件，我们既可把它展开成正弦级数，也可把它展开成余弦级数.

定义 17.3.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个无穷级数，$\{S_n\}$ 是它的部分和数列. 如果 $\{S_n\}$ 的算术平均

$$\sigma_n=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是一个收敛数列，即 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **在 Cesàro 意义下收敛(或均值意义下收敛)**，σ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的 Cesàro 和，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sigma(\mathrm{C})$. 这时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以 Cesàro 求和.

定理 17.3.1(Fejér) 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 f 在 x_0 处有左、右极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$，那么它的 Fourier 级数在 x_0 处的 Cesàro 和为

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

特别地，当 f 在 x_0 处连续时，它的 Fourier 级数的 Cesàro 和即为 $f(x_0)$.

推论 17.3.1 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$. 如果 f 在 x_0 处有左、右极限，且其 Fourier 级数在 x_0 处收敛，那么必收敛于 $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

定理 17.3.2(Fejér 定理) 如果 f 是周期为 2π 的连续函数，那么它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

定理 17.3.3(Weierstrass 逼近定理) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，那么 f 必能用三角多项式一致逼近.

定义 17.4.1 设 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$. 如果存在三角多项式序列 $\{T_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx=0,$$

则称 $\{T_n\}$ **平方平均收敛于** f，或者称 f 可用三角多项式**平方平均逼近**.

设 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathbf{R}^2[a,b]$ 中一个给定的规范正交系. 对任意的 $f\in\mathbf{R}^2[a,b]$，称

$$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\quad(k=0,1,\cdots)\tag{2}$$

为 f 关于正交系 $\{\varphi_k\}$ 的 **Fourier 系数**. 由此产生的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ 称为 f 关于正交系 $\{\varphi_k\}$ 的 **Fourier 级数**，记为

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x).\tag{3}$$

定理 17.4.1 设 $f\in\mathbf{R}^2[a,b]$，$\{\varphi_k\}$ 是 $\mathbf{R}^2[a,b]$ 中的一个规范正交系，$\{c_k\}$ 是 f 关于 $\{\varphi_k\}$ 的 Fourier 系数. 那么：

(1) 对任意的正整数 n 及实数 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$，有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|\geqslant\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|;$$

(2) $\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2$;

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2$.

$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$

定义 17.4.2 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathbf{R}^2[a,b]$ 中的一个规范正交系. 如果对任意的 $f\in\mathbf{R}^2[a,b]$，均有 Parseval 等式(6)成立，则称 $\{\varphi_k\}$ 是**完备**的.

推论 17.4.1 规范正交系 $\{\varphi_k\}$ 是完备的充分必要条件是，对任意的 $f\in\mathbf{R}^2[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2=0,$$

即 f 可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近.

这时 Bessel 不等式和 Parseval 等式分别为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.\tag{8}$$

定理 17.4.2 设 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，$a_n$，$b_n$ 是 f 关于三角函数系的 Fourier 系数，那么 f 可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近，即 Parseval 等式(8)成立.

推论 17.4.2 如果 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 f 和三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中的每一个函数都正交，那么必有 $f=0$.

推论 17.4.3(唯一性) 如果两个连续函数有相同的 Fourier 级数，则这两个连续函数必恒等.

定理 17.4.3 设 $f,g\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，$a_n$，$b_n$ 和 α_n，β_n 分别是 f 和 g 的 Fourier 系数，那么

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).\tag{15}$$

定理 17.4.4 设 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

那么对包含在 $[-\pi,\pi]$ 中的任意区间 $[a,b]$，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx.$$

设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，对任意的实数 u，定义

→ 注意上下限

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt,\quad b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt.\tag{1}$$

这两个积分都是绝对收敛的. 仿照 Fourier 级数中的做法，称

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du$$

为 f 的 **Fourier 积分**，记为

$$f(x)\sim\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du.$$

与 Fourier 级数的情形一样，右边的积分是否收敛，如果收敛，是否收敛到 $f(x)$ 都是不知道的. 为了研究 Fourier 积分的收敛性，记

$$S(\lambda,x)=\int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du,\tag{2}$$

它相当于 Fourier 级数的部分和. 为了说明 $S(\lambda,x)$ 是有意义的，我们先证明：

定理 17.5.1 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么由式(1)定义的 $a(u)$ 和 $b(u)$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

定理 17.5.2 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么对任意的 $\lambda>0$，有

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}dt.\tag{4}$$

定理 17.5.3 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么 f 的 Fourier 积分在某点 x 是否收敛，以及收敛于什么值，仅与 f 在 x 附近的函数值有关.

定理 17.5.4(Dini 定理) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，对任意的实数 s 及固定的 x，记

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$，使得 $\varphi(t)/t$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积，那么 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 s.

定理 17.5.5 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且在 x 处有广义的左右导数，那么 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 $(f(x+0)+f(x-0))/2$，即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)dt=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)),$$

或者

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

如果 f 在 x 处连续，则有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)dt,\tag{9}$$

或者

$$f(x)=\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du.$$

式(9)称为 f 的 **Fourier 积分公式**.

特别地，若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且在 x 处有有限的导数，那么 Fourier 积分公式(9)成立.

例：设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$. 由 f 的 Fourier 积分公式导出等式 $\int_0^{\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}du=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$

由 f 为偶函数，$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin u}{u}$. $b(u)=0$.

故在 f 的连续点处有 $f(x)=\int_0^{\infty}a(u)\cos ux\,du=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}du\Rightarrow LHS=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$

$x=\pm1$ 时 f 的 Fourier 积分收敛于 $\frac{1}{2}(f(1+0)+f(1-0))=\frac{1}{2}(f(-1+0)+f(-1-0))=\frac{1}{2}$. 则 $LHS=\frac{\pi}{4}$ $|x|=1$

在 Fourier 积分公式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du,$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt$$

若 f 在一边定义，则可进行奇/偶性延拓

中，如果 f 是偶函数，那么

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt,\quad b(u)=0.$$

这时，积分公式可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos ux\,du\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt.\tag{11}$$

这称为 **Fourier 余弦公式**.

如果 f 是奇函数，那么

$$a(u)=0,\quad b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt.$$

这时，积分公式又可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin ux\,du\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt,\tag{12}$$

这称为 **Fourier 正弦公式**.

如果令

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt, \tag{13}$$

那么式(11)可写为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\cos xu\,du. \tag{14}$$

在这两个公式中，f 和 g 以完全相同的形式相互表示．我们称 g 为 f 的 **Fourier 余弦变换**，式(14)是余弦变换的反变换公式．

反变换中为对 u 积分

同样，称

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt \tag{15}$$

为 f 的 **Fourier 正弦变换**．由式(12)，即得它的反变换公式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}h(u)\sin ux\,du.$$

例：求函数 $f(x)=e^{-\beta x}$ $(\beta>0,\ x>0)$ 的 Fourier 余弦与正弦变换

显然有余弦变换：$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+u^2}$

正弦变换：$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sin ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^2+u^2}$

由反变换公式，有 $e^{-\beta x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\cos ux}{u^2+\beta^2}du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u\sin ux}{u^2+\beta^2}du$

$\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2+\beta^2}du=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}\quad x,\beta>0$

$\int_0^{\infty}\frac{u\sin ux}{u^2+\beta^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-\beta x}\quad x,\beta>0$

例：解积分方程 $\int_0^{\infty}g(u)\cos ux\,du=f(x)$，$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$

显然 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)$ 为 $g(u)$ 的正弦变换．由反变换：$g(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin ux\,dx=\frac{\sin\pi u}{1-u^2}$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt. \tag{18}$$

这就是 **Fourier 积分公式的复数形式**．

现给出下面的定义．

定义 17.5.1 设 f 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积．称

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt \tag{19}$$

为 f 的 **Fourier 变换**．这里 u 是实数，$\hat{f}(u)$是一个实变量的复函数．

从复数形式的 Fourier 积分公式(18)，可得它的**反变换公式**为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)e^{iux}du. \tag{20}$$

定理 17.5.6 若 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=0$，那么

$$\hat{f'}(x)=ix\hat{f}(x).$$

推论 17.5.1 如果 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f^{(k)}(t)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，那么

$$\hat{f^{(n)}}(x)=(ix)^n\hat{f}(x).$$

定义 17.5.2 两个函数 f 与 g 的**卷积**定义为

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-u)g(u)du.$$

定理 17.5.7 $\widehat{f*g}(x)=\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

教材习题

17.1 2. 设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数．证明：

(1) 如果 f 在$[-\pi,\pi]$上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0;$$

$a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^0+\int_0^{\pi}\right)f(x)\cos(2n-1)x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 f(x)\cos(2n-1)x+f(x+\pi)\cos(2n-1)(x+\pi)\,dx=0$．同理有 $b_{2n-1}=0$

6. 设 f 在$[-\pi,\pi]$上可导，f'可积且绝对可积．如果 $f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

由 Riemann-Lebesgue 引理．$0=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=-\lim\limits_{n\to\infty}n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=-n b_n\Rightarrow b_n=o(\frac{1}{n})$ 同理 $a_n=o(\frac{1}{n})$

17.2 4. 在区间$(-l,l)$上把下列函数展开为 Fourier 级数：

(1) x;　　~~(2)~~ $x+|x|$.

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}$．故 $x\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}2l\sin\frac{n\pi}{l}x\quad -l<x<l$

17.3 1. 求下列级数的 Cesàro 和：

(1) $1+0-1+1+0-1+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots(0<x<2\pi)$;

(1). 部分和：1, 1, 0, 1, 1, 0, … 故 Cesàro 和为 $\frac{2}{3}$

(2). 部分和为 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow\sigma_n=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2n\sin\frac{x}{2}}\to0$ 故 Cesàro 和为0.

2. 证明：$[0,\pi]$上的连续函数可用余弦多项式一致逼近．

偶延拓为$[-\pi,\pi]$上的连续函数，再延拓为$(-\infty,\infty)$上的连续函数，记为 f．则其 Fourier 级数为余弦级数

其部分和的平均也为余弦级数．由 Fejer 定理．其在 Cesàro 意义下一致收敛于 f．故在$[0,\pi]$上一致逼近 f．

17.5 1. 用 Fourier 积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|\le1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

奇函数．$a(u)=0$．$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}x\cdot\sin ux\,dx=\frac{2-2\cos u}{\pi u}$

则 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u}\cdot\sin ux\,du$

(3) $f(x)=e^{-a|x|}(a>0)$．

偶函数．$b(u)=0$．$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos ux\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{u^2+a^2}$．$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{a\cos ux}{u^2+a^2}du$

2. 求下列积分方程的解：

(1) $\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\,dt=e^{-x}(x>0)$;

$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin xt\,dt$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 正弦变换．有 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin xt\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+1}$

(2) $\int_0^{+\infty}f(t)\cos xt\,dt=\frac{1}{1+x^2}$．同上．$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt=e^{-|x|}$

17.4 2. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式，并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

的和．

在$(-\pi,\pi)$上．对 $f(x)$ 有 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2\alpha}{\pi}$．$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}$ $b_n=0$．$n\ge1$

于是其 Parseval 等式为 $\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2 n\alpha}{n^2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2\alpha}{\pi}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha}{2}(\pi-\alpha)$

6. 设 a_n,b_n 是 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$的 Fourier 系数．证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛．

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}\le\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\frac{1}{n^2})\le\frac{1}{2}(\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{\pi^2}{12}$

7. 证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的区间上一致收敛，但它不是 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$中任意一个函数的 Fourier 级数．

设$[a,b]$为一不包含 2π 整数倍的区间．有 $\left|\sum\limits_{n=2}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\cos\frac{3}{2}x-\cos(N+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|\le\max\limits_{a\le x\le b}\left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$ 有界．且 $\frac{1}{\ln n}\downarrow0$．

则由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在$[a,b]$上一致收敛．若为 Fourier 级数．由 Parseval 等式有

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\infty$．与 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$矛盾！证毕

2. 设 f 在$[-\pi,\pi]$上连续，且在此区间上有可积且平方可积的导数 f'．如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,$$

证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx\ge\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

等式当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立．

将 $f(x)$ 延拓为$(-\infty,\infty)$上的 $T=2\pi$ 的周期函数．则 $f(x)$ 有 Fourier 展开：$f(x)=a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$．又 $f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$．由 Parseval 等式：$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(b_n^2+a_n^2)=\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)dx$

等号成立当且仅当 $n\ge2$ 时 $a_n=b_n=0$．即 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$．证毕

第十八章 含参变量积分

知识点&例题

定理 18.1.1 如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

是区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数．

定理 18.1.2 如果函数 f 及其偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

在$[\alpha,\beta]$上可微，而且

$$\frac{d}{du}\varphi(u)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)dx.$$

定理 18.1.3 如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)dx\right)du=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right)dx. \tag{3}$$

例：计算积分 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $0<a<b$.

法一：$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^u du\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 x^u dx\right)du=\int_a^b\frac{du}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$

法二：视 a 为常数，b 为参变量．$\frac{dI}{db}=\int_0^1 x^b dx=\frac{1}{b+1}\Rightarrow I=\ln(b+1)+C$．$b=a$ 时 $I=0\Rightarrow I=\ln\frac{b+1}{a+1}$

定理 18.1.4 设函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，函数 $p(u)$，$q(u)$都在$[\alpha,\beta]$上连续，而且当 $\alpha\le u\le\beta$ 时，$a\le p(u)\le b$，$a\le q(u)\le b$，那么由式(9)所确定的函数 ψ 在$[\alpha,\beta]$上连续． $\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)dx.$

定理 18.1.5 如果函数 f 和$\frac{\partial f}{\partial u}$都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，函数 $p(u)$，$q(u)$都在$[\alpha,\beta]$上可微，而且当 $\alpha\le u\le\beta$ 时，$a\le p(u)\le b$，$a\le q(u)\le b$，那么由式(9)确定的函数 ψ 在$[\alpha,\beta]$上可微，并且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).$$

例：f 为 $\mathbb{R}^2$ 上连续函数．$\varphi(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)ds\right)dt$，求 $\varphi'(x)$

解：设 $G(t,x)=\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)ds\Rightarrow\varphi(x)=\int_0^x G(t,x)dt$．则 $\varphi'(x)=G(x,x)+\int_0^x\frac{\partial G}{\partial x}dt=2x\int_0^x f(t,x^2)dt$

定义 18.2.1 设 D 和 E 是 $\mathbf{R}$ 的子集，u_0(可以是 $+\infty$)是 E 的极限点，$f(x,u)$在 $D\times E$ 上定义，且对任意的 $x\in D$，存在有限的极限：

$$\lim_{u\to u_0}f(x,u)=g(x)\quad(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=g(x)).$$

如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$(或者 $U>0$)，使得当 $u\in E$，$0<|u-u_0|<\delta$(或者 $u\in E$，$u>U$)时，

$$|f(x,u)-g(x)|<\varepsilon$$

对所有的 $x\in D$ 成立，我们就说当 $u\to u_0$(或者 $u\to+\infty$)时，函数 $f(x,u)$对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$．容易看出，如果 $D=[a,b]$，$E=\mathbf{N}^*$，$u_0=+\infty$，那么 $f(x,u)$就可写成 $f_n(x)$，而

$$\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

定理 18.2.1 当 $u\to u_0$ 时(或者 $u\to+\infty$ 时)，函数 $f(x,u)$对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$的充分必要条件是，对 $E\setminus\{u_0\}$中满足条件 $u_n\to u_0$ 的任意序列$\{u_n\}$(或者 E 中满足条件 $u_n\to+\infty$ 的任意序列$\{u_n\}$)，相应的每一函数序列

$$\psi_n(x)=f(x,u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

都在 D 上一致收敛于函数 $g(x)$．

定理 18.2.2 设 $f(x,u)$定义在$[a,b]\times E$ 上，u_0(可以是 $+\infty$)是 E 的一个极限点，并且对每个给定的 $u\in E$，$f(x,u)$是 x 的连续函数．如果当 $u\to u_0$ 时(或者当 $u\to+\infty$ 时)，$f(x,u)$对 $x\in[a,b]$一致收敛于 $g(x)$，那么 $g(x)$在$[a,b]$上连续．

定理 18.2.3 设 $f(x,u)$定义在$[a,b]\times E$ 上，u_0(可以是 $+\infty$)是 E 的一个极限点，并且对每个给定的 $u\in E$，$f(x,u)$在$[a,b]$上可积．如果当 $u\to u_0$ 时(或者当 $u\to+\infty$ 时)，$f(x,u)$对 $x\in[a,b]$一致收敛于 $g(x)$，那么 $g(x)$在$[a,b]$上可积，并且

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b g(x)dx\quad\left(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b g(x)dx\right).$$

对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists A_0=A_0(\varepsilon,u)$. $A>A_0$ 时 $\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$. 则收敛

〃 〃 $A_0=A_0(\varepsilon)$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 一致收敛

定义 18.2.2 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到只与 ε 有关的 $A_0(>a)$，当 $A>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛**.

对瑕积分，也有类似的定义.

定义 18.2.3 设 a 是瑕点. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在只与 ε 有关的 $\delta_0>0$，当 $0<\delta<\delta_0$ 时，不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立，则称积分 $\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛**.

上面两个定义中的 $[\alpha,\beta]$ 可以换成开区间或无穷区间.

记

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|.$$

从定义 18.2.2，可得：

定理 18.2.4 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0.$$

例：讨论积分 $\int_0^{\infty} ue^{-xu}dx$ $(u\geq 0)$ 的一致收敛性.

解：当 $u>0$ 时，令 $xu=t$ 有 $\int_A^{\infty} ue^{-xu}dx=\int_{uA}^{+\infty} e^{-t}dt=e^{-uA}$. $\eta(A)=\sup_{u\in(0,\infty)}\left|\int_A^{\infty} ue^{-xu}dx\right|=1\not\to 0$. 故不一致收敛.

但任取 $\delta>0$. 在 $[\delta,+\infty)$ 上. $\eta(A)=e^{-\delta A}\to 0$ as $A\to\infty$. 知其在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛

定理 18.2.5（Cauchy 收敛原理） 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在只与 ε 有关的 A_0，当 $A',A''>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 都成立.

证明留作练习.

从 Cauchy 收敛原理，立刻可以推出：

定理 18.2.6（Weierstrass 判别法） 设 $f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 F，使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u，都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x),$$

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例：证明积分 $\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,dt$ $(\alpha>0)$ 关于 u 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛.

证明：对 $\forall u\in[0,\infty)$. $|e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t|\leq e^{-\alpha t}$ $t\in[0,\infty)$. 又 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法知一致收敛

关于 t 在 $[\alpha,\infty)$ 上一致收敛

证明：对 $\forall t\in[0,\infty)$. $|e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t|\leq te^{-u^2t}\leq\frac{t}{1+u^2t}\leq\frac{1}{u^2}$ 又 $\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2}du$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法知一致收敛

定理 18.2.7（Dirichlet 判别法） 设 f,g 满足以下两个条件：

(a) 当 $A\to+\infty$ 时，积分 $\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界，即存在常数 M，使得当 A 充分大时，对每个 $u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant M;$$

(b) 对每个固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$g(x,u)$ 是 x 的单调函数，且当 $x\to+\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定理 18.2.8（Abel 判别法） 设 f,g 满足以下两个条件：

(a) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛；

(b) 对每个固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$g(x,u)$ 关于 x 单调，且关于 u 一致有界.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例：讨论积分 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$ 关于 p 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性

解：易已有：在 $[2,\infty)$ 发散. $(0,1)$ 绝对收敛. $[1,2)$ 条件收敛. 下证在 $(0,2-\delta]$ 上一致收敛 $\delta>0$.

令 $t=\frac{1}{x}$. 则为 $\int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt$ 有 $0<p\leq 2-\delta\Rightarrow 2-p\geq\delta$. 则 $\frac{1}{t^{2-p}}\leq\frac{1}{t^{\delta}}$ 则 $\frac{1}{t^{2-p}}$ 一致递减至 0 as $t\to\infty$. 又 $\left|\int_1^A \sin t\,dt\right|\leq 2$.

由 Dirichlet 判别法知其一致收敛

但在 $(0,2)$ 时不一致收敛. 反证：若一致收敛. $\forall\varepsilon>0$. $\exists A_0>0$. $A''>A'>A_0$ 时 $\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt\right|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in(0,2)$ 成立

取 $A'=2k\pi$. $A''=2k\pi+\pi$. k 充分大. 则 $\varepsilon>\left|\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt\right|\geq\frac{2}{(2k\pi+\pi)^{2-p}}$ 令 $p\to 2$ 时 $\varepsilon\geq 2$. 矛盾!

定理 18.2.9 设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛于 g，满足：

(a) 对任意的 $A>a$，$\{f_n\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛；

(b) 积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛. 函数列与积分均一致收敛

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

其实这个定理还可写成更一般的形式.

定理 18.2.10 设 $E\subset\mathbf{R}$，$f(x,u)$ 定义在 $[a,+\infty)\times E$ 上，又设 u_0（可以是 $+\infty$）是 E 的一个极限点，满足：

(a) 对任何 $A>a$，等式

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u)=g(x)$$

在 $[a,A]$ 上一致地成立；

(b) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u\in E$ 一致收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

一致收敛：① Weierstrass $|f(x,u)|\leq h(x)$. $h(x)$ 收敛

② $\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\in D}\int_A^{+\infty} f(x,u)dx=0$

③. D.A.

④ Cauchy 准则

不一致收敛：① Cauchy 准则反证

② 端点发散.

③ $\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\in D}\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\neq 0$

① 端点发散

② 其余处收敛

无法使用此方法时(如代入后发现值为0)

使用下面方法.

例：计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ $(0<p<1)$

解：$x=0$ 为瑕点. 可把积分写成两积分：$\int_0^{\infty}\cdots dx=\left(\int_0^1+\int_1^{\infty}\right)\cdots dx:=I_1+I_2$

1° 对 I_1. 有 $\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}$ 其在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛. 记部分和为 $\{f_n\}$.

则 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 内闭一致收敛①. 由 $0\leq f_n(x)=\frac{x^{p-1}(1-(-1)^n x^n)}{1+x}\leq\frac{2x^{p-1}}{1+x}\leq 2x^{p-1}$.

又 $\int_0^1 x^{p-1}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_0^1 f_n(x)dx$ 关于 n 一致收敛②. 由①+② 用定理知 $I_1=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}$

2° 对 I_2. 令 $t=\frac{1}{x}$. 有 $I_2=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}dt$ 同理于 I_1，有 $I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}$

于是综上. $I=I_1+I_2=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$

$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}}=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$

定理 18.3.1 如果函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，而且积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，那么由式(1) 所确定的函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

例：讨论 $\varphi(u)=\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^u(2+x^2)}dx$ 的连续性区间.

解：在 $x=0$ 附近. $\frac{\arctan x}{x^u(2+x^2)}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{u-1}}$. $u<2$ 时收敛. 当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{\arctan x}{x^u(2+x^2)}\sim\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{u+2}}$ $u>-2$ 时收敛. 则定义域：$(-2,2)$

则只需证 $\varphi(u)$ 在 $(-2,2)$ 上内闭一致收敛. $u\in[a,b]$ 当 $x\in(0,1)$ 时. 设 $a\leq b<2$. $\exists C$. s.t. $\frac{\arctan x}{x^u(2+x^2)}\leq\frac{C}{x^{u-1}}\leq\frac{C}{x^{b-1}}$ 知 $\int_0^1\cdots dx$ 一致.

当 $x\geq 1$ 时. 设 $-2<a\leq u$. 有 $\frac{\arctan x}{x^u(2+x^2)}\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+2}}\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{a+2}}\Rightarrow\int_1^{\infty}\cdots dx$ 一致. 于是全一致收敛. 则在 $(-2,2)$ 上连续.

定理 18.3.2（Dini 定理） 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续、非负. 如果由式(1) 定义的 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

与上一定理 f 的条件区别

一定为有限闭区间

定理 18.3.3 设 $[\alpha,\beta]$ 是一有限区间，那么在定理 18.3.1 的同样条件下，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

也就是说，x 与 u 的积分次序可以交换：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

例：设 $a,b>0$，c 为任意实数. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos cx\,dx$

原式 $=\int_0^{\infty}\left(\int_a^b e^{-ux}\cos cx\,du\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^{\infty}e^{-ux}\cos cx\,dx\right)du=\int_a^b\frac{u}{u^2+c^2}du=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}$

积分换交换的原因：$\int_0^{\infty}e^{-ux}\cos cx\,dx$ 关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛

定理 18.3.4 设 f 满足下列条件：

(a) f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续；

(b) 积分 两收敛，一存在（绝对值）

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别关于 u 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上和关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛；

(c) 积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

中至少有一个存在. 那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

都存在，且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u. \tag{5}$$

定理 18.3.5 设 f 满足下列条件：

(a) f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续、非负；

(b) 函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad\psi(x)=\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别在 $[\alpha,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$ 上连续；

(c) 积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u,\quad\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个收敛.

那么(c)中另一个积分也收敛，而且两者相等，即等式(3)成立.

例：计算积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

解：记为 I. 作 $x=ut$. 有 $I=\int_0^{\infty} ue^{-u^2t^2}dt \Rightarrow I^2=\int_0^{\infty} Ie^{-u^2}du=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} ue^{-u^2t^2}dt\right)e^{-u^2}du=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt\right)du$

$f(t,u)=ue^{-u^2(1+t^2)}$ 在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 是连续非负的. $\varphi(u)=\int_0^{\infty} f(t,u)=e^{-u^2}\int_0^{\infty} e^{-u^2t^2}du\,t=I\cdot e^{-u^2}$ ①

有 $\varphi(0)=0$. 则 $\varphi(u)$ 在 $[\delta,\infty)$ 上是连续函数. ② $\psi(t)=\int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du=\frac{1}{2(1+t^2)}$ 是 $[0,\infty)$ 上连续函数 ③

则由定理知 $\int_\delta^{\infty}\left(\int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt\right)du=\int_0^{\infty}\left(\int_\delta^{\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du\right)dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}dt$

记 $f(\delta,u)=\frac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}$ 在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 连续 (1). 又 $0<f(\delta,u)\leq\frac{1}{1+t^2}\Rightarrow\int_0^{\infty} f(\delta,t)dt$ 关于 δ 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛 (2)

则 $\int_0^{\infty} f(\delta,t)dt$ 在 $\delta=0$ 处连续. 故有 $I^2=\lim\limits_{\delta\to 0}\int_\delta^{\infty}\left(\int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt\right)du=\lim\limits_{\delta\to 0}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$

则有 $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

定理 18.3.6 如果函数 f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且　即求偏导后积分一致收敛

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta).\qquad(12)$$

例：计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$. $(a,b>0)$

解：视 a 为参数，记积分为 $I(a)$. 则 $I'(a)=-\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx$，合理性证明：在 $a\in[\delta,\infty)$ 上 $e^{-ax^2}\leq e^{-\delta x^2}$

由 Weierstrass 判别法知 $I(a)$ 在 $[\delta,\infty)$ 上一致收敛.

由 δ 任意性知 $I'(a)=\int_0^{\infty}-e^{-ax^2}dx$ 在 $(0,\infty)$ 上成立. 故 $I'(a)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\Rightarrow I(a)=-\sqrt{\pi a}+C$. 有 $I(b)=0$

$\Rightarrow I(a)=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

含参变量的反常积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt,$$

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

分别称为 Γ(Gamma)函数和 B(Beta)函数，前者是含一个参变量 s 的函数，后者是

定理 18.4.1 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数.

定理 18.4.2 Γ 函数具有以下三条性质：

(1) 对任意的 $s>0$，$\Gamma(s)>0$，且 $\Gamma(1)=1$；

(2) 对任意的 $s>0$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$；

(3) $\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

定理 18.4.6 对任意的 $p>0$，$q>0$，有

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

定理 18.4.7 (1) $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续且有各阶连续偏导数；

(2) $B(p,q)=B(q,p)$ $(p>0,q>0)$；

(3) $B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q)$ $(p>0,q>0)$.

例：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}x\sin^{\beta}x\,dx$ $(\alpha,\beta>-1)$

令 $t=\sin^2x$，$x=\arcsin\sqrt{t}$ 则 $I=\int_0^1(1-t)^{\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{\beta}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-1}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)$

定理 18.4.8(加倍公式) 对任意的 $s>0$，有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).\qquad(8)$$

定理 18.4.9(余元公式) 对任意的 $p\in(0,1)$，有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.\qquad(10)$$

例：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}dx$ $|\alpha|<1$　　$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\alpha}x\sin^{\alpha}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$

定理 18.4.10(Stirling) 对任意的 $x>0$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{\theta(x)}{12x}}.\qquad(14)$$

推论 18.4.1 对于任意的实数 a，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1.$$

例：计算极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1(1-x^2)^{\alpha}dx$

解：令 $x^2=t$. $I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\alpha+1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}$. 则原式 $=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$　　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a$

教材习题

18.1 2. 利用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$；

$\frac{\partial}{\partial a}I=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\int_0^{\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\cdot\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2t^2+b^2}=\frac{\pi}{|a|+|b|}$

故 $I=\pi\ln(|a|+|b|)+C(b)$. 有 $a=b$ 时为 $\pi\ln|a|\Rightarrow I=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$

3. 证明：对任意的实数 u，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)dx=1.$$

$\frac{\partial}{\partial u}\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)dx=\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x+x)dx=\frac{1}{u}\int_0^{2\pi}d\,e^{u\cos x}\sin(u\sin x)=0$

故 $I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^0\times 1\,dx=1$.

18.2 1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\,dx$，$0<u_0\leqslant u<+\infty$；$\eta(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{u\geq u_0}\left|\int_A^{\infty}e^{-ux}\sin x\,dx\right|=\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{u\geq u_0}\frac{e^{-uA}|u\sin A-\cos A|}{u^2+1}\leq\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{e^{-u_0A}}{\sqrt{u_0^2+1}}=0$. 一致收敛.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}dx$，$-\infty<u<+\infty$；$\left|\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\right|\leq\frac{x^2}{1+x^4}$. 一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+u)^2}$，$0\leqslant u<+\infty$；$\left|\frac{1}{1+(x+u)^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2}$. 一致收敛

(4) $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$，$0\leqslant\alpha<+\infty$；由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛. 又 $e^{-\alpha x}$ 关于 α 一致有界. 单调. 由 Abel 判别法知一致收敛

(5) $\int_0^{+\infty}\sqrt{u}e^{-ux^2}dx$，$0\leqslant u<+\infty$. $\eta(A)=\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\geq 0}\left|\int_A^{\infty}\sqrt{u}e^{-ux^2}dx\right|=\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\geq 0}\left|\int_{\sqrt{u}A}^{\infty}e^{-x^2}dx\right|=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\neq 0$. 不一致收敛.

5. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}dx\quad(a>0)$$

在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

在 $[\delta,+\infty)$ 上. $\left|\int_0^A\cos ux\right|=\left|\frac{\sin uA}{u}\right|\leq\frac{1}{\delta}$ 有界. $\frac{x}{a^2+x^2}$ 在 $x\to\infty$ 时 $\searrow 0$. 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

在 $(0,\infty)$ 上. $\int_0^{\infty}\frac{x}{a^2+x^2}dx=\infty$. $\forall A>0$, $\exists A_1,A_2>A$. s.t. $\int_{A_1}^{A_2}\frac{x}{x^2+a^2}dx>1$. 取 $u=\frac{\pi}{3A_2}$. 则 $\int_{A_1}^{A_2}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}dx\geq\int_{A_1}^{A_2}\frac{x\cos\frac{\pi}{3}}{a^2+x^2}dx>\frac{1}{2}$ 不一致收敛.

18.3 1. 研究下列函数在指定区间上的连续性：

(1) $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}dt$，$x\in(2,+\infty)$；

在 $x\in[a,b]\subset(2,\infty)$ 上. $\left|\frac{t}{2+t^x}\right|\leq\frac{t}{2+t^a}\sim\frac{1}{t^{a-1}}$ 故关于 x 内闭一致收敛. 连续

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin cx\,dx$ $(a>0,b>0,c>0)$.

$\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin cx\,dx$ 由 Weierstrass 判别法知在 $[a,b]$ 关于 y 一致收敛.

原式 $=\int_0^{\infty}\left(\int_a^b e^{-xy}\sin cx\,dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin cx\,dx\right)dy=\int_a^b\frac{c}{y^2+c^2}dy=\arctan\frac{b}{c}-\arctan\frac{a}{c}$

18.4 3. 利用 Γ 函数，计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$；　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$；　(4) $\int_0^{\pi/2}\sin^5x\cos^6x\,dx$.

(1). $I=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{8}$　(4). $I=\frac{1}{2}B\left(3,\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\times\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}=\frac{8}{693}$

(2). $p+q=2$. $q-1=\frac{1}{4}\Rightarrow B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

(3). $I=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{2}{3}}dt}{1+t}=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

5. 计算极限

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{3/2}(1-x^5)^{\alpha}dx.$$

原式 $=\frac{\sqrt{\alpha}}{5}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{5}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}}{5}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+1}}\cdot\frac{\sqrt{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}\to\frac{\sqrt{\pi}}{5}$. as $\alpha\to\infty$.