微分几何题型方法总结

tip：本笔记用于2026年夏令营数院保研考试，总结微分几何问题与方法，加上近年试题。

（至2025年）

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

期中部分

2026.4.17

1. 2025

1. [15 分] 圆滚线是一个单位圆周在一条直线上滚动时，圆周上一个定点的轨迹。其参数表示为$\mathbf{r}(t)=(t-\sin t,1-\cos t)$，$t\in\mathbb{R}$.

(a) 计算圆周滚动一圈时，圆滚线的弧长。

(b) 求圆滚线的Frenet标架和曲率。

—$\mathbb{R}^2$上曲线的最基础问题：$ds=|r'(t)|$，$t=\frac{dr}{ds}=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$，$n=\mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}t$

$\kappa=(\frac{dt}{ds},\vec{n})$

不要忘×$\frac{dt}{ds}$!

解答:

(a) 圆滚线滚动一圈，对应$t\in[0,2\pi]$. $\mathbf{r}(t)$的切向量为$\mathbf{r}'(t)=(1-\cos t,\sin t)$，有模长

$$|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=2\sin\frac{t}{2},\quad t\in[0,2\pi].$$

从而滚动一圈的长度为

$$L=\int_0^{2\pi}|\mathbf{r}'(t)|dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8.$$

(b) 单位切向量为

$$\mathbf{t}=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}(1-\cos t,\sin t)=\left(\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right).$$

单位法向量为

$$\mathbf{n}=\mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}\mathbf{t}=\left(-\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\right).$$

记s为曲线的弧长参数，则$\frac{ds}{dt}=|\mathbf{r}'(t)|$. 曲率为

$$\begin{aligned}\kappa&=\langle\frac{d\mathbf{t}}{ds},\mathbf{n}\rangle=\langle\frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds},\mathbf{n}\rangle\\&=\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\langle\frac{d\mathbf{t}}{dt},\mathbf{n}\rangle\\&=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\langle(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}),(-\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2})\rangle\\&=-\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}.\end{aligned}$$

$\kappa_n(\theta)=(\mathcal{W}(v(\theta)),v(\theta))$

（v为单位向量）

2. [15 分]设曲面S在p点处的主曲率为κ_1,κ_2，对应的主方向为$e_1,e_2\in T_pS$. 记$v(\theta)=\mathrm{rot}_\theta\ e_1\in T_pS$为切平面上将$e_1\in T_pS$逆时针旋转$\theta\in(0,\pi)$角得到的单位切向量，$\kappa_n(\theta)=\kappa_n(v(\theta))$为沿着$v(\theta)\in T_pS$方向的法曲率。

(a) 证明：$\kappa_n(\theta)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta$；

(b) 证明曲面在p点处的平均曲率H满足$H=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\kappa_n(\theta)d\theta$.

—对法曲率κ_n：① $\kappa_n(w)=\frac{\mathrm{II}(w,w)}{\mathrm{I}(w,w)}$，对方向$w=\cos\theta\cdot du+\sin\theta dw$.

$\kappa_n(w)=\frac{L\cos^2\theta+2M\sin\theta\cos\theta+N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta+2F\sin\theta\cos\theta+G\sin^2\theta}$（若$w$单位向量，$\kappa_n(w)=\mathrm{II}(w,w)$）

② $\kappa_n(v)=(\mathcal{W}(v),v)$

③ v与主方向夹角为θ，则$\kappa_n=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta$

解答:

(a) e_1,e_2为主方向，因此满足

$$\mathcal{W}(e_1)=\kappa_1e_1,\quad\mathcal{W}(e_2)=\kappa_2e_2.$$

设$v(\theta)=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta$. 则法曲率为

$$\begin{aligned}\kappa_n(\theta)&=\langle\mathcal{W}(v(\theta)),v(\theta)\rangle\\&=\langle\mathcal{W}(e_1\cos\theta+e_2\sin\theta),e_1\cos\theta+e_2\sin\theta\rangle\\&=\langle\kappa_1e_1\cos\theta+\kappa_2e_2\sin\theta,e_1\cos\theta+e_2\sin\theta\rangle\\&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

$f'^2(u)+g'^2(u)=1$

5. [25 分] 设xz平面上一条正则曲线$C:(f(u),g(u))$以u为弧长参数，$f>0$，将C绕z轴旋转一圈生成旋转曲面S，其参数表示为$\mathbf{r}(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$.

(a) 证明曲面S的主曲率为$\kappa_1=f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)$，$\kappa_2=\frac{g'(u)}{f(u)}$;

(b) 证明若$g'(u)\neq0$，κ_1可简化为$\kappa_1=-\frac{f''(u)}{g'(u)}$;

(c) 证明若S为旋转极小曲面，则S为平面或悬链面（即C为悬链线$x=a\cosh\frac{z}{a},a>0$）.

—注意弧长参数在简化计算中的作用

解答:

(a) 对$\mathbf{r}$求偏导

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u&=(f'\cos v,f'\sin v,g')\\\mathbf{r}_v&=(-f\sin v,f\cos v,0)\\\mathbf{r}_{uu}&=(f''\cos v,f''\sin v,g'')\\\mathbf{r}_{uv}&=(-f'\sin v,f'\cos v,0)\\\mathbf{r}_{vv}&=(-f\cos v,-f\sin v,0).\end{aligned}$$

单位法向量为

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v|}=\frac{(-g'\cos v,-g'\sin v,f')}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}=(-g'\cos v,-g'\sin v,f'),$$

这里用到了$(f')^2+(g')^2=1$，这是因为u为曲线C的弧长参数。由此可计算第一、第二基本形式的系数矩阵为

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&f^2\end{pmatrix},\quad II=\begin{pmatrix}f'g''-f''g'&0\\0&fg'\end{pmatrix}.$$

Weingarten变换的矩阵为

$$W=II\cdot I^{-1}=\begin{pmatrix}f'g''-f''g'&0\\0&\frac{g'}{f}\end{pmatrix}.$$

主曲率为Weingarten变换的特征值，

$$\kappa_1=f'g''-f''g',\quad\kappa_2=\frac{g'}{f}.$$

(b) 若$g'(u)\neq0$，对κ_1可进一步化简：对$(f')^2+(g')^2=1$求导得$f'f''+g'g''=0$，从而

$$\kappa_1=f'g''-f''g'=-f'\frac{f'f''}{g'}-f''g'=-\frac{f''}{g'}((f')^2+(g')^2)=-\frac{f''}{g'}.$$

4. [20 分] 设曲面S有等温参数表示$\mathbf{r}(u,v)$，即第一基本形式满足$E=G$，$F=0$.

对每个分量都要算→

(a) 证明：$\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv}=2EH\mathbf{n}$，其中$\mathbf{n}$为曲面的单位法向量。

(b) 证明悬链面$\mathbf{r}(u,v)=(a\cosh v\cos u,a\cosh v\sin u,av)$，$u\in(0,2\pi),v\in\mathbb{R}$和正螺面$\tilde{\mathbf{r}}(u,v)=(-a\sinh v\sin u,a\sinh v\cos u,-au)$，$u,v\in\mathbb{R}$均为极小曲面。

(c) 证明$\mathbf{r}_u=\tilde{\mathbf{r}}_v$，$\mathbf{r}_v=-\tilde{\mathbf{r}}_u$. 即悬链面和正螺面为共轭极小曲面。

(d) 对任意$t\in\mathbb{R}$，证明$\mathbf{r}^t=(\cos t)\mathbf{r}+(\sin t)\tilde{\mathbf{r}}$为极小曲面，其第一基本形式与$t$无关。

解答:

(a) 由$E=G,F=0$，

$$II\cdot I^{-1}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{E}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$$

平均曲率$H=\frac{1}{2}tr(II\cdot I^{-1})=\frac{L+N}{2E}$. 由此得

$$\langle\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}\rangle=2EH.\qquad(1)$$

不能在此停止，未说明 //

对$E=G,F=0$求偏导，

$$\begin{aligned}E_u=G_u&\Rightarrow2\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{r}_u\rangle=2\langle\mathbf{r}_{vu},\mathbf{r}_v\rangle\\F_v=0&\Rightarrow\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{r}_v\rangle+\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_{vv}\rangle=0.\end{aligned}$$

结合两式得$\langle\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv},\mathbf{r}_u\rangle=0$. 类似可得$\langle\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv},\mathbf{r}_v\rangle=0$. 因此，$\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv}\,//\,\mathbf{n}$. 从而由(1)，

$$\mathbf{r}_{uu}+\mathbf{r}_{vv}=2EH\mathbf{n}.\qquad(2)$$

只需说明与$r_u,r_v\perp$

因为$n\,//\,r_u\wedge r_v$

2. 2024

$$r(u,v)=(f(u),u\cos v,u\sin v).$$

3. (9’) 求 (b) 中正则参数曲面$r(u,v)$的主曲率，Gauss 曲率和平均曲率。

—I，II，K，H，κ_1，κ_2的计算

$r_u=(f_u,\cos v,\sin v)$ $\vec{n}=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\frac{(u,-uf_u\cos v,-uf_u\sin v)}{\sqrt{u^2+u^2f_u^2}}=\frac{(1,-f_u\cos v,-f_u\sin v)}{\sqrt{1+f_u^2}}$

$r_v=(0,-u\sin v,u\cos v)$

$K=\det W=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ $H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(W)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$

则 $E=f_u^2+1$, $F=0$. $G=u^2$. $L=\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2}}$, $M=0$. $N=\frac{uf_u}{\sqrt{1+f_u^2}}$ $\Rightarrow \mathrm{I}=\begin{pmatrix}f_u^2+1 & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix}$ $\mathrm{II}=\begin{pmatrix}\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2}} & 0\\ 0 & \frac{uf_u}{\sqrt{1+f_u^2}}\end{pmatrix}$

$r_{uu}=(f_{uu},0,0)$ $r_{uv}=(0,-\sin v,\cos v)$ $r_{vv}=(0,-u\cos v,-u\sin v)$

则 $W=\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{3/2}} & 0\\ 0 & \frac{f_u}{u\sqrt{1+f_u^2}}\end{pmatrix}\Rightarrow k_1=\frac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{3/2}}$, $k_2=\frac{f_u}{u\sqrt{1+f_u^2}}$, $K=\frac{f_uf_{uu}}{u(1+f_u^2)^2}$, $H=\frac{1}{2}\left(\frac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{3/2}}+\frac{f_u}{u\sqrt{1+f_u^2}}\right)$

练习 6.6(25 分) 设 $M: r=r(u,v),(r,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中没有脐点的正则曲面片. 其第一, 第二基本形式如上题所记. 设其参数化为正交曲率线网, 且 $v-$ 线的主曲率恒为 0.

1. (5') 证明: 光滑向量值函数 $t\mapsto v(t)\in\mathbb{R}^2$ 方向不变, 当且仅当 $v(t)\wedge v'(t)=0$.
2. (5') 计算 Christoffel 符号 Γ_{22}^1 用函数 E,F,G 及其偏导数的表达式.(注意指标定义方式为 $u^1=u,u^2=v$.)
3. (5') 证明:$r_{vv}\wedge r_v=\Gamma_{22}^1 r_u\wedge r_v$.
4. (10') 证明:M 是直纹面.

① 直纹面: $r(u,v)=a(u)+vb(u)$.

Gauss曲率 $K=0$ 时称可展曲面且 $\Leftrightarrow (a',b,b')=0$

② Christoffel 符号: $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}}\right)$

③ 对正交参数系:
$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln E}{\partial u},\quad \Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln E}{\partial v},$$
$$\Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u},$$
$$\Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial v}.$$

$\left(\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\right)$

Gauss: $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$ 且 r_u,r_v 为主方向.

Codazzi: $L_v=HE_v$, $N_u=HG_u$

$L_v=HE_v$

$N_u=HG_u$

④ 自然标架运动方程: $\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^{\alpha}}=r_{\alpha}\\ \frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}r_{\xi}+b_{\alpha\beta}\vec{n}\\ \frac{\partial n}{\partial u^{\alpha}}=-b_{\alpha}^{\beta}r_{\beta}\quad b_{\alpha}^{\beta}=g^{\alpha\xi}b_{\xi\beta}\end{cases}$

$\frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}r_{\xi}+b_{\alpha\beta}\vec{n}$

(b) ~~由定义~~ 因参数化为正交曲率线网, 则 $F=M=0$.

由定义 $\Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}g^{1\alpha}(g_{\alpha2,2}+g_{2\alpha,2}-g_{22,\alpha})$

$=\frac{1}{2}g^{11}(2g_{12,2}-g_{22,1})+\frac{1}{2}g^{12}(g_{22,2})$

因 $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & G\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{E} & 0\\ 0 & \frac{1}{G}\end{pmatrix}$ 知 $g^{11}=\frac{1}{E}$, $g^{12}=0$

$\Rightarrow \Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}\frac{1}{E}(0-G_u)+\cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{G}G_v}=-\frac{G_u}{2E}$.

(c). 由自然标架运动方程知

$r_{vv}=\Gamma_{22}^{\alpha}r_{\alpha}+b_{22}n=\Gamma_{22}^1r_1+\Gamma_{22}^2r_2+b_{22}n$

故 $r_{vv}\wedge r_v=\Gamma_{22}^1 r_u\wedge r_v$.

(d). 我们证明 $\Gamma_{22}^1=0$. 只需 $G_u=0$

由 Codazzi 方程 $N_u=HG_u$ ⟨3⟩

由于 $F=M=0$, 知 r_u,r_v 均为主方向, 其相应主曲率为 $k_1=\frac{L}{E}$, $k_2=\frac{N}{G}$. 由题设 $\frac{N}{G}\equiv0$. 因 $G\neq0$ 知 $N\equiv0$.

代入 Codazzi 方程 ⟨3⟩ 有 $HG_u\equiv0$.

又因 $H=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)=\frac{1}{2}\frac{L}{E}$, 及曲面无脐点, 所以总有 $H\neq0$.

这说明 $G_u\equiv0$. 故而 $\Gamma_{22}^1=0$. 即 $r_{vv}\wedge r_v=0$

由 (a) 知 r_v 方向不变, 故 v-线为直线, M 为直纹面.

3. 2023

4. 判断曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t+\sqrt{3}\sin t,2\cos t,\sqrt{3}t-\sin t)$ 与曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\left(2\cos\frac{t}{2},2\sin\frac{t}{2},-t\right)$ 是否合同, 并证明之.

合同: ① s ② 的 κ,τ 均相同.

合同. ① $\frac{ds}{dt}=\sqrt{(1+\sqrt{3}\cos t)^2+4\sin^2t+3-2\sqrt{3}\cos t+\cos^2t}=2\sqrt{2}$ $t=\frac{\sqrt{2}}{4}s$

则 $\vec{t}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(1+\sqrt{3}\cos t,-2\sin t,\sqrt{3}-\cos t)}{2\sqrt{2}}$

$\dot{t}=\frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(-\sqrt{3}\sin t,-2\cos t,\sin t)}{8}$ 于是 $\kappa=|\dot{t}|=\frac{1}{4}$

$\vec{n}=\frac{(-\sqrt{3}\sin t,-2\cos t,\sin t)}{2}$ $\vec{b}=\vec{t}\wedge\vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\cos t-1,2\sin t,-\cos t-\sqrt{3})$

$\dot{b}=\frac{db}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{8}(-\sqrt{3}\sin t,2\cos t,\sin t)=\frac{\vec{n}}{4}\Rightarrow\tau=-\frac{1}{4}$

② $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2}$ 则 $\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2},-1)$ $\dot{t}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2},0)$ 则 $\kappa=|\dot{t}|=\frac{1}{4}$

$\vec{n}=(-\cos\frac{t}{2},-\sin\frac{t}{2},0)$ $\vec{b}=\vec{t}\wedge\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2},1)$ $\dot{b}=\frac{1}{4}(-\cos\frac{t}{2},-\sin\frac{t}{2},0)=\frac{\vec{n}}{4}\Rightarrow\tau=-\frac{1}{4}$

于是二者 κ,τ 相等, 即合同.

3. 求曲率 $\kappa(s)=\frac{1}{\sqrt{9-s^2}}$ 的平面曲线, 其中 s 是弧长参数.

已知 κ. 求 r.

$\kappa=\frac{d\theta}{ds}$. $\vec{t}=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$

则 r 可求

$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\sqrt{9-s^2}}$ $\theta=\int_0^s\frac{du}{\sqrt{9-u^2}}=\arcsin\frac{s}{3}$ $\vec{t}=(\cos\arcsin\frac{s}{3},\sin\arcsin\frac{s}{3})=\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{9}},\frac{s}{3}\right)$

$r=\left(\int_0^s\sqrt{\cdots}\,du,\frac{s^2}{6}\right)=\left(\frac{3}{2}\arcsin\frac{s}{3}+\frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{9}},\frac{s^2}{6}\right)$

4. 2023(2)

1 (10分). 计算平面曲线 $\mathbf{r}(t)=(a\cos t,b\sin t),a>b>0,$ 的曲率.

$\mathbb{R}^2$ 上曲线曲率有正负 千万不要漏乘 $\frac{dt}{ds}$ 每步都是

$\frac{ds}{dt}=|r'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}$. 则 $\vec{t}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(-a\sin t,b\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}$ 则 $\vec{n}=\mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}\vec{t}=\frac{(-b\cos t,-a\sin t)}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}$

$\dot{t}=\frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(\frac{(-a\cos t,-b\sin t)}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}-\frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t(-a\sin t,b\cos t)}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}=-\frac{ab(b\cos t,a\sin t)}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^2}=\kappa\vec{n}$ 则 $\kappa=\frac{ab}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}$

4 (30分=10+10+10).

(1) 设曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 第一基本形式与第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=Edudu+2Fdudv+Gdvdv,\quad \mathrm{II}=Ldudu+2Mdudv+Ndvdv.$$

推导曲面平均曲率与高斯曲率关于 E,F,G,L,M,N 的表达式.

(2) 计算曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,2v)$ 的平均曲率与高斯曲率.

(3) 判断并证明曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,2v)$ 是否为直纹面? 是否为可展曲面? (不是 $H=0$!!!)

$K=0$ 的直纹面

(1). 有 $I=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ $II=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ 则 $W=II\cdot I^{-1}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G&-F\\-F&E\end{pmatrix}\frac{1}{EG-F^2}=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}LG-MF&ME-LF\\MG-NF&NE-MF\end{pmatrix}$

于是 Gauss 曲率：$K=\det W=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 平均曲率：$H=\frac{1}{2}tr(W)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$

(2) $r_u=(\cos v,\sin v,0)$ $E=1$ $F=0$ $G=u^2+4$ $L=0$. $M=-\frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$ $N=0$.

$r_v=(-u\sin v,u\cos v,2)$ $n=\frac{(2\sin v,-2\cos v,u)}{\sqrt{u^2+4}}$

$r_{uu}=(0,0,0)$ $r_{uv}=(-\sin v,\cos v,0)$ $r_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0)$ 于是 $K=-\frac{4}{(u^2+4)^2}$ $H=0$.

(3). 有 $r(u,v)=a(v)+ub(v)$ 其中 $a(v)=(0,0,2v)$ 于是是直纹面，但 $K\neq0$. 于是不是可展曲面.

$b(v)=(\cos v,\sin v,0)$

5.2020

叙述三维欧氏空间$\mathbb{E}^3$中的曲线上的Frenet标架运动方程，即Frenet公式： —不要忘Frenet标架运动方程是什么.

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}(s)\\\mathbf{n}(s)\\\mathbf{b}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa(s)&0\\-\kappa(s)&0&\tau(s)\\0&-\tau(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}(s)\\\mathbf{n}(s)\\\mathbf{b}(s)\end{pmatrix}$$

[9分] 设S为$\mathbb{E}^3$中一张曲面，参数表示是$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$. 记$E,F,G$为曲面$S$的第一基本形式的系数，$L,M,N$为第二基本形式的系数。

(a) 请写出求曲面S的面积的公式 $Area(S)=\int_D\sqrt{EG-F^2}dudv$.

(b) Gauss曲率$K=$ $\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$.

(c) 当曲面一点$p\in S$处的Gauss曲率K满足 $K(p)<0$ 时，我们称该点为双曲点。

$LN-M^2<0$ 双曲点

>0 椭圆点

$=0$ 平点

6.2017

(2) 给定两个正则曲面片，如果它们之间存在一个可逆映射，使得任意点的高斯曲率在该映射下保持不变。

问：第一基本形式在该映射下是否一定保持不变，并说明理由。 —K只与I有关(Gauss绝妙定理)

但I不由K决定!

不一定，不同的EFG组合可能得到相同的K.

5. (30′) 对参数曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 其中 s 为弧长参数，用 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ 分别表示曲线的曲率和挠率，假定 $\kappa(s)$处处非零，用 $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ 分别表示曲线 C 的单位长主法向量和单位长副法向量。那么方程

$$\boldsymbol{r}(s,\theta)=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\left(\cos\theta\,\boldsymbol{n}(s)+\sin\theta\,\boldsymbol{b}(s)\right),\quad\lambda>0\text{ 充分小},$$

给出了围绕曲线 C 的管状曲面 S.

(1) 求出曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(2) 求出曲面 S 的椭圆点、双曲点和抛物点。

(3) 求出曲面 S 的高斯曲率、平均曲率。

(4) 求出曲面 S 的主曲率以及对应的主方向。

(1) 第一、第二基本形式

步骤1：计算切向量

对参数 s,θ 求偏导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_s&=\dot{\boldsymbol{r}}+\lambda\left(\cos\theta\,\dot{\boldsymbol{n}}+\sin\theta\,\dot{\boldsymbol{b}}\right)\\&=\boldsymbol{t}+\lambda(\cos\theta(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\sin\theta(-\tau\boldsymbol{n}))\\&=(1-\lambda\kappa\cos\theta)\boldsymbol{t}-\lambda\tau\sin\theta\,\boldsymbol{n}+\lambda\tau\cos\theta\,\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\lambda(-\sin\theta\,\boldsymbol{n}+\cos\theta\,\boldsymbol{b}).$$

步骤2：第一基本形式系数

利用标准正交基 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 的内积性质，计算：

$$E=\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_s=(1-\lambda\kappa\cos\theta)^2+\lambda^2\tau^2,$$
$$F=\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_\theta=\lambda^2\tau,$$
$$G=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=\lambda^2.$$

第一基本形式：

$$I=E\,ds^2+2F\,dsd\theta+G\,d\theta^2$$

即：

$$I=\left[(1-\lambda\kappa\cos\theta)^2+\lambda^2\tau^2\right]ds^2+2\lambda^2\tau\,dsd\theta+\lambda^2\,d\theta^2.$$

步骤3：单位法向量

先计算叉乘：

$$\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_\theta=-\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)(\cos\theta\,\boldsymbol{n}+\sin\theta\,\boldsymbol{b}),$$

其模长为 $|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_\theta|=\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)$ (因 λ 充分小，$1-\lambda\kappa\cos\theta>0$)，故单位法向量：

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_\theta}{|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_\theta|}=-(\cos\theta\,\boldsymbol{n}+\sin\theta\,\boldsymbol{b}).$$

步骤4：第二基本形式系数

分别求二阶偏导并与 $\boldsymbol{N}$ 点积：

1. $\boldsymbol{r}_{ss}\cdot\boldsymbol{N}$：展开后抵消交叉项，得
   $L=-\kappa\cos\theta+\lambda\left(\kappa^2\cos^2\theta+\tau^2\right)$.

2. $\boldsymbol{r}_{s\theta}\cdot\boldsymbol{N}$：直接计算得
   $M=\lambda\tau$.

3. $\boldsymbol{r}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{N}$：直接计算得
   $N'=\lambda$.

第二基本形式：

$$II=L\,ds^2+2M\,dsd\theta+N'\,d\theta^2$$

即：

$$II=\left[-\kappa\cos\theta+\lambda\left(\kappa^2\cos^2\theta+\tau^2\right)\right]ds^2+2\lambda\tau\,dsd\theta+\lambda\,d\theta^2.$$

(2) 椭圆点、双曲点、抛物点

高斯曲率公式：$K=\frac{LN'-M^2}{EG-F^2}$，先化简分母和分子：

- 分母：$EG-F^2=\lambda^2(1-\lambda\kappa\cos\theta)^2>0$ (恒正)，
- 分子：$LN'-M^2=-\lambda\kappa\cos\theta(1-\lambda\kappa\cos\theta)$。

因此高斯曲率：

$$K=\frac{-\kappa\cos\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)}.$$

分母恒正，故 K 的符号由 $-\kappa\cos\theta$ 决定 ($\kappa\neq0$)：

1. 椭圆点：$K>0\iff\kappa\cos\theta<0$，即当 $\kappa>0$ 时 $\cos\theta<0$，当 $\kappa<0$ 时 $\cos\theta>0$；
2. 双曲点：$K<0\iff\kappa\cos\theta>0$，即当 $\kappa>0$ 时 $\cos\theta>0$，当 $\kappa<0$ 时 $\cos\theta<0$；
3. 抛物点：$K=0\iff\cos\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$。

(3) 高斯曲率与平均曲率

高斯曲率

由上述推导，直接得：

$$K=\frac{-\kappa\cos\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)}.$$

平均曲率

平均曲率公式：$H=\frac{EN'-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$，代入系数并化简：

- 分子：$EN'-2FM+GL=\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)(1-2\lambda\kappa\cos\theta)$，
- 分母：$2(EG-F^2)=2\lambda^2(1-\lambda\kappa\cos\theta)^2$。

约分得：

$$H=\frac{1-2\lambda\kappa\cos\theta}{2\lambda(1-\lambda\kappa\cos\theta)}.$$

(4) 主曲率与主方向

主曲率满足特征方程 $k^2-2Hk+K=0$，代入 H,K 并化简： $K=H\pm\sqrt{H^2-K}$

$$H^2-K=\frac{1}{4\lambda^2(1-\lambda\kappa\cos\theta)^2},$$

故主曲率为：

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K}=\frac{1}{\lambda},\quad k_2=H-\sqrt{H^2-K}=\frac{-\kappa\cos\theta}{1-\lambda\kappa\cos\theta}.$$

主方向：$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0$

主方向求解

主方向满足 $(L-kE)ds+(M-kF)d\theta=0$： 除dv^2后为一元二次方程

(tip: 没学过)

1. 对应 $k_1=\frac{1}{\lambda}$：

   代入得 $M-k_1F=0$，且 $L-k_1E=\kappa\cos\theta-\frac{1}{\lambda}\neq0$，故方程要求 $ds=0$，主方向为** θ -曲线方向**(即切向量 $\boldsymbol{r}_\theta$ 的方向)。

2. 对应 $k_2=\frac{-\kappa\cos\theta}{1-\lambda\kappa\cos\theta}$：

主方向满足 $(L-kE)ds+(M-kF)d\theta=0$：

1. 对应 $k_1=\frac{1}{\lambda}$：

   代入得 $M-k_1F=0$，且 $L-k_1E=\kappa\cos\theta-\frac{1}{\lambda}\neq0$，故方程要求 $ds=0$，主方向为** θ -曲线方向**(即切向量 $\boldsymbol{r}_\theta$ 的方向)。

2. 对应 $k_2=\frac{-\kappa\cos\theta}{1-\lambda\kappa\cos\theta}$：

   - 若 $\tau\neq0$，方程化简为 $\tau ds+d\theta=0$，主方向为切向量 $\boldsymbol{r}_s-\tau\boldsymbol{r}_\theta$ 的方向；
   - 若 $\tau=0$ (平面曲线)，参数网为正交网，主方向为** s -曲线方向**(即切向量 $\boldsymbol{r}_s$ 的方向)。

期末部分

2026.4.17

1.2018

1. (20′) 设 $a>0,b\neq0$ 为常数。考查曲面片

$$r=r(u,v)=(a\cos u,\ a\sin u,\ bv),$$
$$0<u<2\pi,\ -\infty<v<+\infty,$$

上的曲线

$$\gamma(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ 0<t<2\pi.$$

(1) 求曲线 γ 的曲率和挠率。

(2) 设$t_0\in(0,2\pi)$. 求曲面在 $\gamma(t_0)$ 处沿切向量 $\gamma'(t_0)$ 的法曲率。

(3) 判断曲线 γ 是否为曲面上的测地线并说明理由。 测地线：主法向量与曲面法向量平行.

(1). $\frac{ds}{dt}=|\gamma'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$. $\vec{t}=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\vec{t}'=\frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(-a\cos t,-a\sin t,0)}{a^2+b^2}$, $\kappa=|\vec{t}'|=\frac{a}{a^2+b^2}$

$\vec{n}=\frac{t'}{|t'|}=(-\cos t,-\sin t,0)$

$\vec{b}=\vec{t}\wedge\vec{n}=\frac{(b\sin t,-b\cos t,a)}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\vec{b}'=\frac{d\vec{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(b\cos t, b\sin t, 0)}{a^2+b^2}=-\tau\vec{n}\Rightarrow\tau=\frac{b}{a^2+b^2}$

(2) 对曲面法向. $r_u=(-a\sin u, a\cos u, 0)$ $\vec{N}=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=(\cos u,\sin u,0)$ 有 $\kappa_n=\kappa\cdot\langle\vec{n},\vec{N}\rangle=-\kappa\cos(u-t)$

$r_v=(0,0,b)$.

又切向量为 $\gamma'(t_0)$. 即 $u=v=t\Rightarrow\kappa_n=-\kappa=-\frac{a}{a^2+b^2}$

(3). $\vec{n}\parallel\vec{N}$, 是测地线.

2.2019

一. 设 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲面。已知其第一基本形式为

$$ds^2 = du\,du + (u-v)^2\,dv\,dv.$$

这里, $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,|\,u>v\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个区域。求 S 的高斯曲率。(5分)

对 $I=d\rho d\rho+Gd\theta d\theta$. 有 $K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$

对 $I=\begin{pmatrix}E&0\\0&G\end{pmatrix}$. 有 $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$

$E=1$. $G=(u-v)^2$. $K=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}=-\frac{0}{u-v}=0$. 或 $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)=0$ $K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$

3.2023

一、【14分】设曲面S : $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本形式为 $\mathrm{I}=Edudu+2Fdudv+Gdvdv$, 求Christoffel符号 Γ_{12}^2.

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right)$

有 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right)$ 则 $\Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)=\frac{1}{2}g^{21}\cdot\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}+\frac{1}{2}g^{22}\cdot\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$

$(g^{\alpha\beta})=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G&-F\\-F&E\end{pmatrix}$ 代入有 $\Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-F\cdot E_v}{2(EG-F^2)}$

三、【18分】是否存在曲面分别以如下ϕ_1,ϕ_2为第一、第二基本形式? 说明理由.

(1) $\phi_1=dudu+dvdv$, $\phi_2=dudu+3dvdv$;

(2) $\phi_1=dudu+dvdv$, $\phi_2=-dudu$;

(3) $\phi_1=4\cos^2 v\,dudu+dvdv$, $\phi_2=dudu+4\cos^2 v\,dvdv$, $(\cos v>0)$.

Gauss: $K=\frac{LN-M^2}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$ 且 r_u, r_v 为主方向.

Codazzi: $L_v=HE_v$. $N_u=HG_u$

(1) $E=1$. $G=1$. $L=1$. $N=3$. Gauss: $0=3$ × 不存在.

(2). $E=1$ $G=1$ $L=-1$ $N=0$. Gauss: $0=0$ ✓ Codazzi: $0=0$ 存在

(3). $E=4\cos^2 v$ $G=1$. $L=1$. $N=4\cos^2 v$. Gauss: $-\frac{1}{2\cos v}(-2\cos v)=1=\frac{LN-M^2}{EG}$ ✓ Codazzi: $-4\cos^2 v\cdot(-2\sin v)\neq 0$. 不存在

(1). Gauss: $3=0$ ×

(2). Gauss: $0=0$ ✓ Codazzi: $0=0$, $0=0$ ✓

(3). Gauss: $1=-\frac{1}{2\cos v}(-2\cos v+0)$ ✓

H: $\frac{LG-2MF+EN}{}=1+16\cos^2 v\neq 0$

Codazzi: $0=-8H\sin v$ 不成立

$0=0$.

五、【10分】判断曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\log u)$与 $\tilde{\boldsymbol{r}}(x,y)=(x\cos y,x\sin y,y)$是否等距，并证明之.

$K=0$ 与 $K\neq 0$. 不等距.

曲面等距 ⇒ K相等.

不等距 ⇐ K不等

or: I在同参数域下相等 可等距 $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=J_\sigma\begin{pmatrix}\tilde{E}&\tilde{F}\\\tilde{F}&\tilde{G}\end{pmatrix}J_\sigma^T$ $J_\sigma=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}&\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\\\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}$

曲面共形: $\tilde{I}=\lambda^2 I$ (保角)

七、【10分】求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$上的测地线.

测地线: $\frac{d\theta}{ds}$ 求出.

$\frac{du}{ds}$ 与 $\frac{dv}{ds}$ 后为 $\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{dv}{d\theta}$

$\Rightarrow\frac{dv}{du}$ 知.

$r_u=(\cos v,\sin v,0)$ $r_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$ $E=1$. $F=0$. $G=1+u^2$

Liouville公式: $\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta=\frac{d\theta}{ds}+\frac{u}{1+u^2}\sin\theta=0$ 则 $\frac{d\theta}{ds}=-\frac{u}{1+u^2}\sin\theta$. $\frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}=\cos\theta$. $\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+u^2}}$

Liouville公式: $\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{\sqrt{E}}\sin\theta$. θ为t与u-线夹角.

$\frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}$. $\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$

则 $\frac{du}{d\theta}=-\frac{1+u^2}{u\tan\theta}\Rightarrow\sin\theta=\frac{C_0}{1+u^2}$. $\tan\theta=\frac{C_0}{\sqrt{(1+u^2)^2-C_0^2}}$ $\frac{dv}{du}=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{C_0}{\sqrt{(1+u^2)^2-C_0^2}}$

4.2025

四、【10 分】设曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}(u,v)$ 和 $\tilde{\Sigma}:\tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{u},\tilde{v})$ 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=dudu+(1+u^2)dvdv,\qquad\tilde{\mathrm{I}}=\frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2-1}d\tilde{u}d\tilde{u}+\tilde{u}^2d\tilde{v}d\tilde{v},\quad\tilde{u}>1.$$

(1) 求 $\{\boldsymbol{r}(u,v)|u>0\}$ 和 $\tilde{\Sigma}$ 之间的一个等距变换 $(\tilde{u},\tilde{v})=(\tilde{u}(u),\tilde{v}(v))$.

(2) 求 $f(x)$ 使得 $(u,v)=(f(x),y)$ 为 Σ 和 xy 平面之间的一个保角变换.

(1). 设变换为 $\tilde{u}=\tilde{u}(u)$. $\tilde{v}=\tilde{v}(v)$. $d\tilde{u}=\tilde{u}'(u)du$ $d\tilde{v}=\tilde{v}'(v)dv$

则 $\tilde{I}=\frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2-1}\tilde{u}'^2du^2+\tilde{u}^2\tilde{v}'^2dv^2\Rightarrow\begin{cases}\frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2-1}\tilde{u}'^2=1\Rightarrow u=\sqrt{\tilde{u}^2-1}+C & \text{可取一解为 }\tilde{u}=\sqrt{u^2+1}\\ \tilde{u}^2\tilde{v}'^2=1+u^2\to\tilde{v}'^2=1 & \text{取正. 可取一解为 }\tilde{v}=v\end{cases}$ 得一等距变换为 $(\tilde{u},\tilde{v})=(\sqrt{u^2+1},v)$

(2). 代入. $I=(f'(x))^2dx^2+(1+f(x)^2)dy^2$

保角: 与平面 $I=dx^2+dy^2$ 成比例. 即 $f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$. $f(x)=\sinh x$