第一章 欧氏空间

$u\wedge(v\wedge w)=\langle u,w\rangle v-\langle u,v\rangle w$

Lagrange恒等式：$\langle v_1\wedge v_2, v_3\wedge v_4\rangle=\langle v_1,v_3\rangle\langle v_2,v_4\rangle-\langle v_1,v_4\rangle\langle v_2,v_3\rangle$

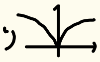
外积无结合律：$u\wedge(v\wedge w)\neq(u\wedge v)\wedge w$

$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$，$\operatorname{div} f=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$\Delta f=\operatorname{div}(\nabla f)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，$\operatorname{rot} f=\nabla\wedge f$ （若 $f=(P,Q,R)$，$\operatorname{rot} f=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$）

有梯度的旋度为0，旋度的散度为0 （$\operatorname{rot}(\nabla f)=\operatorname{div}(\operatorname{rot} f)=0$）

第二章 曲线

定义：光滑参数曲线 $\gamma(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 有 $x_i(t)\in C^\infty$ 光滑参数曲线的像不一定光滑，如 $\gamma(t)=(t^3,t^2)$



定义 1.1 曲线 $\boldsymbol{r}:(a,b)\to E^2\ (E^3)$ 称为正则曲线，是指
(1) 曲线的每一个分量都是 C^∞ 函数;
(2) $\left|\frac{dr}{dt}\right|>0,\ \forall t\in(a,b)$ 成立.

记作正则：$|r'(t)|\neq 0$
分量光滑

E^2：$\kappa(t)=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

E^3：$\kappa(t)=\frac{|r'\wedge r''|}{|r'|^3}$　$\tau(t)=\frac{(r',r'',r''')}{|r'\wedge r''|^2}$

曲线的弧长：$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\gamma'(s)|\,ds$

平面：

定义：弧长参数，有 $\frac{d}{dt}s(t)=|\gamma'(t)|>0\Longrightarrow t=t(s)$

对 $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to E^3$，$\gamma(s)=(x_1(t(s)),x_2(t(s)),x_3(t(s)))$，$\frac{d}{ds}\gamma(s)=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\Rightarrow\left|\frac{d}{ds}\gamma(s)\right|=1$

定义：一般地，沿曲线 $r(s)$ 有单位切向量 $t(s)$ 与单位法向量 $n(s)$，$\{r(s);t(s),n(s)\}$ 是一个以 $r(s)$ 为原点的正交标架，称为沿曲线 r 的 Frenet 标架

（$\vec n$ 为 $\vec t$ 逆时针转 90° 得到）

定义：$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}t(s)\\ n(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa(s)\\-\kappa(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t(s)\\ n(s)\end{pmatrix}$ 中确定的 $\kappa(s)$ 称为曲线 $r(s)$ 的曲率 （$\frac{d\vec t}{ds}=\kappa(s)\cdot\vec n(s)$）

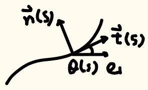
平面：$\langle \dot t, n\rangle$ 有正负.

$\kappa(s)=\langle\dot t(s),n(s)\rangle=\det(r'(s),r''(s))$

$\vec t=\frac{dr}{ds}$.

例：$\kappa(s)=0\Rightarrow\dot t(s)=0\Rightarrow\ddot r(s)=0$，$r$ 为直线.

已知 κ：



设 $t(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$，则 $\vec n(s)=(-\sin\theta(s),\cos\theta(s))$ 则 $\kappa(s)=\langle\dot t(s),n(s)\rangle=\frac{d}{ds}\theta(s)$

例：$r(s)$ 的 $\kappa(s)=c>0$，$r(s)=?$

$c=\frac{d}{ds}\theta(s)\Rightarrow\theta(s)=cs+\theta_0\Rightarrow t(s)=(\cos(cs+\theta_0),\sin(cs+\theta_0))$

又 $\frac{d}{ds}\gamma=t\Rightarrow\gamma(s)=\int t(s)=\left(\frac{1}{c}\sin(cs+\theta_0),-\frac{1}{c}\cos(cs+\theta_0)\right)$ 即 $r(s)$ 为 $r=\frac{1}{c}$ 的圆

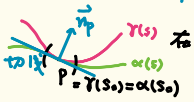
$\kappa(s)=\langle\frac{d\vec t}{ds},\vec n\rangle=\left|\frac{d\vec t}{ds}\right|$

求 $\kappa(s)$：$\gamma(t)=(t,f(t))$ 有 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+f'(t)^2}$ 则 $\vec t=\frac{d}{ds}\vec\gamma=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{(1,f'(t))}{\sqrt{1+f'(t)^2}}$　$\vec n=\frac{(-f'(t),1)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}$

$\gamma\to t\to\frac{dt}{ds}\to\kappa=\langle\dot t,n\rangle$；$n\to\kappa$

于是 $\kappa(s)=\langle\frac{d\vec t(s)}{ds},\vec n(s)\rangle=\frac{1}{|r'(t)|}\langle\frac{d\vec t}{dt},\vec n(s)\rangle=\langle\frac{(0,f''(t))}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}-\frac{(1,f'(t))}{1+f'(t)^2}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+f'(t)^2}\right),\frac{(-f'(t),1)}{\sqrt{1+f'(t)^2}}\rangle=\frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{3/2}}$

例：$\gamma(s),\alpha(s): I\to E^2$



在 P 附近，$\gamma(s)$ 在 $\alpha(s)$ 上，直观上 $\kappa_\gamma(s_0)>\kappa_\alpha(s_0)$

定义 $f(s)=\langle\gamma(s)-\alpha(s),\vec n(p)\rangle$　$f(s)\geq 0$ 在 s_0 附近 且 $f(s_0)=0$.

$f'(s)=\langle\vec t_\gamma(s)-\vec t_\alpha(s),\vec n(p)\rangle$

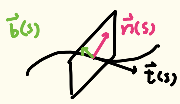
展开：$f(s)=f(s_0)+f'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}f''(s_0)(s-s_0)^2+o((s-s_0)^2)$

$f''(s)=\langle\kappa_\gamma(s)\vec n_\gamma(s)-\kappa_\alpha(s)\vec n_\alpha(s),\vec n(p)\rangle$

$=\frac{1}{2}(\kappa_\gamma(s_0)-\kappa_\alpha(s_0))(s-s_0)^2+o((s-s_0)^2)\Rightarrow\kappa_\gamma(s_0)\geq\kappa_\alpha(s_0)$

空间：$r(t):\gamma\to E^3$. 正则：$|\gamma'(t)|>0$. 弧长：$s(t)=\int_{t_0}^{t}|r'(u)|\,du$. $\frac{ds}{dt}=|r'(t)|>0$. r 用 s 参数化：$\vec t(s)=\frac{d\gamma}{ds}=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ （$|t|=1$）

对 $|t(s)|=1$ 求导：$\langle\frac{d}{ds}\vec t(s),\vec t(s)\rangle=0$. 即 $\frac{d\vec t}{ds}$ 与 t 垂直，为法向量. 若 $\dot t(s)\neq 0$，记 $\kappa(s)=|\dot t(s)|$ 为曲率. 有主法向量：$\vec n=\frac{\dot{\vec t}(s)}{\kappa(s)}$ （$|\vec n|=1$）



取 $\vec b(s)=\vec t(s)\wedge\vec n(s)$，称 $\vec b(s)$ 为副法向量　密切平面：与 $\vec b(s)$ 垂直，从切平面：与 $\vec n(s)$ 垂直.

tip：① 若 $\kappa(s)\equiv 0$ 在某点附近 则该点附近为直线.

② 若 $\kappa(s)$ 在 s_0 处为孤立零点.（即 $\kappa(s_0)=0$，且 $\kappa(s)\neq 0$ on $s\neq s_0$）则 $\vec n(s)$ 在 $s\neq s_0$ 处可定义，若 $\lim_{s\to s_0}\vec n(s)$ 存在，可定义 $\vec n(s_0)$

对 $b(s)$ 求导：$\dot{\vec b}(s)=\dot t(s)\wedge n(s)+t(s)\wedge\dot n(s)\Rightarrow\langle\dot b(s),b(s)\rangle=0$ 于是 $\dot b(s)\parallel\vec n(s)$.

定义：$\tau(s)$ 为挠率. $\dot b(s)=-\tau(s)\vec n(s)$

对主法向量 $\vec n(s)$. $|\vec n(s)|=1\xRightarrow{\text{导}}\langle\dot{\vec n}(s),n(s)\rangle=0$

$\langle\vec n(s),\vec t(s)\rangle=0\xRightarrow{\text{导}}\langle\dot n,t\rangle+\langle n,\dot t\rangle=0$ 即 $\langle\dot n,t\rangle=-\kappa$

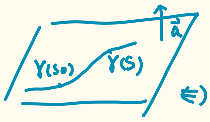
$\langle\vec n(s),\vec b(s)\rangle=0\xRightarrow{\text{导}}\langle\dot n,b\rangle+\langle n,\dot b\rangle=0$ 即 $\langle\dot n,b\rangle=\tau$

于是有 $\dot{\vec n}(s)=-\kappa(s)\vec t(s)+\tau(s)\vec b(s)$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}t\\ n\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ n\\ b\end{pmatrix}$$

定理：设曲线曲率 $\kappa(s)>0$，则落在平面上 $\Leftrightarrow\tau(s)\equiv 0$.

$\Rightarrow)$ $\langle \gamma(s)-\gamma(s_0),\vec a\rangle=0 \overset{求导}{\Rightarrow} \langle t(s),\vec a\rangle=0 \overset{求导}{\Rightarrow} \langle \kappa(s)\vec n(s),\vec a\rangle=0 \overset{求导}{\Rightarrow} \langle \dot\kappa(s)\vec n(s)+\kappa(s)\dot{\vec n}(s),\vec a\rangle=\langle \cancel{\dot\kappa(s)\vec n(s)}+\kappa(s)(\cancel{-\kappa(s)\vec t(s)}+\tau(s)b(s)),\vec a\rangle=0$



即 $\underbrace{\kappa(s)}_{\neq 0}\tau(s)\underbrace{\langle \vec b(s),\vec a\rangle}_{\neq 0}=0 \Rightarrow \tau(s)=0$.

$\Leftarrow)$ $\tau(s)=0 \Rightarrow \dot b(s)=0 \Rightarrow \vec b(s)=\vec b_0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\vec b_0\rangle=\langle t(s),b(s)\rangle=0$. 即 $\langle\gamma(s),\vec b_0\rangle=C \Rightarrow \langle\gamma(s)-\gamma(s_0),\vec b_0\rangle=0$. 证毕

反例($\kappa=0$定理不成立,非平面曲线): $\gamma(t)=\begin{cases}(e^{-\frac{1}{t^2}},t,0) & t<0\\ (0,0,0) & t=0\\ (0,t,e^{-\frac{1}{t^2}}) & t>0.\end{cases}$

计算 $\kappa(s),\tau(s)$:

① 圆柱螺线 $\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$

若 $b=0$. 为圆

若 $b\neq0$. $r'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$ $s=\int_0^t|r'(u)|du=\sqrt{a^2+b^2}\,t$ $(c:=\sqrt{a^2+b^2})$ 则 $s=ct$

于是 $\gamma(s)=(a\cos\frac{s}{c},a\sin\frac{s}{c},b\frac{s}{c}) \Rightarrow \vec t(s)=\dot r(s)=(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\frac{b}{c})$ $\dot t(s)=(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},-\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},0)$

则 $\kappa(s)=|\dot{\vec t}(s)|=\frac{a}{c^2}$ $\vec n(s)=\frac{\dot{\vec t}(s)}{\kappa(s)}=(-\cos\frac{s}{c},-\sin\frac{s}{c},0)$

$\vec b(s)=\vec t\wedge\vec n=(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},-\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\frac{a}{c})$ $\dot{\vec b}(s)=(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},0)=-\frac{b}{c^2}\vec n(s)$ 则 $\tau(s)=\frac{b}{c^2}$

② 一般正则曲线 $r(t)\subset E^3$ 的 κ 和 τ.

$|r'(t)|>0 \Rightarrow$ 可化为弧长参数 $r(s)$. $\frac{ds}{dt}=|\dot r(t)|>0 \Rightarrow \vec t(s)=\dot r(s)=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$

$\dot{\vec t}(s)=\frac{d\vec t}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|r'|}(\frac{r''}{|r'|}-\frac{r'}{|r'|^2}\frac{d}{dt}|r'|)$

由 $\dot{\vec t}=\kappa\vec n \Rightarrow \kappa\cdot\vec t\wedge\vec n=\vec t\wedge\dot{\vec t}=\frac{r'(t)\wedge r''(t)}{|r'(t)|^3}$ 即 $\kappa(s)=\frac{|r'(t)\wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}$, $\vec b=\vec t\wedge\vec n=\frac{r'(t)\wedge r''(t)}{|r'(t)\wedge r''(t)|}$

由 $\dot{\vec b}=-\tau\vec n \Rightarrow \tau=-\langle\dot{\vec b},\vec n\rangle$, $\vec n=\frac{\dot{\vec t}}{\kappa}=\frac{|r'|^2}{|r'\wedge r''|}(\frac{r''}{|r'|}-\frac{r'}{|r'|^2}\frac{d}{dt}|r'|)$

$\dot{\vec b}=\frac{d\vec b}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|r'|}\frac{d}{dt}\vec b=\frac{1}{|r'|}\cdot(\frac{r'\wedge r'''}{|r'\wedge r''|}-\frac{r'\wedge r''}{|r'\wedge r''|^2}\cdot\frac{d}{dt}|r'\wedge r''|)$ 即 $\tau=-\langle\dot{\vec b},\vec n\rangle=\frac{(r',r'',r''')}{|r'\wedge r''|^2}$

例: 球面曲线: $r(s)$ 为正则曲线, $\kappa(s)>0$, $\dot\kappa(s)\neq0$. $\tau(s)\neq0$. $\forall s\in I$, 则 $\gamma(s)$ 落在球面上 $\Leftrightarrow (\frac{1}{\kappa(s)})^2+(\frac{1}{\tau(s)}\cdot\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa(s)}))^2=\text{const}$

$\Rightarrow)$ $\gamma(s)$ 落在 P_0 为圆心, 半径为 R 的球面上: $|\gamma(s)-P_0|^2=R^2$ $\forall s\in I \overset{求导}{\Rightarrow} \langle\vec t(s),\vec r(s)-P_0\rangle=0$ ① $\overset{求导}{\Rightarrow} \langle\kappa(s)\vec n(s),\vec r(s)-P_0\rangle+1=0$ ②

$\overset{求导}{\Rightarrow} \dot\kappa(s)\langle r(s)-P_0,\vec n(s)\rangle+\langle r(s)-P_0,\tau(s)b(s)\rangle=0 \Rightarrow \langle r(s)-P_0,\vec b(s)\rangle=\frac{\dot\kappa(s)}{\kappa^2(s)\cdot\tau(s)}$ ③ 则 $r(s)-P_0=-\frac{1}{\kappa(s)}\vec n(s)+\frac{\dot\kappa(s)}{\kappa^2(s)\cdot\tau(s)}\vec b(s)$ 即有 $(\frac{1}{\kappa(s)})^2+(\frac{1}{\tau(s)}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa(s)}))^2=R^2$ 证毕

$\Leftarrow)$ 由上一步证明. 可定义 $p(s)=r(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\vec n(s)-\frac{\dot\kappa(s)}{\kappa^2(s)\cdot\tau(s)}\vec b(s)$. 只需证 $p(s)\equiv P_0$ $s\in I$. 求导后为0. 证毕

第三章 曲面

1. 曲面的概念

与第二章曲线的定义同样, 从平面区域 $D=\{(u,v)\}$ 到 E^3 的映射

$$\boldsymbol r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

满足

(1) 每个分量函数是无限阶连续可微的;

(2) 向量 $\boldsymbol r_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ 与 $\boldsymbol r_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$ 线性无关, 即

$$\boldsymbol r_u\wedge\boldsymbol r_v\neq\boldsymbol 0 \quad (1.1)$$

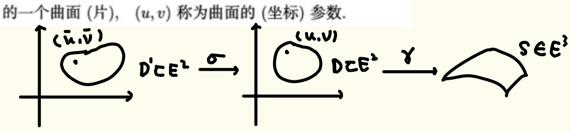
$\longrightarrow$ 即 $\forall q\in D$. $dr|_q:\mathbb R^2\to\mathbb R^3$ 单射

时, 我们称 $\boldsymbol r$ 是 E^3 的一个曲面 (片), (u,v) 称为曲面的 (坐标) 参数.

正则: $r_u\wedge r_v\neq0$.

保证对 $\forall\in S$ 可定义切平面, 避免尖点 (正则曲面)

参数变换:



① σ 是双射 ② Jacobi $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar u,\bar v)}\neq0$. 则有 $\gamma\circ\sigma(\bar D)=S$.

函数图像: $f:\mathbb R^2\to\mathbb R$ 则 $r(x,y)=(x,y,f(x,y))$ 的像为曲面. 有 $r_x=(1,0,f_x)$ 则 $r_x\wedge r_y\neq0$.
$r_y=(0,1,f_y)$

性质: 正则参数曲面都可表示为光滑曲面的图像

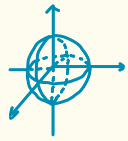
函数等值面(水平集): $F:V\subset\mathbb R^2\to\mathbb R^3$ C^∞ $a\in\mathbb R$. 记 $S_a=\{p\in V\mid F(p)=a\}$ 若 $DF|_p\neq0$ $\forall p\in S_a$ 则称 $a\in\mathbb R$ 为 F 的正则值,

此时 S_a 为正则曲面. 例: 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 为 $\{F(x,y,z)=a^2\}$ $F=x^2+y^2+z^2$

例: 1. 球面 $S=\{x^2+y^2+z^2=a^2\}$

旋转曲面: $(f(v)\cos u,f(v)\sin u,g(v))$

环面: $f(v)=a+b\cos v$
$g(v)=b\sin v$



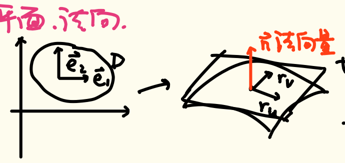
$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$

则 $r(x,y)=(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})$ 上半球面

$\gamma(x,y)=(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})$ 下半球面.

切平面. 法向.

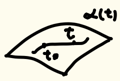
单位法向: $\vec n=\frac{DF}{|DF|}$ 切向: $(x'(t),y'(t),z'(t))$



切平面. $T_{p_0}S:=\text{span}\{r_u,r_v\}$, 即 $\forall x\in T_{p_0}S$. $x=\lambda r_u+\mu r_v$.

$T_{p_0}S=$ 曲面上过 P_0 点的正则曲线在 p_0 处切向量的全体

第一基本形：



$\alpha(t)=r(u(t),v(t))\subset S\subset E^3$ 为正则曲线.

$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\alpha'(\tau)|d\tau$　$\alpha'(t)=r_u\cdot u'(t)+r_v\cdot v'(t)$ $\Rightarrow |\alpha'(t)|^2=E\cdot(\frac{du}{dt})^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G(\frac{dv}{dt})^2$ 即 $\underbrace{ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}_{:=\mathrm{I}}$

注：有 $\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}>0$.　对 $\forall\vec{v}=\lambda r_u+\mu r_v\in T_pS\subset E^3$. $|\vec{v}|^2=\lambda^2\langle r_u,r_u\rangle+2\lambda\mu\langle r_u,r_v\rangle+\mu^2\langle r_v,r_v\rangle=(\lambda,\mu)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}$

$EG-F^2=|r_u\wedge r_v|^2>0$.

平面：$r(u,v)=(u,v,c)$　$r_u=(1,0,0)$, $r_v=(0,1,0)$ $\Rightarrow E=1,F=0,G=1$　$\mathrm{I}=dudu+dvdv$.

计算曲线长度,夹角面积

长：若 $r(u,v)$ 为 S 的参数表示. $E=1+4u^2$ $F=-4uv$. $G=1+4v^2$ 若 $\alpha(t)=r(t,t)\subset S$ 为正则曲线

$|\alpha'(t)|^2=|r_u u'(t)+r_v v'(t)|^2=E+2F+G=2+4(\overset{u=v=t}{u-v})^2=2$　$\Rightarrow$ 曲线弧长 $s(t)=\int_{t_0}^{t}|\alpha'(\tau)|d\tau=\sqrt{2}(t-t_0)$

角：若 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 交于点 p 夹角为 θ, 则夹角为 $\cos\theta=\frac{\langle\alpha'(t),\beta'(t)\rangle}{|\alpha'(t)|\cdot|\beta'(t)|}$

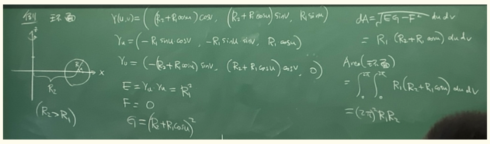
$\alpha(t)=r(2t,t^2)$, $\beta(\tau)=r(\tau,1)$ 交点：$t=1$, $\tau=2$. $p=r(2,1)$

α: $E=1+16t^2$ $F=-8t^4$. $G=1+4t^6$　$\alpha'(1)=2r_u+3r_v$　$\beta'(2)=r_u$

$t=1$: $E=17$ $F=-8$ $G=5$　$|\alpha'(1)|^2=4E+12F+9G=17$　$\langle\alpha'(1),\beta'(2)\rangle=\langle 2r_u+3r_v,r_u\rangle=10$.

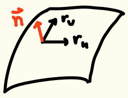
$E_\beta=1+4\tau^2$　$|\beta'(2)|^2=E=17$　$\cos\theta=\frac{10}{17}$.

面：$Area(S)=\iint_D dA=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.



第二基本形：

设曲面 S：$r=r(u,v)$. $n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}$ 为 S 单位法向量, 定义 $\mathrm{II}=-\langle dr,dn\rangle$



$L=\langle r_{uu},n\rangle=-\langle r_u,n_u\rangle$

$M=\langle r_{uv},n\rangle=-\langle r_u,n_v\rangle=-\langle r_v,n_u\rangle$

$N=\langle r_{vv},n\rangle=-\langle r_v,n_v\rangle$

则 $\mathrm{II}=-\langle dr,dn\rangle=-\langle r_udu+r_vdv,n_udu+n_vdv\rangle=Ldudu+2Mdudv+Ndvdv$.

平面：$r(u,v)=(u,v,c)$　$\vec{n}=(0,0,1)$, $d\vec{r}=(du,dv,0)$ $\Rightarrow\mathrm{II}=-\langle d\vec{r},d\vec{n}\rangle=0$.

球面：

例 3.3　求半径为 a 的球面在球面坐标参数下的第二基本形式.
从例 2.5 出发, 在球面坐标参数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ 下,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\theta\theta}&=(-a\cos\theta\cos\varphi,-a\cos\theta\sin\varphi,-a\sin\theta),\\\boldsymbol{r}_{\theta\varphi}&=(a\sin\theta\sin\varphi,-a\sin\theta\cos\varphi,0),\\\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}&=(-a\cos\theta\cos\varphi,-a\cos\theta\sin\varphi,0),\\\boldsymbol{n}&=(-\cos\theta\cos\varphi,-\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta).\end{aligned}\tag{3.14}$$

所以 $L=a$, $M=0$, $N=a\cos^2\theta$, 球面在球面坐标参数下的第二基本形式为

$$\mathrm{II}=a(d\theta d\theta+\cos^2\theta d\varphi d\varphi).\tag{3.15}$$

最后我们讨论第二基本形式与曲面参数选取的关系, 以及它在 E^3 的合同变换下的变化.

柱面：$r(u,v)=(x(u),y(u),v)$

$\frac{ds}{du}=1\Rightarrow ds=\sqrt{x_u^2+y_u^2}\,du=du\Rightarrow x_u^2+y_u^2=1$

$r_{uu}=(x_{uu},y_{uu},0)$　$r_{uv}=r_{vv}=(0,0,0)$　$\vec{n}=(y_u,-x_u,0)$

平面曲线 $(x(u),y(u))$: $\dot{t}=\kappa n$ 即 $(x_{uu},y_{uu})=\kappa(y_u,-x_u,0)$ 两边乘 $(y_u,-x_u)$: $\kappa=x_{uu}y_u-x_uy_{uu}$

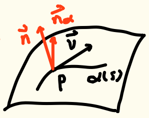
于是 $L=\langle r_{uu},\vec{n}\rangle=\kappa$, $M=N=0\Rightarrow\mathrm{II}=\kappa dudu$ (圆柱面：$\mathrm{II}=-\frac{1}{a}dudu$ a为半径)

定理：(1) $LN-M^2>0$　II 正定或负定, 凸或凹

(2) $LN-M^2<0$　不定

(3) $LN-M^2=0$　退化, 马鞍型.

法曲率：



$\alpha(s)=r(u(s),v(s))\subset S\subset E^3$

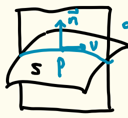
$\alpha(0)=p$. $\alpha'(0)=\vec{v}$ 单位切向

$\alpha(s)$ 为空间曲线, 有曲率 κ_α, 主法向 $\vec{n}_\alpha$

法曲率 $\kappa_n(\vec{v})=\langle\kappa_\alpha\vec{n}_\alpha,\vec{n}\rangle$ ← 曲面S的法向

即 $\kappa_\alpha\vec{n}_\alpha=\langle\kappa_\alpha\vec{n}_\alpha,\vec{n}\rangle\cdot\vec{n}+(\kappa_\alpha\vec{n}_\alpha)_{切向}$　↙测地曲率

直观



$\alpha(s)$ 在 p 处曲率为 S 在 p 处法曲率

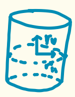
曲面 S 沿非零切向量 $\boldsymbol{w}=\xi\boldsymbol{r}_u+\eta\boldsymbol{r}_v$ 的法曲率定义为

$$k_n(\boldsymbol{w})=\frac{\mathrm{II}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}{\mathrm{I}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}.$$

tip：若 $\vec{n}_\alpha$ 与 $\vec{n}$ 夹角为 θ, 有 $\kappa_n(\vec{v})=\kappa_\alpha\cdot\cos\theta$.

例：球面：$\mathrm{II}=\frac{1}{R}\mathrm{I}$, 则 $\kappa_n(\vec{v})=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{1}{R}$　　柱面：$\mathrm{I}=dudu+dvdv$　$\mathrm{II}=-\frac{1}{R}dudu$.

平面：$\mathrm{II}=0$. 则 $\kappa_n(\vec{v})=0$.



对方向 $w=\cos\theta\cdot\vec{r}_u+\sin\theta\cdot\vec{r}_v$

有 $\kappa_n(w)=-\frac{1}{R}\cos^2\theta$　$\theta=0$ 时为 $-\frac{1}{R}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时为 0.

二次曲面 $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$: $r(x,y)=(x,y,\frac{1}{2}(ax^2+by^2))$

$r_x=(1,0,ax)$　$r_{xx}=(0,0,a)$　$r_{xy}=0$

$r_y=(0,1,by)$　$r_{yy}=(0,0,b)$

$\vec{n}=\frac{r_x\wedge r_y}{|r_x\wedge r_y|}=\frac{(-ax,-by,1)}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}$

于是 $E=1+a^2x^2$　$L=\frac{a}{\sqrt{\cdots}}$

$F=abxy$　$M=0$

$G=1+b^2y^2$　$N=\frac{b}{\sqrt{\cdots}}$

$\vec{v}=\lambda r_x+\mu r_y$ 为单位向量.

则 $\kappa_n(\vec{v})=\frac{L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2}{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}=\frac{a\lambda^2+b\mu^2}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}$ → 取决于 v 的参数；→ 取决于点的坐标

$\mathrm{I}(v,v)=v\cdot v=1$

a, b 同号, 椭圆抛物面　$a=b=0$, 平面

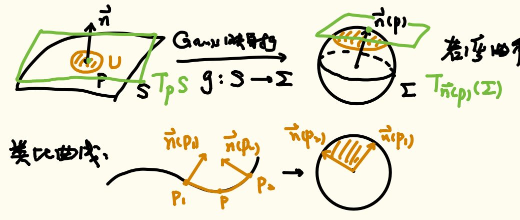
a, b 异号, 双曲抛物面　$a=0$ 或 $b=0$, 抛物柱面

(1) 当 $LN-M^2>0$ 时, 沿 P 点任何切向的法曲率同时为正或为负. 这说明曲面在该点沿任意方向的弯曲是同向的. 这样的点称为曲面的椭圆点.

(2) 当 $LN-M^2<0$ 时, $k_n(\boldsymbol{v})=0$ 关于 $\boldsymbol{v}$ 恰好有两个线性无关的解, 这两个方向称为曲面在该点的渐近方向. 这两个渐近方向将切平面分割为四个区域, 在相对的两个区域上, 法曲率的符号相同. 这样的点称为曲面的双曲点.

(3) 当 $LN-M^2=0$ 时, 这样的点称为曲面的抛物点. 当 L,M,N 不全为零时, 仅有一个切向使法曲率 k_n 为零, 这个方向亦称作曲面在该点的渐近方向, 这个渐近方向将切平面分割为两个区域, 在这两个区域内法曲率均不为 0, 且它们的符号相同; 当 $L=M=N=0$ 时, 法曲率 k_n 沿任何方向均为零, 这样的点又称作平点.

Gauss映射：



若曲面弯曲越大 ⇒ Gauss映射下的像 $g(U)\subset\Sigma$ 面积越大 → $n(s)$ 的值域

$d\sigma=|\vec{n}_u\wedge\vec{n}_v|\,du\,dv$

Weingarten变换： $|\vec{n}|=1$ 导：$\langle\vec{n}_u,\vec{n}\rangle=0$，$\langle\vec{n}_v,\vec{n}\rangle=0$ ⇒ $\vec{n}_u,\vec{n}_v$ 均为切向量。$\vec{n}(u,v)$ 作为 Σ 的参数表示，对 $\forall p$，$\vec{n}(p)\in\Sigma$，$T_{\vec{n}(p)}(\Sigma)=\mathrm{span}\{n_u,n_v\}=\mathrm{span}\{r_u,r_v\}=T_pS$

在相差平移意义下相等。

定义Weingarten变换：$\mathcal{W}:T_pS\to T_pS\cong T_{\vec{n}(p)}\Sigma$，$\mathcal{W}=-dg$.

$\vec{v}=\lambda\vec{r}_u+\mu\vec{r}_v\mapsto\vec{w}=-\lambda\vec{n}_u-\mu\vec{n}_v$

$$\mathcal{W}\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=\underset{\downarrow}{J}\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}\quad\left(=-\begin{pmatrix}\vec{n}_u\\\vec{n}_v\end{pmatrix}\right)$$

$J=\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1}$ $\quad\mathrm{I}=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ $\mathrm{II}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$

有 $\vec{n}_u\wedge\vec{n}_v=(-ar_u-br_v)\wedge(-cr_u-dr_v)$
$=\det J\cdot r_u\wedge r_v$
$=K\cdot r_u\wedge r_v$

性质：① 对 $\forall\vec{v}_1,\vec{v}_2\in T_pS$，有 $\langle\mathcal{W}(\vec{v}_1),\vec{v}_2\rangle=\mathrm{II}\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle$ 证明：直接计算即可

② 对 $\forall$ 单位切向 $\vec{v}$，法曲率 $k_n(\vec{v})=\langle\mathcal{W}(\vec{v}),\vec{v}\rangle$ 证明：右 $=\mathrm{II}=\frac{\mathrm{II}}{1}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=$ 左

③ $\mathcal{W}:T_pS\to T_pS$ 是自伴的，对 $\forall v_1,v_2\in T_pS$，$\langle\mathcal{W}(\vec{v}_1),\vec{v}_2\rangle=\langle\vec{v}_1,\mathcal{W}(\vec{v}_2)\rangle$

④ $\mathcal{W}$ 与参数选取无关

Gauss曲率 $K=\frac{\det\mathrm{II}}{\det\mathrm{I}}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

则 $\mathrm{Area}(\vec{n}(V))=\int_{\vec{n}(V)}d\sigma=\int_D|\vec{n}_u\wedge\vec{n}_v|\,du\,dv=\int_D|K|\underbrace{|r_u\wedge r_v|\,d\sigma}_{dA}$

$(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ $\quad=\int_D|K|\,dA$

$\mathrm{Area}(V)=\int_V dA$ ⇒ $\lim\limits_{V\to0}\frac{\mathrm{Area}(\vec{n}(V))}{\mathrm{Area}(V)}=|K|_{(p)}$

主曲率： 由于 $\mathcal{W}:T_pS\to T_pS$ 自伴 ⇒ $\mathcal{W}$ 有两实特征值 k_1,k_2，对应两特征方向 e_1,e_2（设为单位方向），即有 $\begin{matrix}\mathcal{W}(e_1)=k_1e_1\\\mathcal{W}(e_2)=k_2e_2\end{matrix}$ k_i 为 e_i 方向的法曲率，$i=1,2$.

称 k_1,k_2 为 $p\in S$ 处的主曲率。tip：当 $k_1\neq k_2$ 时有 $\langle e_1,e_2\rangle=0$. $\begin{pmatrix}\langle\mathcal{W}(e_1),e_2\rangle=k_1\langle e_1,e_2\rangle\\\langle\mathcal{W}(e_2),e_1\rangle=k_2\langle e_1,e_2\rangle\end{pmatrix}$ e_1,e_2 为 $p\in S$ 处的主方向

$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$ $\quad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

当 $k_1=k_2$ 时，有 $\forall\vec{v}\in T_pS$ 为主方向，即 $\mathcal{W}(\vec{v})=k(\vec{v})$ $\forall\vec{v}\in T_pS$，此时点 p 称脐点

Euler公式：与 k_n 关系：$\forall\vec{v}\in T_pS$，$\vec{v}=\cos\theta\cdot\vec{e}_1+\sin\theta\cdot\vec{e}_2$ 则 $k_n(\vec{v})=\langle\mathcal{W}(\vec{v}),\vec{v}\rangle=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$

曲率计算：平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$ · Gauss曲率 $K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 有Gauss曲率 K 满足 $\vec{n}_u\wedge\vec{n}_v=K\,\vec{r}_u\wedge\vec{r}_v$ $\quad k=H\pm\sqrt{H^2-K}$

引理：设 p 为曲面 S 上一点，e_1,e_2 是该点的单位正交主方向，则 $\exists S$ 的参数 u,v s.t. $r_u(p)=e_1$, $r_v(p)=e_2$

如上选择，有 $L(p)=k_1$，$M(p)=0$，$N(p)=k_2$，二次近似有 $\begin{cases}x=u\\y=v\\z=\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)\end{cases}$ 为曲面 S 在 p 处二阶近似曲面。$\begin{cases}K=k_1k_2>0\ \text{椭圆点，抛物曲面}\\ \quad\cdot\cdot\ \ <0\ \text{双曲}\ \cdot\cdot\ \ \cdot\cdot\\ \quad\cdot\cdot\ \ =0\ \text{抛物}\ \cdot\cdot\ \ \cdot\cdot\ \text{柱面}\end{cases}$

计算主方向：若已知 k_1,k_2 两主曲率，求对应主方向 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$，即 $\vec{v}\in T_pS$，$\vec{v}=\lambda r_u+\mu r_v$（只需求出 $\lambda:\mu$）

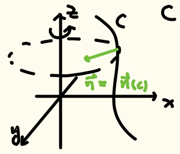
$\mathcal{W}(v)=k\cdot\vec{v}$ ⇒ $-\lambda n_u-\mu n_v=k(\lambda r_u+\mu r_v)$ 点乘 r_u,r_v ⇒ $\begin{cases}\lambda L+\mu M=k(\lambda E+\mu F)\\\lambda M+\mu N=k(\lambda F+\mu G)\end{cases}$ ① 由于对主曲率 k_1，$\mathrm{II}\neq k_1\mathrm{I}$ 则 $L-k_1E$, $M-k_1F$, $N-k_1G$ 至少有一非零

不妨设 $L-k_1E\neq0$. 则有 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{k_1F-M}{L-k_1E}$ 为主方向 $\vec{e}_1$

或直接求：$\vec{v}=\lambda r_u+\mu r_v$ 满足条件① ⇒ $\lambda^2(LF-ME)+\lambda\mu(LG-NE)+\mu^2(MG-NF)=0$ 对应两主方向（曲率线）

一些例子

1. 旋转曲面



$C:(f(u),g(u))$ 将曲线 C 绕 z 旋转而成，$r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$

有：$r_u=(f'\cos v,f'\sin v,g')$ 则 $E=f'^2+g'^2$ $\quad\vec{n}=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\frac{(-fg'\cos v,-fg'\sin v,ff')}{f\sqrt{f'^2+g'^2}}=\frac{(-g'\cos v,-g'\sin v,f')}{\sqrt{f'^2+g'^2}}$

$r_v=(-f\sin v,f\cos v,0)$ $\quad F=0\quad G=f^2$

$r_{uu}=(f''\cos v,f''\sin v,g'')$ 则 $L=\frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}$ $\quad\mathrm{I}=\begin{pmatrix}f'^2+g'^2&0\\0&f^2\end{pmatrix}$ $\mathrm{II}=\begin{pmatrix}\frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}&0\\0&\frac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}\end{pmatrix}$ ⇒ $\mathcal{W}=\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{f'g''-f''g'}{(f'^2+g'^2)^{3/2}}&0\\0&\frac{g'}{f\sqrt{f'^2+g'^2}}\end{pmatrix}$

$r_{uv}=(-f'\sin v,f'\cos v,0)$ $\quad M=0\quad N=\frac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}$

$r_{vv}=(-f\cos v,-f\sin v,0)$

由 $\mathcal{W}$ 为对角阵：$\begin{matrix}\mathcal{W}(r_u)=k_1r_u\\\mathcal{W}(r_v)=k_2r_v\end{matrix}$ 即 r_u,r_v 均为主方向，曲线 C 的切方向 r_u 为曲率线，平行圆的切方向 r_v 为曲率线

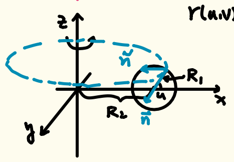
主曲率 k_1,k_2 为 $\mathcal{W}$ 的特征值，$\boxed{\begin{matrix}K=\det\mathcal{W}=k_1k_2\\H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{W})=\frac{1}{2}(k_1+k_2)\end{matrix}}$

注：由 r_u,r_v 为主方向，$k_1=k_n(r_u)=\langle$曲线 C 的曲率向量$,\vec{n}\rangle=\langle k(c)\vec{n}(c),\vec{n}\rangle=k(c)=\frac{f'g''-f''g'}{(\sqrt{f'^2+g'^2})^3}$

$k_2=k_n(r_v)=\langle$平行圆的曲率向量$,\vec{n}\rangle=\langle\frac{1}{f(u)}(-\cos v,-\sin v,0),\vec{n}\rangle=\frac{g'}{f\sqrt{f'^2+g'^2}}$

2. 环面

$r(u,v)=((R_2+R_1\cos u)\cos v,(R_2+R_1\cos u)\sin v,R_1\sin u)$



$k_1=k_n(r_u)=k(c)=\frac{1}{R_1}$

$k_2=k_n(r_v)=\frac{1}{R_2+R_1\cos u}\langle\vec{n},\vec{n}\rangle=\frac{\cos u}{R_2+R_1\cos u}$

选取 u 为弧长参数的旋转曲面，有 $f'^2+g'^2=1$

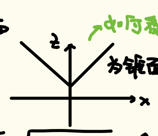
则 $K=-\frac{f''}{f}$ $\quad H=\frac{1}{2}(\frac{g'}{f}-\frac{f''}{g'})$

3. Gauss曲率 $K\equiv$ const 的旋转曲面

由 $K=-\frac{f''}{f}$，⇔ $f''+Kf=0$，其解为 $f(u)=\begin{cases}Au+B & k=0\\A\cos\sqrt{K}u+B\sin\sqrt{K}u & k>0\\A\cosh\sqrt{-K}u+B\sinh\sqrt{-K}u & k<0\end{cases}$

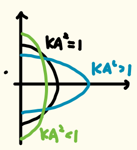
① $k=0$. $f(u)=Au+B$. 由 $f'^2+g'^2=1$ 知 $0\leq A\leq1$

- $A=0$. $f(u)=B$, $g(u)=u+c_0$ 为圆柱面
- $A=1$ $f(u)=u+B$ $g(u)=c_0$ 为平面.
- $0<A<1$ $f(u)=Au+B$ $g(u)=\sqrt{1-A^2}u+c_0$



如何看出？令 $v=0$，为 $(f(u),0,g(u))$

$KA^2=1$ 时 $\begin{matrix}f(u)=\frac{1}{\sqrt{K}}\cos\sqrt{K}u\\g(u)=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}u\end{matrix}$ 为圆.



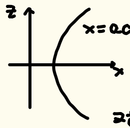
② $k>0$. 不妨设 $B=0$. 即 $f=A\cos\sqrt{K}u$ $\quad g'=\sqrt{1-f'^2}=\sqrt{1-KA^2\sin^2\sqrt{K}u}$ $\quad g=\int_0^u\sqrt{1-KA^2\sin^2\sqrt{K}t}\,dt$

$KA^2>1$

$KA^2<1$

① $k<0$. $|A|>|B|$ 则 $f(u)=\cosh(\sqrt{-k}\,u)$　$|A|<|B|$ 则 $f(u)=\sinh(\sqrt{-k}\,u)$　$|A|=|B|$. $f(u)=e^{\sqrt{-k}u}$, $g(u)=\int_0^u(1+kA^2e^{2\sqrt{-k}t})^{\frac12}dt$ 伪球面.

4. 旋转极小曲面是平面或悬链面.



$x=a\cosh\frac{z}{a}$ 悬链线. $r(u,v)=(a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, av)$ 为极小曲面, $H\equiv0$.

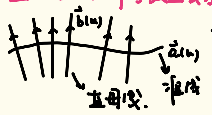
反之证明旋转极小曲面是平面或悬链面.

对 x-z 平面上曲线 $C:(f(u),g(u))$ 以 u 为弧长参数, 将 C 绕 z 轴旋转得到曲面 S. $H=\frac12\left(\frac{g'}{f}-\frac{f''}{g'}\right)\overset{\text{整理}}{=}0$ 则 $ff''=(g')^2$

由 u 为弧长参数: $f'^2+g'^2=1 \Rightarrow ff''+f'^2=1 \Rightarrow (f^2)''=(2ff')'=2(ff''+f'^2)=2$ 则 $f^2(u)=u^2+Au+B$ (由 $(u+\frac A2)^2+B-\frac{A^2}{4}$) 不妨设 $f^2(u)=u^2+a^2$

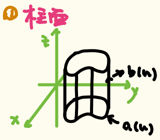
则 $g'=\pm\sqrt{1-f'^2}=\pm\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \Rightarrow g=\pm a\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{u}{a}$ 即 $C:\begin{cases}x=\sqrt{u^2+a^2}\\ z=\pm a\operatorname{arcsinh}\frac{u}{a}\end{cases}$ 又 $x^2=u^2+a^2=(a\sinh\frac{z}{a})^2+a^2=a^2\cosh^2\frac{z}{a} \Rightarrow x=a\cosh\frac{z}{a}$.

5. 直纹面: 由单参数直线族生成.



有 $r(u,v)=a(u)+v\cdot b(u)$

① 柱面

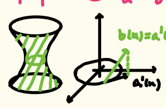


② 锥面

$r(u,v)=a_0+vb(u)$

③ 切线面

④ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



$a(u)=(a\cos u, b\sin u, 0)$
$b(u)=(-a\sin u, b\cos u, c)$
$r(u,v)=a+vb=(a(\cos u-v\sin u), b(\sin u+v\cos u), cv)$

直纹面与曲率: $\begin{cases}r_u=a'+vb'\\ r_v=b\\ r_{uu}=a''+vb''\\ r_{uv}=b'\\ r_{vv}=0 \Rightarrow N=0\end{cases}$　$\vec n=\frac{(a'+vb')\wedge b}{|\cdots|}$

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-M^2}{EG-F^2}\le0$

$M=0 \Leftrightarrow \langle r_{uv},n\rangle=0 \Leftrightarrow \langle b',(a'+vb')\wedge b\rangle=(b',a'+vb',b)=0 \Leftrightarrow (b',b,a)=0$

$K\equiv0$ 时 该直纹面称为可展曲面.

有性质: 直纹面为可展曲面 $\Leftrightarrow (a'(u),b(u),b'(u))=0$
$\Leftrightarrow$ 沿直母线, 曲面法向不变.

注: 可展 $\Leftrightarrow \langle\vec n,b'\rangle=0$.
又 $\vec n /\!/ r_u\wedge r_v \Rightarrow \vec n/\!/(a'+vb')\wedge b \Rightarrow \langle\vec n,b\rangle=0$.
于是 $\vec n /\!/ b'\wedge b$ 与 u 无关, 沿直母线不变.
(若 $b\wedge b'=0$, 则 b 方向不变, 为柱面.)

例: 柱, 锥, 切线面均可展.
$a(u)+vb_0$　$a_0+vb(u)$　$a(u)+va'(u)$ 均有 $(a',b',b)=0$.

准线 $a(u)$ 可作变换: $\alpha(u)=a(u)+\lambda b(u)$ s.t. $(\alpha'(u),b'(u))=0$.

令 $|b(u)|^2=1 \Rightarrow (b(u),b'(u))=0$. $0=\langle\alpha'(u),b'(u)\rangle=\langle a',b'\rangle+\lambda|b'|^2$ 令 $\lambda=\frac{-\langle a',b'\rangle}{|b'|^2}$, 则 $r(u,v)=\alpha(u)+(v-\lambda(u))b(u)$

性质: 可展均为柱, 锥, 切线面

$(a',b,b')=0 \Leftrightarrow \langle a', b\wedge b'\rangle=0$

设 $\begin{cases}|b(u)|=1\\ \langle a',b'\rangle=0.\end{cases}$
① $b\wedge b'=0$. 则 b 方向不变. 柱面.
② $b\wedge b'\neq0$. ②a $a'(u)\equiv0$. 锥面
②b $a'(u)\neq0 \Rightarrow a'/\!/b$ 切线面.

6. 直纹极小曲面.

正螺旋面: $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, bv)$　$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&u^2+b^2\end{pmatrix}$　$\mathrm{II}=\begin{pmatrix}0&\frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}\\ \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}&0\end{pmatrix}$　$H=\frac12\operatorname{tr}(\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1})=0$.

性质: 直纹极小曲面必为平面或正螺旋面.

证明: $r(u,v)=a(u)+vb(u)$. 不妨设 $\langle a'(u),b'(u)\rangle=0$, $|b(u)|=1$.

$\begin{cases}r_u=a'+vb'\\ r_v=b\\ r_{uu}=a''+vb''\\ r_{uv}=b'\\ r_{vv}=0\Rightarrow N=0\end{cases}$

$H=0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\right]=0 \Rightarrow \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G&-F\\-F&E\end{pmatrix}\right]=0$. 即 $LG-2MF+\overset{\text{为}0}{NE}=0$.

于是 $LG=2MF \Leftrightarrow \langle r_{uu},n\rangle\langle r_v,r_v\rangle=2\langle r_{uv},\vec n\rangle\langle r_u,r_v\rangle$

代入 $n=\frac{r_u\wedge r_v}{|\cdots|} \Rightarrow \langle a''+vb'',(a'+vb')\wedge b\rangle=2\langle b',(a'+vb')\wedge b\rangle\langle a'+vb',b\rangle$

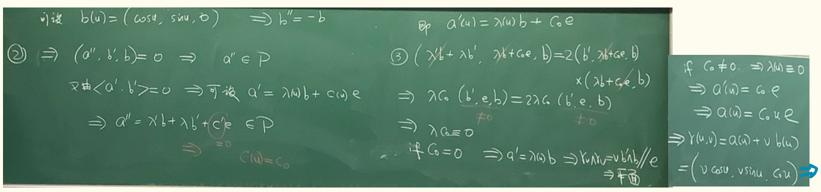
$\Leftrightarrow (a''+vb'',a'+vb',b)=2(b',a',b)\langle a',b\rangle$

$\Leftrightarrow v^2\underbrace{(b'',b',b)}_{=0}+v\underbrace{[(a'',b',b)+(b'',a',b)]}_{=0}+\underbrace{(a'',a,b)=2(b',a,b)\langle a',b\rangle}_{\Leftarrow\text{只与}u\text{相关}}$

于是 ① $(b'',b',b)=0$
② $(a'',b',b)+(b'',a',b)=0$.
③ $(a'',a,b)=2(b',a,b)\langle a',b\rangle$

①: $b(u)$ 在平面上
若 $b'(u)=0 \Rightarrow b(u)=b_0$ 为柱面
由极小 $\Rightarrow L=0 \Rightarrow L=M=N=0$. 为平面.
若 $b'(u)\neq0 \Rightarrow$ 由 $|b|=1 \Rightarrow \langle b',b\rangle=0$
$\Rightarrow \frac{d}{du}(b'\wedge b)=b''\wedge b /\!/ b'\wedge b$ 则 $b'\wedge b$ 方向不变
$\Rightarrow b(u)$ 在平面上.

②



⇒ 正螺旋面.

↑期中部分 2025.11.2考试

第四章 标架与曲面论基本定理.

Q: 给定两个二次型 $\varphi=a_{11}dudu+2a_{12}dudv+a_{22}dvdv$, $\psi=b_{11}dudu+2b_{12}dudv+b_{22}dvdv$ 是否∃曲面 $r(u,v)$ 以 φ,ψ 为 I,II? 若存在, 是否唯一?

A: 若 φ,ψ 满足 Gauss 方程与 Codazzi 方程, 则正确.

⟶ 活动标架

定义: 在曲面 $S:r(u,v)$ 上, $\vec X(u,v)$ 是一个向量场, 它从 $r(u,v)$ 出发, 关于 u,v 是 C^∞ 的.

活动标架场: $\{r(u,v);\vec x_1(u,v),\vec x_2(u,v),\vec x_3(u,v)\}$ 且 $(x_1,x_2,x_3)\neq0$. $\forall(u,v)$ 可设 $(x_1,x_2,x_3)>0$ 正定向.

例: $\{r(u,v);r_u,r_v,n\}$ 为自然标架场.

正交标架场: $\{x_1,x_2,x_3\}$ 为单位正交.

→ 自然标架运动方程 (← 类比曲线的Frenet标架运动方程)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\ \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec n\\ \dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha}=-b^\beta_\alpha r_\beta\end{cases}$$

$$\Gamma^\xi_{\alpha\beta}=\frac12 g^{\xi\eta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\eta}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\eta}\right)\text{—Christoffel 符号}$$

预备: $r(u,v)$ 记为 $r(u^1,u^2)$. $\begin{cases}r_1=\frac{\partial r}{\partial u_1}=r_u\\ r_2=\frac{\partial r}{\partial u_2}=r_v\end{cases}$ 记 $r_\alpha=\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}$ $r_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}$ $\alpha\beta=1,2$ $n=\frac{r_1\wedge r_2}{|r_1\wedge r_2|}$

$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ $E=\langle r_1,r_1\rangle\overset{def}{=}g_{11}$, $F=\langle r_1,r_2\rangle\overset{def}{=}g_{12}=g_{21}$, $G=\langle r_2,r_2\rangle\overset{def}{=}g_{22}$

$\mathrm{II}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ $L=\langle r_{11},\vec n\rangle\overset{def}{=}b_{11}$, $M=\langle r_{12},\vec n\rangle\overset{def}{=}b_{12}=b_{21}$, $N=\langle r_{22},\vec n\rangle\overset{def}{=}b_{22}$

$dr=r_u du+r_v dv=r_1du_1+r_2du_2=\sum_{\alpha=1}^{2}r_\alpha du^\alpha\overset{\triangle}{=}r_\alpha du^\alpha$ ($\triangle$: Einstein求和约定: 一个指标α同时出现在上下标中,求和号可省略) ($r_\alpha du^\alpha$ ← $\sum_{\alpha=1}^{2}$)

$\mathrm{I}=g_{11}du_1du_1+g_{12}du_1du_2+g_{21}du_2du_1+g_{22}du_2du_2=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ 类似地. $\mathrm{II}=b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$

对I^{-1}, 记为$(g^{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta})^{-1}=\mathrm{I}^{-1}$, 记 $g=\det(g_{\alpha\beta})$ $(g_{\alpha\beta})(g^{\alpha\beta})=(\delta^\beta_\alpha)$ (单位阵. $\delta^\beta_\alpha=\begin{cases}1&\alpha=\beta\\0&\alpha\neq\beta\end{cases}$) $(g^{\alpha\beta})=\frac1g\begin{pmatrix}g_{22}&-g_{12}\\-g_{21}&g_{11}\end{pmatrix}$

对II^{-1}, 记为$(b^{\alpha\beta})=(b_{\alpha\beta})^{-1}=\mathrm{II}^{-1}$, 记 $b=\det(b_{\alpha\beta})$

导出: 下面导出自然标架$\{r(u^1,u^2);r_1,r_2,\vec n\}$的运动方程.

对于$\alpha=1,2$, $\beta=1,2$. (*) $\begin{cases}r_{\alpha\beta}=\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma+C_{\alpha\beta}\vec n & (\gamma=1,2. 求和号省略) \\ n_\alpha=\frac{\partial n}{\partial u^\alpha}=D^\beta_\alpha r_\beta+D_\alpha\vec n & 四者为待定系数\end{cases}$ ($\beta=1,2$)

① 由$|\vec n|=1\Rightarrow\langle n_\alpha,\vec n\rangle=0\Rightarrow D_\alpha=0$.

② $b_{\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},\vec n\rangle=\langle C_{\alpha\beta}\vec n,\vec n\rangle=C_{\alpha\beta}\Rightarrow C_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}$

③ $-b_{\alpha\gamma}=\langle n_\alpha,r_\gamma\rangle=\langle D^\beta_\alpha r_\beta,r_\gamma\rangle=D^\beta_\alpha g_{\beta\gamma}\Rightarrow -b_{\alpha\gamma}=D^\beta_\alpha g_{\beta\gamma}$

$\xRightarrow{同乘g^{\gamma\xi}}$ $D^\xi_\alpha=-b_{\alpha\gamma}\cdot g^{\gamma\xi}$ 即 $D^\beta_\alpha=-b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}\overset{def}{=}-b^\beta_\alpha$. $(D^\beta_\alpha)=-\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1}=-W$ 即为Weingarten变换矩阵

于是(*)化为 $\begin{cases}r_{\alpha\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma+b_{\alpha\beta}\vec n & 第二基本型\\ \vec n_\alpha=-b^\beta_\alpha r_\beta\end{cases}$

下面计算$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$: $\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle=\langle\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma,r_\xi\rangle=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi}=\Gamma_{\xi\alpha\beta}$ (用$g_{\gamma\xi}$降指标)

由$g_{\alpha\xi}=\langle r_\alpha,r_\xi\rangle$, 求导:

1° $\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}=\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle+\langle r_\alpha,r_{\xi\beta}\rangle$

2° $\frac{\partial g_{\xi\beta}}{\partial u^\alpha}=\langle r_{\xi\alpha},r_\beta\rangle+\langle r_\xi,r_{\beta\alpha}\rangle$

3° $\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial g_\xi}=\langle r_{\beta\xi},r_\alpha\rangle+\langle r_\beta,r_{\alpha\xi}\rangle$

1°+2°−3° ⇒ $\Gamma_{\xi\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle=\frac12\left[\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\xi\beta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right]$ 称为第一类Christoffel符号.

则 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta}=\frac12 g^{\gamma\xi}\left[\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\xi\beta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right]$ 称Christoffel符号.

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\frac12 g^{\gamma\xi}\left[\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right]$

总结: 曲线的自然标架$\{r(u^1,u^2),r_1,r_2,\vec n\}$. 运动方程为 $\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u_\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\alpha+b_{\alpha\beta}\vec n\\ \frac{\partial\vec n}{\partial u_\alpha}=-b^\beta_\alpha r_\beta\end{cases}$ $\alpha.\beta.\gamma=1,2.$

$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma+b_{\alpha\beta}\vec n$ $\frac{\partial\vec n}{\partial u^\alpha}=-b^\beta_\alpha r_\beta$

tip: "哑指标" 求和指标

如 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta}=g^{\gamma\eta}\Gamma_{\eta\alpha\beta}$

例: 1. 函数图像. $z=f(x,y)$. $r(u^1,u^2)=(u^1,u^2,f(u^1,u^2))$

由$\Gamma_{\xi\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle$ $\begin{cases}r_1=(1,0,f_1)\\ r_2=(0,1,f_2)\end{cases}$ $\begin{cases}r_{11}=(0,0,f_{11})\\ r_{12}=(0,0,f_{12})\\ r_{22}=(0,0,f_{22})\end{cases}$ 则 $\Gamma_{111}=\langle r_{11},r_1\rangle=f_1f_{11}$ $\Gamma_{211}=\langle r_{11},r_2\rangle=f_2f_{11}$

$\Gamma_{112}=\Gamma_{121}=\langle r_{12},r_1\rangle=f_1f_{12}$ $\Gamma_{212}=\Gamma_{221}=\langle r_{12},r_2\rangle=f_2f_{12}$

$\Gamma_{122}=\langle r_{22},r_1\rangle=f_1f_{22}$ $\Gamma_{222}=\langle r_{22},r_2\rangle=f_2f_{22}$

有 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta}$ $g_{11}=1+f_1^2$ $g_{12}=f_1f_2$ $g_{22}=1+f_2^2$ $(g^{\alpha\beta})=\frac1g\begin{pmatrix}g_{22}&-g_{12}\\-g_{21}&g_{11}\end{pmatrix}=\frac{1}{1+f_1^2+f_2^2}\begin{pmatrix}1+f_2^2&-f_1f_2\\-f_1f_2&1+f_1^2\end{pmatrix}$ 则 $\Gamma^1_{11}=g^{1\xi}\Gamma_{\xi11}=g^{11}\Gamma_{111}+g^{12}\Gamma_{211}=\frac{f_1f_{11}}{1+f_1^2+f_2^2}$ 其余类似

2. 正交参数下情形 $r(u^1,u^2)$. $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}g_{11}&0\\0&g_{22}\end{pmatrix}$

$\mathrm{I}^{-1}=(g^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\frac{1}{g_{11}}&0\\0&\frac{1}{g_{22}}\end{pmatrix}$

$\Gamma^1_{11}=\frac12 g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\cdots\right)=\frac12\frac{\partial}{\partial u^1}(\ln g_{11})=\frac12(\ln E)_u$

$\Gamma^2_{11}=\frac12 g^{22}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}}_{=0}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)=\frac12\frac{1}{g_{22}}\cdot\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=-\frac{E_v}{2G}$

$\Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E}$ $\Gamma^2_{22}=\frac12(\ln G)_v$ $\Gamma^1_{12}=\frac12(\ln E)_v$ $\Gamma^2_{12}=\frac12(\ln G)_u$

等温参数 $E=G$, $F=0$时

$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\Gamma^1_{22}=\frac12(\ln E)_u$

$\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=-\Gamma^2_{22}=\frac12(\ln E)_v$

$\Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{E}$

$\Gamma^1_{11}=\frac12(\ln E)_u$

$\Gamma^1_{12}=\frac12(\ln E)_v$

$\Gamma^1_{22}=-\frac12\frac{G_u}{E}$ 负号

$\Gamma^2_{22}=\frac12(\ln G)_v$

$\Gamma^2_{12}=\frac12(\ln G)_u$ $\Gamma^2_{11}=-\frac12\frac{E_v}{G}$

例 2.1 求单位球面在球极投影参数下的 Christoffel 符号 $\{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\}$ 与 (b^β_α).

由第三章例 1.1 我们知道, 单位球面的球极投影表示为

$$r(u,v)=\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\frac{2v}{1+u^2+v^2},\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right),$$

它的坐标切向量为

$$r_u(u,v)=\left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2},\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2},\frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2}\right),$$

$$r_v(u,v)=\left(\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2},\frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2},\frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2}\right).$$

因此可以求出 $E=G=\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$, $F=0$. 直接计算, 我们得到单位球面在球极投影参数下的 Christoffel 符号为

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\frac{2u}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma^2_{22}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=-\frac{2v}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{2v}{1+u^2+v^2},\qquad\Gamma^1_{22}=\frac{2u}{1+u^2+v^2}.$$

→ 曲面的结构方程 (Gauss + Codazzi) (← I, II的相容性条件)

Gauss: $\underbrace{\frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\xi_{\eta\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\xi_{\eta\beta}}_{R^\xi_{\alpha\beta\gamma}}=b_{\alpha\beta}b^\xi_\gamma-b_{\alpha\gamma}b^\xi_\beta$ (A₁)

$\frac{\partial b^\xi_\alpha}{\partial u^\beta}+b^\eta_\alpha\Gamma^\xi_{\eta\beta}=\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\alpha}+b^\eta_\beta\Gamma^\xi_{\eta\alpha}$ (B₁)

Codazzi: $\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+\Gamma^\xi_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma}=\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}+\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta}$ (A₂)

证明(B₁)⇔(A₂): 由 $b^\beta_\alpha=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$. $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}g^{\gamma\xi}=\frac12\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right)$

(B₁)$\times g^{\eta\xi}$ ⇒ $\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma}-b_{\beta\eta}\frac{\partial g^{\eta\xi}}{\partial u^\gamma}=\frac{\partial b^\xi_\gamma}{\partial u^\beta}-b_{\gamma\eta}\frac{\partial g^{\eta\xi}}{\partial u^\beta}$ 又 $\frac{\partial g^{\eta\xi}}{\partial u^\gamma}=-g^{\eta\delta}\Gamma^\xi_{\gamma\delta}-g^{\xi\delta}\Gamma^\eta_{\beta\delta}$ 展开即为(A₂) 证毕

Riemann符号: $R_{\alpha\delta\beta\gamma}=b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}-b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}$ (1324−1423)

特别地. $R_{1212}=LN-M^2$. 有 Gauss曲率 $K=\frac{\det\mathrm{II}}{\det\mathrm{I}}=\frac{R_{1212}}{\det g}$ 有R_{1212}由$g,\Gamma,\partial\Gamma$来定义, 即$g,\partial g,\partial^2 g$定义.

于是有Gauss绝妙定理: Gauss曲率K只与曲面的第一基本形相关.

有 $R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\alpha\delta\gamma\beta}$. 由此可得 Gauss方程(A₁)只有1个方程: $R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ (Gauss)

$R_{\alpha\delta\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\alpha\delta}$

$R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\beta\gamma}$

$R_{\alpha\delta\beta\gamma}=\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma_{\delta\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma_{\delta\alpha\gamma}+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\left(\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\gamma}\right)-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\left(\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta}\right)$

Bianchi恒等式: $R_{\delta\alpha\beta\gamma}+R_{\delta\beta\gamma\alpha}+R_{\delta\gamma\alpha\beta}=0$.

证明: 代入: $R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma_{\delta\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma_{\delta\alpha\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\left(\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\gamma}\right)+\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\left(\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta}\right)$

$R_{\delta\beta\gamma\alpha}=-\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Gamma_{\delta\beta\gamma}+\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma_{\delta\beta\alpha}-\Gamma^\eta_{\beta\gamma}\left(\Gamma_{\delta\eta\alpha}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha}\right)+\Gamma^\eta_{\beta\alpha}\left(\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\gamma}\right)$

$R_{\delta\gamma\alpha\beta}=-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma_{\delta\gamma\alpha}+\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Gamma_{\delta\gamma\beta}-\Gamma^\eta_{\gamma\alpha}\left(\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta}\right)+\Gamma^\eta_{\gamma\beta}\left(\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha}\right)$

Codazzi (A₂)只有两个独立方程:

$\beta=\gamma$ 平凡

$\left.\begin{matrix}\alpha=1 & \beta=1 & \gamma=2\\ & \beta=2 & \gamma=1\end{matrix}\right\}$ $\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}+\Gamma^\xi_{11}b_{\xi2}=\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^\xi_{12}b_{\xi1}$ ⋯ ①

$\left.\begin{matrix}\alpha=2 & \beta=1 & \gamma=2\\ & \beta=2 & \gamma=1\end{matrix}\right\}$ $\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}+\Gamma^\xi_{21}b_{\xi2}=\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+\Gamma^\xi_{22}b_{\xi1}$ ⋯ ②

三式相加：$R_{\delta\alpha\beta\gamma}+R_{\delta\beta\gamma\alpha}+R_{\delta\gamma\alpha\beta}=-\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma_{\delta\alpha\beta}}+\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma_{\delta\alpha\gamma}}-\Gamma^\eta_{\alpha\beta}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\gamma}})+\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta}})$

$-\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Gamma_{\delta\beta\gamma}}+\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma_{\delta\beta\alpha}}-\Gamma^\eta_{\beta\gamma}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\alpha}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha}})+\Gamma^\eta_{\beta\alpha}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\gamma}})$

$-\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma_{\delta\gamma\alpha}}+\cancel{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Gamma_{\delta\gamma\beta}}-\Gamma^\eta_{\gamma\alpha}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta}})+\Gamma^\eta_{\gamma\beta}(\cancel{\Gamma_{\delta\eta\alpha}-\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha}})=0.$ 证毕.

协变导数：$D_\beta r_\alpha=(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta})^T=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi$

有 $D_\gamma D_\beta r_\alpha-D_\beta D_\gamma r_\alpha=D_\gamma(\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi)-D_\beta(\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}r_\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma}(\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi)\right)^T-\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}(\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}r_\xi)\right)^T=\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi+\Gamma^\xi_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\xi\gamma}r_\delta-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}r_\xi-\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\xi\beta}r_\delta=R^\xi_{\alpha\beta\gamma}r_\xi$

张量的协变导数：$D_\gamma b_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial u^\gamma}(b(r_\alpha,r_\beta))-b((\frac{\partial}{\partial u^\gamma}r_\alpha)^T,r_\beta)-b(r_\alpha,(\frac{\partial r_\beta}{\partial u^\gamma})^T)=\frac{\partial}{\partial u^\gamma}b_{\alpha\beta}-\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta}-\Gamma^\xi_{\beta\gamma}b_{\alpha\xi}$

于是 $D_\gamma b_{\alpha\beta}-D_\beta b_{\alpha\gamma}=\frac{\partial}{\partial u^\gamma}b_{\alpha\beta}+\Gamma^\xi_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma}-\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}-\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta}=0$ i.e Codazzi 方程 $A_2 \Leftrightarrow D_\gamma b_{\alpha\beta}$ 关于 α,β,γ 完全对称

正交参数下的 Gauss - Codazzi 方程

$I=\begin{pmatrix}E&0\\0&G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}&0\\0&g_{22}\end{pmatrix}$ Gauss方程：$R_{1212}=g_{2\xi}R^\xi_{112}=g_{22}R^2_{112}=g_{22}(\frac{\partial\Gamma^\xi_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial\Gamma^\xi_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^\xi_{11}\Gamma^2_{\xi2}-\Gamma^\xi_{12}\Gamma^2_{\xi1})$ (正交参数下 Γ^k_{ij} 已求出)

有 $\Gamma^1_{11}=\frac{E_u}{2E}$ $\Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G}$ $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{E_v}{2E}$ 代入：$R_{1212}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left((\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v+(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u\right)$

$\Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E}$ $\Gamma^2_{22}=\frac{G_v}{2G}$. $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{G_u}{2G}$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln E}{\partial u},\quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln E}{\partial v},$$
$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u},$$
$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial v}.$$

$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}(\ln E)_u$ $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}(\ln E)_v$

$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}(\ln G)_v$ $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}(\ln G)_u$

$\Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G}$ $\Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E}$

Codazzi 方程：$\begin{cases}(\frac{L}{\sqrt{E}})_v-(\frac{M}{\sqrt{E}})_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0\\(\frac{N}{\sqrt{G}})_u-(\frac{M}{\sqrt{G}})_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0\end{cases}$

$\longrightarrow$ 曲面的存在唯一性定理

$\Gamma^\xi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\xi\delta}(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta})$

$b^\beta_\alpha=g^{\beta\xi}b_{\xi\alpha}$

$\varphi=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$

$\psi=b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$

定理：若两曲面 $S_1:r(u,v)$. $S_2:\tilde{r}(u,v)$ $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ 有相同的 I.II. 则 $\exists$ 刚体运动 T 使 $S_2=T(S_1)$

定理：当 $\Gamma^\xi_{\alpha\beta}$. b^β_α. $b_{\alpha\beta}$ 满足 Gauss - Codazzi 方程时 $\forall u_0=(u_0^{(1)},u_0^{(2)})\in D$. $\exists u_0$ 的邻域 $U\subset D$ 以及定义在 U 上的曲面 $S:r(u^1,u^2)$ $(u^1,u^2)\in U$ s.t. $\varphi.\psi$ 为 S 的 I.II.

运动方程 $\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec{n}\\\frac{\partial\vec{n}}{\partial u^\alpha}=-b^\xi_\alpha r_\xi\end{cases}$ 自然标架场 $\{r(u,v):r_1,r_2,\vec{n}\}$

正交标架场 $\{r(u,v):e_1,e_2,e_3\}$ (由Schmit正交化知存在性)

用正交标架场研究曲面的运动方程：

$dr=\omega_1e_1+\omega_2e_2$

$(\omega_1,\omega_2)=(du,dv)A$

在曲面 $S:r(u,v)$ 上有正交标架场 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ $\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}\Rightarrow dr=r_udu+r_vdv=\underbrace{(a_{11}du+a_{21}dv)}_{\omega_1}e_1+\underbrace{(a_{12}du+a_{22}dv)}_{\omega_2}e_2=\omega_1e_1+\omega_2e_2$ ······①

1° 有 $\underline{I=drdr}=\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2$. 设 $de_i=\omega_{i1}e_1+\omega_{i2}e_2+\omega_{i3}e_3$ 有 $\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}0&i\neq j\\1&i=j\end{cases}$ 微分 $\Rightarrow 0=\langle de_i,e_j\rangle+\langle e_i,de_j\rangle=\omega_{ij}+\omega_{ji}$ (ω_{ij} 反对称)

于是 $d\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\\omega_{21}&0&\omega_{23}\\\omega_{31}&\omega_{32}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$ ······② ①+② 为曲面 S 的正交标架 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 的运动方程

2° $\underline{II=-\langle dr,dn\rangle}=-\langle dr,de_3\rangle=-\langle\omega_1e_1+\omega_2e_2,\omega_{31}e_1+\omega_{32}e_2\rangle$

$=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$

与自然标架场的运动方程做比较 $\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec{n}\\\frac{\partial\vec{n}}{\partial u^\alpha}=-b^\xi_\alpha r_\xi\end{cases}\Rightarrow d\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vec{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma^1_{1\beta}du^\beta&\Gamma^2_{1\beta}du^\beta&b_{1\beta}du^\beta\\\Gamma^1_{2\beta}du^\beta&\Gamma^2_{2\beta}du^\beta&b_{2\beta}du^\beta\\-b^1_\alpha du^\alpha&-b^2_\alpha du^\alpha&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vec{n}\end{pmatrix}$

与自然标架关系：$AA^T=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}>0$ $A>0$.

$(du,dv)=(\omega_1,\omega_2)A^{-1}$

设 $(\omega_{13},\omega_{23})=(\omega_1,\omega_2)B$. $B=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix}$ 对称. 为W 在基 $\{e_1,e_2\}$ 下的矩阵.

$ABA^T=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ $K=\det B$. $H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}B$.

性质：曲面的第一基本形式与正交标架 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 的选取无关，第二基本形式与同向的正交标架选取无关

结构方程

自然标架下对运动方程求导，利用二次偏导可交换 $\Rightarrow$ Gauss - Codazzi

正交标架下运动方程不依赖于参数，故用外微分

$\Lambda^0\xrightarrow{d}\Lambda^1\xrightarrow{d}\Lambda^2\xrightarrow{d}0$

外微分：$D=\{(u,v)\}\subset\mathbb{R}^2$. 0阶微分形式：函数 $f\in\Lambda^0$ (定义某[u]的量外积)

1阶微分形式：$fdu+gdv\in\Lambda^1$

2阶微分形式：$fdu\wedge dv\in\Lambda^2$

① $f\in\Lambda^0$, $df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\in\Lambda^1$ $\Lambda^1\overset{d}{\Rightarrow}(f_u-f_v)du\wedge dv$.

② $\theta=fdu+gdv\in\Lambda^1$, $d\theta=df\wedge du+dg\wedge dv=(-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u})du\wedge dv$

③ $\varphi=fdu\wedge dv\in\Lambda^2$, $d\varphi=(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv)\wedge du\wedge dv=0$.

性质：$f.g\in\Lambda^0$. $\theta\in\Lambda^1$. 则 $d(fg)=gdf+fdg$, $d(f\theta)=df\wedge\theta+fd\theta$, $d^2f=0$.

例：曲面上正交标架 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$. $(\omega_1,\omega_2)=(du,dv)A\Rightarrow\omega_1\wedge\omega_2=(a_{11}du+a_{21}dv)\wedge(a_{12}du+a_{22}dv)=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})du\wedge dv=\det A\cdot du\wedge dv=\sqrt{EG-F^2}du\wedge dv$.

结论：Gauss 方程：$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}$ $d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2$

Codazzi方程：$\begin{cases}d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23}\\d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}\end{cases}$ $d\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1$

例：$r(u,v)$ 正交参数. $I=Edudu+Gdvdv$ $(F=0)$ $\longrightarrow$ $F=0$ 时可设 $e_1=\frac{r_u}{\sqrt{E}}$. $e_2=\frac{r_v}{\sqrt{G}}$ (一定有 $r_u\cdot r_v=0$ 即 $r_u\perp r_v$)

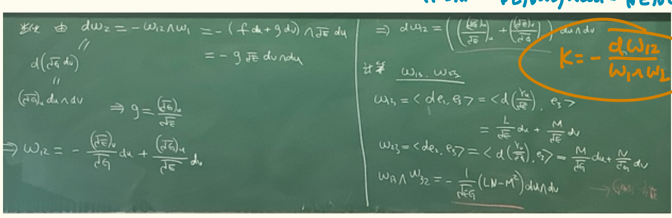
$e_1=\frac{r_u}{\sqrt{E}}$. $e_2=\frac{r_v}{\sqrt{G}}$, $dr=\sqrt{E}e_1du+\sqrt{G}e_2dv\Rightarrow\omega_1=\sqrt{E}du$. $\omega_2=\sqrt{G}dv$.

设 $\omega_{12}=fdu+gdv$. 有 $d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}=\omega_{12}\wedge\omega_2\Rightarrow\overset{d\omega_1}{d(\sqrt{E}du)}=(fdu+gdv)\wedge(\sqrt{G}dv)=f\sqrt{G}du\wedge dv$

$\|$

$((\sqrt{E})_udu+(\sqrt{E})_vdv)\wedge du=-(\sqrt{E})_vdu\wedge dv$

$\Rightarrow f=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}$



$K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$ ☆

小结： 曲面 S. $r(u,v)$ 也记为 $r(u^1,u^2)$

自然标架 $\{r; r_1, r_2, \vec{n}\}$

运动方程 $\begin{cases} \frac{dr}{du^\alpha}=r_\alpha \\ \frac{dr_\alpha}{du^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec{n} \\ \frac{dn}{du^\alpha}=-b_\alpha^\beta r_\beta \end{cases}$

b_α^β 为 Weingarten 变换矩阵. 有 $b_\alpha^\beta=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$.

结构方程：$\frac{\partial^2 \vec r}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}=\frac{\partial^2 \vec r}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}$

$\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial u^\beta}\right) \to \begin{cases}\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}=\Gamma_{\beta\alpha}^{\xi} \\ b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}\end{cases}$

$\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\gamma}\right) \to \begin{cases}\text{Gauss} \\ \text{Codazzi}\end{cases}$

$\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{\partial \vec n}{\partial u^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial \vec n}{\partial u^\beta}\right) \to$ Codazzi

Gauss：$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}-b_{\alpha\delta}b_{\beta\gamma}$

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=g_{\beta\xi}R_{\alpha\gamma\delta}^{\xi}$ $\quad D_\gamma D_\beta r_\alpha - D_\beta D_\gamma r_\alpha = R_{\alpha\beta\gamma}^{\xi} r_\xi$

Codazzi：$\nabla_\alpha b_{\beta\delta}$ 完全对称

曲面唯一：S. $\tilde S$ 有同 I. II. 则只差一刚体对称

存在：φ. ψ 满足 Gauss-Codazzi. 则 ∃ S. φ 为 I. ψ 为 II.

正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$

运动方程 $d\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \omega_{12} & \omega_{13}\\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23}\\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

$dx=\sum_{i=1}^{3}\omega_i e_i \quad de_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}e_j$

有 $\omega_i=(dx,e_i)$ $\quad \omega_{ij}=(de_i,e_j)$. $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$ $\quad d\omega_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge\omega_j$

Gauss 方程：$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}$

Codazzi 方程：$\begin{cases} d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23} \\ d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}\end{cases}$

$dn=-\omega_{13}e_1-\omega_{23}e_2$

结构方程：$\begin{cases} d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2 \\ d\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1 \\ d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23} \\ d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13} \\ d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}\end{cases}$

第一基本形式：$\mathrm{I}=\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2$

第二基本形式：$\mathrm{II}=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$

$\mathrm{II}=h_{11}\omega_1^2+2h_{12}\omega_1\omega_2+h_{22}\omega_2^2$

主方向：$\omega_{13}=k_1\omega_1$ $\quad \omega_{23}=k_2\omega_2$.

Gauss 曲率：$d\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$

$(\omega_{13},\omega_{23})=(\omega_1,\omega_2)B$.

例： 1. 主曲率为常数的曲面.

不能设 $e_1=\frac{r_u}{\sqrt E}, e_2=\frac{r_v}{\sqrt G}$

① 若 $k_1=k_2\equiv$ 常数. 全脐点 ⇒ 平面/球面.

设设 F=0!! ⇒ 只能取主方向.

② 若 $k_1\neq k_2$. 无脐点. 可取主方向为 e_1, e_2. 有 $\begin{cases}W(e_1)=k_1e_1\\W(e_2)=k_2e_2\end{cases}$ 即 $W\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix}$ ⇒ $(\omega_{13},\omega_{23})=(\omega_1,\omega_2)B$

$\begin{cases}\omega_{13}=k_1\omega_1\\ \omega_{23}=k_2\omega_2\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ $d\omega_{13}=d(k_1\omega_1)=k_1d\omega_1=k_1\omega_{12}\wedge\omega_2$

$=\omega_{12}\wedge\omega_{23}=k_2\omega_{12}\wedge\omega_2$ ⟶ $(k_1-k_2)\omega_{12}\wedge\omega_2=0$.

$d\omega_{23}=d(k_2\omega_2)=k_2d\omega_2=k_2\omega_{21}\wedge\omega_1$

$=\omega_{21}\wedge\omega_{13}=k_1\omega_{21}\wedge\omega_1$ ⟶ $(k_1-k_2)\omega_{12}\wedge\omega_1=0$.

$\begin{cases}\omega_{12}\wedge\omega_2=0\\ \omega_{12}\wedge\omega_1=0\end{cases}$ 则 $\omega_{12}=0$.

$\boxed{\begin{matrix}(\omega_{12}=f\omega_1+g\omega_2\\ \Rightarrow f=g=0)\end{matrix}}$ → $K=0$.

$K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}=0$

则一个为0, 一个非0.

不妨设 $k_1\neq 0$. $k_2=0$.

则 $\omega_{23}=k_2\omega_2=0$

则运动方程：

$d\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\cancel{\omega_{12}}&\omega_{13}\\ \cancel{\omega_{21}}&0&\cancel{\omega_{23}}\\ \omega_{31}&\cancel{\omega_{32}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

即 $e_2\equiv$ 常向量.

用与 e_2 垂直的平面P与曲面相交为 $r(s)$

设 $r(s)$. e_1 为单位切向量. e_3 为法向量 ⇐

有 $\begin{cases}\frac{de_1}{ds}=k_1e_3\\ \frac{de_3}{ds}=-k_1e_1\end{cases}$ $r(s)$ 为圆.

2. 证明：若曲面S无脐点. Gauss 曲率 K=0. 则S为可展曲面. ↙ K≡0 的直纹面

法一：正交标架法：由无脐点. 可设 e_1, e_2 为主方向. 有 $(\omega_{13}\ \omega_{23})=(\omega_1,\omega_2)B$ $\quad B=\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}$ $\quad K=k_1k_2=0$. 设 $k_1=0$. $k_2\neq 0$.

则 $\omega_{13}=k_1\omega_1=0$ $\quad \omega_{23}=k_2\omega_2$. $0=d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23}=k_2\omega_{12}\wedge\omega_2 \Rightarrow \omega_{12}/\!/\omega_2$. 可设 $\omega_{12}=f\omega_2$

claim：$\{\omega_2=0\}$ 为S上一直线族. 设 $r(t)$ 为其中一条曲线. $dr=\omega_1e_1+\omega_2e_2=e_1ds$ 有 $\frac{de_1}{ds}=\frac{\omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3}{ds}=\frac{f\omega_2e_2}{ds}=0$ ⇒ e_1 固定不变. $r(t)$ 为直线.

$\omega_2=f\,du+g\,dv=0 \Rightarrow du:dv=-(g:f)$

法二：自然标架法：由无脐点. 可取 (u,v) 为正交曲率坐标网, 即 r_u, r_v 为S的主方向. 此时 $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}E&\\&G\end{pmatrix}$. $\mathrm{II}=\begin{pmatrix}L&\\&N\end{pmatrix}$ 则 $k_1=\frac{L}{E}$. $k_2=\frac{N}{G}$ 由 $k_1k_2=0$. 设 $k_1=\frac{L}{E}\neq 0$. $k_2=\frac{N}{G}=0$.

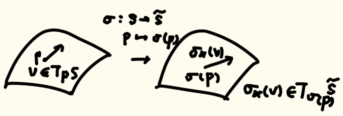
claim：r_v 方向固定不变. (v线-$r(u,v)$ 为直线) 只需证 $r_v\wedge r_{vv}=0$. 由 $\frac{dr_\alpha}{du^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec n$ 即 $r_{vv}=\Gamma_{22}^{1}r_u+\Gamma_{22}^{2}r_v+\underbrace{b_{22}}_{N=0}\vec n$

于是 $r_{vv}\wedge r_v=(\Gamma_{22}^1r_u+\Gamma_{22}^2r_v)\wedge r_v=\Gamma_{22}^1r_u\wedge r_v$ 只需证 $\Gamma_{22}^1=0$. 又由 Codazzi 方程 $\begin{cases}L_v=HE_v\\N_u=HG_u\end{cases}$ $\xrightarrow{H\neq0}$ $G_u=0$ 则 $\Gamma_{22}^1=0$. 证毕. v-线为直线族

第五章 曲面的内蕴几何学 (二维 Riemann 几何初步)

定义： 保曲线长度为等距变换 $\quad \sigma: S\to\tilde S$ 等距 ⇔ $\forall v\in T_pS$ $\ |\vec v|_p=|\sigma_*(\vec v)|_{\sigma(p)}$

切映射：



$\sigma_*: T_pS\to T_{\sigma(p)}\tilde S$

设 $v=ar_u+br_v\in T_pS$.

取曲线 $r(t)=r(u(t),v(t))$ 过点p且在p处与v相切

即 $\begin{cases}r(0)=p\\ \frac{dr}{dt}\big|_{t=0}=\vec v\end{cases}$ $\left(r_u\frac{du}{dt}+r_v\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}=\vec v\right)$

r 的像 $\tilde r(t)=\sigma\circ r(t)$ 为 $\tilde S$ 上的曲线. 过点 $\sigma(p)$.

有 $\frac{d\tilde r}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde r_{\tilde u}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}+\frac{\partial\tilde u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}\right)+\tilde r_{\tilde v}\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}+\frac{\partial\tilde v}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}\right)$

$=a\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial\tilde u}{\partial u}+\tilde r_{\tilde v}\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\right)+b\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial\tilde u}{\partial v}+\tilde r_{\tilde v}\frac{\partial\tilde v}{\partial v}\right)$

即 $\frac{d\tilde r}{dt}\Big|_{t=0}$ 只与 $\vec v$ 和σ有关, 与r无关.

则可定义映射 $\sigma_*: \vec v\mapsto\tilde v$ $\quad \sigma_*(\vec v)=\frac{d\tilde r}{dt}\Big|_{t=0}$. $\quad \sigma_*\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde u}{\partial u}&\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\\ \frac{\partial\tilde u}{\partial v}&\frac{\partial\tilde v}{\partial v}\end{pmatrix}}_{J_\sigma}\begin{pmatrix}\tilde r_{\tilde u}\\ \tilde r_{\tilde v}\end{pmatrix}$

切映射 $\quad \vec v = \frac{dr}{dt}\Big|_{t=0}$

反对称号.

推论： σ 等距 ⇔ $\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=J_\sigma\begin{pmatrix}\tilde E&\tilde F\\ \tilde F&\tilde G\end{pmatrix}J_\sigma^T$

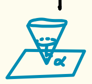
定理： 若 S. $\tilde S$ 定义在同一参数域下. $\begin{matrix}S: r(u,v)\\ \tilde S: \tilde r(u,v)\end{matrix}$ 此时 J_σ 为单位阵 ;若 $\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde E&\tilde F\\ \tilde F&\tilde G\end{pmatrix}$ 则 S. $\tilde S$ 等距.

例： 悬链面. 将曲线 $x=\cosh z$ 绕z轴旋转而成. $r(u,v)=(\cosh v\cdot\cos u,\cosh v\cdot\sin u, v)$ $\quad 0<u<2\pi$ $\quad v\in\mathbb R$ $\quad \begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh^2 v&0\\0&\cosh^2 v\end{pmatrix}$

正螺面. $\tilde r(\tilde u,\tilde v)=(\tilde v\cos\tilde u,\tilde v\sin\tilde u,\tilde u)$ $\quad 0<\tilde u<2\pi$. $\tilde v\in\mathbb R$. $\begin{pmatrix}\tilde E&\tilde F\\ \tilde F&\tilde G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\tilde v^2&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad \sinh v=\frac{e^v-e^{-v}}{2}$ $\quad 1+\sinh^2 v=\cosh^2 v$

取 $\sigma:(u,v)\mapsto(\tilde u,\tilde v=\sinh v)$ $\begin{cases}\tilde u=u\\ \tilde v=\sinh v\end{cases}\Rightarrow J_\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&\cosh v\end{pmatrix}$ $\quad$ 满足 $J_\sigma\begin{pmatrix}\tilde E&\tilde F\\ \tilde F&\tilde G\end{pmatrix}J_\sigma^T=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ 于是σ等距.

例： 圆锥面与平面(局部)等距.



$\begin{cases}x=\rho\sin\alpha\cos u\\ y=\rho\sin\alpha\sin u\\ z=\rho\cos\alpha\end{cases}$ $\quad \rho>0$ $\quad 0<u<2\pi$. $\quad$ 作变换：$(\rho,\theta)\mapsto(\rho,u=\frac{\theta}{\sin\alpha})$ $\quad 0<\theta<2\pi\sin\alpha$

则 $r_\rho=(\sin\alpha\cos\frac{\theta}{\sin\alpha},\sin\alpha\sin\frac{\theta}{\sin\alpha},\cos\alpha)$ $\quad \begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\rho^2\end{pmatrix}$

$r_\theta=(-\rho\sin\frac{\theta}{\sin\alpha},\rho\cos\frac{\theta}{\sin\alpha},0)$

$\mathrm{I}'=\lambda\mathrm{I}$ 则 二者共形

平面：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=0\end{cases}$ $\quad \rho>0$ $\quad 0<\theta<2\pi$ $\quad \tilde r_\rho=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ $\quad \tilde r_\theta=(-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)$ $\quad$ 则 $\begin{pmatrix}\tilde E&\tilde F\\ \tilde F&\tilde G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\rho^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ 则二者等距. 证毕.

性质： $\sigma: S\to\tilde S$ 等距 ⇔ 可选取 S. $\tilde S$ 的正交标架 s.t. $\omega_1=\tilde\omega_1$. $\omega_2=\tilde\omega_2$ ⟵ 等距 ⇒ K相等. 反之不可推出等距☆. 只能用 I 相等.

tip：$K=\frac{-d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$ 可设 $\omega_{12}=f\omega_1+g\omega_2$ 且 $\begin{matrix}d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2=f\omega_1\wedge\omega_2\\ d\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1=g\omega_1\wedge\omega_2\end{matrix}$ ⟶ ω_{12} 可由 ω_1,ω_2 唯一确定. 又 $\omega_1=\tilde\omega_1$. $\omega_2=\tilde\omega_2$ 有 S与 $\tilde S$ 的 Gauss 曲率不变. (K为常数且相等 ⇒ 等距)

共形变换： $\sigma: S\to\tilde S$ 为共形变换. 若 $\tilde{\mathrm I}=\lambda^2\mathrm I$. 即 $\forall p\in S$. $\forall\vec v,\vec\omega\in T_pS$. $\langle\sigma_*(v),\sigma_*(\omega)\rangle_{\sigma(p)}=\lambda(p)\langle\vec v,\vec\omega\rangle_p$ (保角)

定理： 任意两正则曲面 S. $\tilde S$ 都是局部共形的. ⟵ 共形条件. ☆.

例：质坐标架 $\{r, r_u, r_v, \vec{n}\}$，若 $F=0$，$K=?$

对 $I=Edudu+Gdvdv$，引入质坐标架为 $e_1=\frac{r_u}{\sqrt{E}}$，$e_2=\frac{r_v}{\sqrt{G}}$ 则 $\omega_1=dr\cdot e_1=\sqrt{E}du$　$\omega_2=\sqrt{G}dv$

$d\omega_1=-(\sqrt{E})_v du\wedge dv$　设 $\omega_{12}=fdu+gdv \Rightarrow -(\sqrt{E})_v du\wedge dv=f\sqrt{G}du\wedge dv \Rightarrow f=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}$ 同理 $g=\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \Rightarrow \omega_{12}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv \Rightarrow d\omega_{12}=\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)du\wedge dv$

$d\omega_2=(\sqrt{G})_u du\wedge dv$

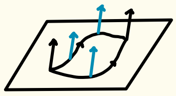
$\omega_1\wedge\omega_2=\sqrt{EG}du\wedge dv \Rightarrow K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$

协变微分

$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi+b_{\alpha\beta}\vec{n}$

$S:\{r; r_u, r_v, \vec{n}\}$　$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\underbrace{\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi}_{切}+\underbrace{b_{\alpha\beta}\vec{n}}_{法}$　有协变导数 $D_\beta r_\alpha=\Gamma^\xi_{\alpha\beta}r_\xi$ 为 $\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}$ 的切向部分.

平面上：① 保长度、夹角、方向.
② 与路径无关



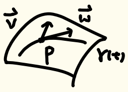
曲面上：保长度、夹角.

平行唯一性：

$r(0)$ 为初始切向量. $\left(\frac{D\vec{v}}{dt}=0\right)$

$\vec{v}_0\in T_{r(0)}S$，$\exists!$ 沿 $r(t)$ 平行的切向量 $\vec{v}(t)\in T_{r(t)}S$

在曲面上，$\vec{v}$ 为曲面 S 上的切向量场. 定义 $\vec{v}$ 在 p 点沿切方向 $\vec{w}$ 的协变导数.



取一条曲线 $r(t)\subset S$，$r(0)=p$，$r'(0)=\vec{w}$，将 $\vec{v}$ 限制在 $r(t)$ 上，设 $\vec{v}(t)=f^\alpha(t)r_\alpha(t)$

（即 $f^1(t)r_1(t)+f^2(t)r_2(t)$）

T 指切平面.

定义 $D_{\vec{w}}\vec{v}=\frac{D\vec{v}}{dt}=\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^T=\left(\frac{df^\alpha(t)}{dt}\cdot r_\alpha+f^\alpha(t)\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot\frac{du^\beta}{dt}\right)^T=\left(\frac{df^\xi(t)}{dt}+f^\alpha\Gamma^\xi_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{dt}\right)r_\xi$

$\frac{D\vec{v}}{dt}=\left(\frac{df^\xi}{dt}+f^\alpha\Gamma^\xi_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{dt}\right)r_\xi$

$\vec{v}$ 平行移动 $\Leftrightarrow \frac{D\vec{v}}{dt}=0$ on $r(t)$. $\Leftrightarrow \frac{df^\xi(t)}{dt}+f^\alpha\Gamma^\xi_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{dt}=0.$

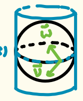
正交标架：$\{r, \overbrace{e_1, e_2}^{切}, \overbrace{e_3}^{法}\}$ 则 $\vec{v}=f_1e_1+f_2e_2$，$d\vec{v}=df_1e_1+f_1(\omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3)+df_2e_2+f_2(\omega_{21}e_1+\omega_{23}e_3)$

$D\vec{v}=(d\vec{v})^T=(df_1+f_2\omega_{21})e_1+(df_2+f_1\omega_{12})e_2$（去掉法向的 e_3）

$\frac{Dr_\alpha}{du^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma$

将 v 限制在 $r(t)$ 上：$\frac{D\vec{v}}{dt}=\left(\frac{df_1}{dt}+f_2\frac{\omega_{21}}{dt}\right)e_1+\left(\frac{df_2}{dt}+f_1\frac{\omega_{12}}{dt}\right)e_2$　若 $=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{df_1}{dt}+f_2\frac{\omega_{21}}{dt}=0\\ \frac{df_2}{dt}+f_1\frac{\omega_{12}}{dt}=0\end{cases}$ on $r(t)$

例：沿球面赤道平行移动

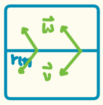


$\frac{D\vec{v}}{dt}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^T=0$

用圆柱面 S_2 包住球面，赤道处相切.

则沿赤道有 $T_{r(t)}S_1=T_{r(t)}S_2 \Rightarrow \vec{v}$ 沿 $r(t)$ 在 S_1 平移
$\Leftrightarrow \vec{v}$ 沿 $r(t)$ 在 S_2 平移

柱面与平面等距 $\Rightarrow$ 将柱面展为平面.



测地线

曲面 S 上一条曲线 $r(t)=r(u^1(t), u^2(t))$ 为测地线，若其切向量场 $r'(t)$ 沿 $r(t)$ 平移. 即 $\frac{Dr'(t)}{dt}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2r(t)}{dt^2}\right)^T=0.$

测地曲率为 0 的曲线.

测地曲率：$\kappa^2=\kappa_g^2+\kappa_n^2$　$\kappa_g=\left(\frac{d^2r}{ds^2}, e_2\right)$，$\kappa_n=\left(\frac{d^2r}{ds^2}, e_3\right)$

正交标架：$\{r, e_1, e_2, e_3\}$　$e_1=\frac{dr}{ds}$　$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{de_1}{ds}=\frac{\omega_{12}e_2}{ds}+\frac{\omega_{13}e_3}{ds}$

$\vec{\kappa_g}=\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}\right)r_\alpha$　$\kappa_g=\langle\vec{\kappa_g}, e_2\rangle=\langle\vec{\kappa_g}, \vec{n}\wedge\frac{dr}{ds}\rangle$

命题 3.2 (Liouville)　设 (u,v) 是曲面 S 的正交参数，$\mathrm{I}=Edudu+Gdvdv$；$C: u=u(s), v=v(s)$ 是曲面上一条弧长参数曲线. 设 C 与 u 线的夹角为 θ，则 C 的测地曲率为

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}\overbrace{-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}}^{\kappa_g^u}\cos\theta+\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}}^{\kappa_g^v}\sin\theta.$$

$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta.$

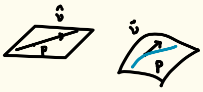
$\sqrt{E}\cdot\frac{du}{ds}=\cos\theta$　$\frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}$.　$\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$

$\sqrt{G}\cdot\frac{dv}{ds}=\sin\theta$

u-线的 $\kappa_g^u=-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}$ $(\theta=0)$　v-线的 $\kappa_g^v=\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}$ $(\theta=\frac{\pi}{2})$

$\boxed{测地线方程：\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\cdot\frac{du^\gamma}{ds}=0.}$ → 对 $\alpha=1,2$ 分别成立.

定义：κ_g 为 0 的曲线为测地线.



在平面上，任给 $\vec{v}$，$\exists$ 直线过点 p 且与 $\vec{v}$ 同向

在曲面上，$\forall p\in S$，$\vec{v}\in T_pS$ 为单位切向量，则 $\exists!$ 曲面上一条测地线 $r(s)$ 过点 p，在 p 点与 $\vec{v}$ 相切 $(r'(s)\parallel\vec{v})$

tip：① 测地线 $\Leftrightarrow \kappa_g=0 \Leftrightarrow \frac{Dr'(s)}{ds}=0$（即切向量沿自身平移）

② 测地线方程只与 I 有关，等距变换下不变

$\kappa\vec{N}=\vec{\kappa_g}+\kappa_n\vec{n}$ ← 曲面法向　则 测地线 $\Leftrightarrow \vec{\kappa_g}=0 \Leftrightarrow \vec{N}\parallel\vec{n}$

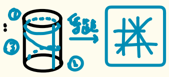
曲线曲率　曲线主法向　测地曲率

（即除去 E^3 中曲线，重曲面曲率规范在 E^3 上的弯曲）

例：1. 球面：

大圆为测地线均
$\xleftrightarrow{可证明}$ 测地线均为大圆.

2. 圆柱面：

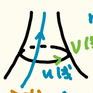


平面测地线为直线

由等距不变性 $\Rightarrow$ ① 平行圆 ② 直线 ③ 圆柱螺线

命题 3.6　曲面上的正则曲线 C 是测地线当且仅当沿着 C，曲线的主法向量与曲面的法向量平行.

3. 旋转曲面：



$r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, f(u))$ | $\kappa_g^u=-\frac{(\ln\sqrt{E})_v}{2\sqrt{G}}$　$\kappa_g^v=\frac{(\ln\sqrt{G})_u}{2\sqrt{E}}$)

找测地线：

u 线为测地线.
v 线不一定是测地线

① Liouville 公式　$E=1+f'^2$　$F=0$　$G=u^2$

$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta$，$\theta$ 为曲线与 u 线的夹角.

设曲线 $C: r(s)=r(u(s), v(s))$ 与 u-线夹角为 θ

① 求 E.G
② 代入公式
③ 求 $\frac{dv}{du}$.

有 $\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta$　$\Rightarrow$ 令 $\kappa_g=0$，有 $\frac{d\theta}{ds}=-\frac{\sin\theta}{u\sqrt{1+f_u^2}}$

$\frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+f_u^2}}$　$\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}=\frac{\sin\theta}{u}$

$\Rightarrow \frac{du}{d\theta}=\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\theta}=-\frac{u\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow d(\ln u+\ln\sin\theta)=0$ 即 $u\sin\theta=C_0 \Rightarrow \tan\theta=\frac{C_0}{\sqrt{u^2-C_0^2}}$

$\frac{dv}{d\theta}=-\sqrt{1+f_u^2} \Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{\sqrt{1+f_u^2}}{u}\cdot\tan\theta=\frac{C_0\sqrt{1+f_u^2}}{u\sqrt{u^2-C_0^2}}$

② 用测地线方程. (u,v) 为正交参数. $\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}(\ln E)_u=\frac{f_uf_{uu}}{1+f_u^2}$　$\Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G}=0$　$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}(\ln E)_v=0$

$\Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E}=-\frac{u}{1+f_u^2}$　$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}(\ln G)_v=0$，$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}(\ln G)_u=\frac{1}{u}$

$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\cdot\frac{du^\gamma}{ds}=0.$

$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\cdot\frac{du^\gamma}{ds}=0 \xRightarrow{\begin{cases}u^1=u\\u^2=v\end{cases}} \begin{cases}\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0 & ① (\alpha=1)\\ \frac{d^2v}{ds^2}+2\cdot\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}=0 & ② (\alpha=2)\end{cases}$

对 $\alpha=1,2$ 成立

$r(s)$ 以 s 为弧长参数

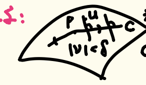
$\Rightarrow 1=|r'(s)|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=(1+f_u^2)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+u^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$ ③

由 ② $\Rightarrow \frac{1}{dv/ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)+2\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{ds}=0 \xRightarrow{积分} \frac{dv}{ds}=\frac{c}{u^2} \xRightarrow{代入③} \left(\frac{du}{ds}\right)^2=\frac{u^2-c}{u^2(1+f_u^2)} \Rightarrow \frac{dv}{du}=\pm\frac{c\sqrt{1+f_u^2}}{u\sqrt{u^2-c}}$（找到 u,v 关系即可）

定理：曲面中曲线 C 为连接 A.B 点长度最短的曲线，则 C 为测地线.

① 变分法　$L=\int|r'(s)|ds=\int\sqrt{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}ds=\int\sqrt{E+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}du$　将 $v=v(u)$ 视为 u 的函数. $u\in[a,b]$，$v_t=v(u)+t\varphi(u)$　$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

由上述定理，$0=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}L(v_t)=\int_a^b\frac{Gv'(u)\varphi'(u)}{\sqrt{E+G(v'(u))^2}}du=-\int_a^b\left(\frac{Gv'(u)}{\sqrt{E+G(v'(u))^2}}\right)'\varphi(u)du$　$\forall\varphi(u) \Rightarrow \frac{dv}{du}=\pm\frac{c\sqrt{1+f_u^2}}{u\sqrt{u^2-c}}$

测地平行坐标系：


为测地线
C对应 $u=0$. 有 $E=\langle r_u,r_u\rangle=1$. 有 $I=ds^2=du^2+G(u,v)dv^2$ $G(0,v)=1$ ($u=0$为C. $G(0,v)$为C弧长参数)

测地极坐标系与法坐标系.

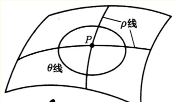
S为 E^3 上曲面. $p\in S$. $\vec{v}$ 为p处一单位切向量. $\gamma_v(s)$ 为以p出发.与v相切的测地射线. $\exists\,\varepsilon>0$. $|s|<\varepsilon$ 时 对 $\forall\vec{v}\in T_pS$. $\gamma_{\vec{v}}(s)$ 是有定义的.

定义：指数映射. $0\neq w\in T_pS$. $|w|=\rho$. 定义 $\exp_p: T_pS\to S$ 为p处指数映射. $|w|<\varepsilon$ 时有定义
$w\mapsto \exp_p(w)=\gamma(\frac{w}{\rho},\rho)$

指数映射：从切平面原点的射线→曲面的映射
将过原点的直线 $\rho\vec{v}\mapsto$ 测地线 $\gamma(\vec{v},\rho)=\exp_p(\rho\vec{v})$

定义：取p正交标架 e_1,e_2 建立 T_pS 直角坐标系. 对于 $w=x^1e_1+x^2e_2\to r(x^1,x^2)=\exp_p(w)$. (x^1,x^2) 称为以p为原点的法坐标系.

由于 $\begin{cases}x^1=\rho\cos\theta\\ x^2=\rho\sin\theta\end{cases}$. (ρ,θ) 称为以p为原点的测地极坐标系.



命题：(x^1,x^2) 为曲面在p附近的正则参数

定理：设曲面在以p为原点的法坐标系 (x^1,x^2) 下第一基本形式 $I=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. 有 $(g_{\alpha\beta})(p)=\delta_{\alpha\beta}$. $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(p)=0$. $\forall\alpha.\beta.\gamma=1.2$.

证明：① $\frac{\partial r}{\partial x^1}\Big|_p=e_1$. $\frac{\partial r}{\partial x^2}\Big|_p=e_2$. 则 $g_{\alpha\beta}(p)=\delta_{\alpha\beta}$

② $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\langle\frac{\partial r}{\partial x^\alpha},\frac{\partial r}{\partial x^\beta}\rangle=\langle r_{\alpha\gamma},r_\beta\rangle+\langle r_\alpha,r_{\beta\gamma}\rangle=(\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}g_{\xi\beta}+\Gamma^\xi_{\beta\gamma}g_{\xi\alpha})|_p$

参数域上直线 $\theta\equiv\theta_0$. 在 $\exp_p$ 下的像为测地线 $r(\rho)=\exp_p(\rho\vec{v}_0)=r(x^1,x^2)$ $\begin{matrix}x^1=\rho\cos\theta\\x^2=\rho\sin\theta.\end{matrix}$

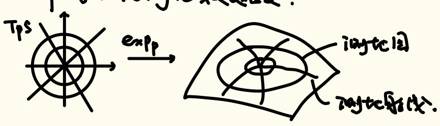
$\Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\underbrace{\frac{dx^\beta}{d\rho}\cdot\frac{dx^\gamma}{d\rho}}_{\sin\theta\ \cos\theta}=0$ 令 $\rho\to0.\Rightarrow\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(p)=0$.

测地极坐标有类似性质. 有 $\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho\Rightarrow(\rho,\theta)$ 也为正则参数

定理：在测地极坐标 (ρ,θ) 下. 第一基本形式有 ① $I=d\rho^2+G(\rho,\theta)d\theta^2$. ② $\lim\limits_{\rho\to0}G=0$. $\lim\limits_{\rho\to0}(\sqrt{G})_\rho=1$

tip：$F=0$ 称Gauss引理

即测地圆与测地线处处正交.



证明：① $E=|r_\rho|^2=1$. $F=\langle r_\rho,r_\theta\rangle$ $r_\theta|_p=\frac{\partial r}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+\frac{\partial r}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial\theta}=e_1(-\rho\sin\theta)+e_2(\rho\cos\theta)\Big|_{\rho=0}=0$. 则 $F=0$.
ρ线为弧长参数测地线.

② $\sqrt{G}=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\Rightarrow\rho\to0$ 时 $G\to0$.
$(\sqrt{G})_\rho=\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}+\rho\cdots\Rightarrow\rho\to0.(\sqrt{G})_\rho\to1$

测地极坐标应用：① 测地线(局部)最短性
② 常Gauss曲率曲面
③ Gauss曲率的内蕴几何意义

② 已知：正交参数 (u,v) 下. $I=\begin{pmatrix}E&0\\0&G\end{pmatrix}$ 时 Gauss方程 $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)\Rightarrow K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}\equiv$ const

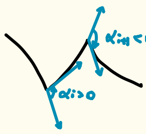
测地极坐标下 $E=1$

则 $(\sqrt{G})_{\rho\rho}+K\sqrt{G}=0$ 1° $K=0\Rightarrow(\sqrt{G})_\rho=f(\theta)$ 由 $\lim\limits_{\rho\to0}(\sqrt{G})_\rho=1\Rightarrow f(\theta)=1$ 则 $(\sqrt{G})_\rho=1\Rightarrow\sqrt{G}=\rho+g(\theta)$ 又 $\lim\limits_{\rho\to0}\sqrt{G}=0\Rightarrow g(\theta)=0$ 则有 $\sqrt{G}=\rho\Rightarrow G=\rho^2$ 则 $I=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$ —— 平面

2° $K=\frac{1}{a^2}\Rightarrow\sqrt{G}=f(\theta)\cos\frac{\rho}{a}+g(\theta)\sin\frac{\rho}{a}\Rightarrow$ 同上条件. 有 $I=d\rho^2+a^2\sin^2\frac{\rho}{a}d\theta^2$ —— 半径为a的球面.

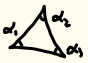
3° $K=-\frac{1}{a^2}\Rightarrow I=d\rho^2+a^2\sinh^2\frac{\rho}{a}d\theta^2$ —— 双曲平面

推论：K为常数且相等的两曲面局部等距.



$\alpha_i>0$ if $(r_-'(t_i),r_+'(t_i),\vec{n})>0$
$\alpha_i<0$ if $(r_-'(t_i),r_+'(t_i),\vec{n})<0$

Gauss-Bonnet公式：$D\subset S$ 为单连通区域. ∂D 为分段光滑简单闭曲线. α_i 为顶点处外角. 则 $\iint_D KdA+\int_{\partial D}k_gds+\sum\alpha_i=2\pi$

测地三角形：


有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi=\iint_D KdA$ ($k_g=0$)

整体曲面的Gauss-Bonnet公式：$\iint_D KdA+\int_{\partial D}k_gds+\sum\alpha_i=2\pi\chi(D)$ ($\chi(D)=$面-边+顶点. 为Euler示性数)

推论：若 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 为紧致曲面. 则 $\iint_\Sigma KdA=2\pi\chi(\Sigma)$ ($\chi(\Sigma)=2(1-g)$. g为亏格.(洞的个数))

紧致曲面：无边界的紧致=闭流形

例：球面(拓扑球) $\iint_\Sigma KdA=4\pi$ ($g=0$). 环面 $\iint_\Sigma KdA=0$ ($g=1$)

应用：一：一个紧致曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$. 若 $K\geq0$ on Σ. 则 Σ 为拓扑球(同胚于标准球面)

由Gauss-Bonnet公式：$0\leq\iint_\Sigma KdA=2\pi\chi(\Sigma)=4\pi(1-g)\Rightarrow g=0$ 或 1

性质：一个紧致曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 上至少有一个椭圆点(即 $K>0$ 的点)

故一定有 $K>0$ 在椭圆点附近成立(由连续性) $\Rightarrow g=0$. 为拓扑球.

二：紧致曲面 Σ. $K>0$. 在 Σ 上有两条简单闭测地线 P_1,P_2 则 P_1 与 P_2 必相交

由 $K>0$. Σ 为拓扑球. 若 P_1,P_2 不相交. 不自交 则 $P_1\cup P_2$ 包围一区域D. $\chi(D)=0$.

$\underbrace{\iint_D KdA}_{>0}+\underbrace{\int_{\partial D}k_gds}_{=0}+\underbrace{\sum\alpha_i}_{=0}=2\pi\underbrace{\chi(D)}_{=0}$. 矛盾！ $g=1$

$\frac{d\vec{n}}{ds}=-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b}\Rightarrow\left|\frac{d\vec{n}}{ds}\right|=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}>0$

三：$r(s)\subset\mathbb{R}^3$ 为闭曲线. 以s为弧长参数. $\kappa>0$. Frenet标架：$\{r(s);t(s).n(s).b(s)\}$. $\vec{n}(s)\subset S^2$ 球面上. 画出一条闭曲线. 称为主法标线. 为正则曲线.

Jacobi定理：若主法标线 $\vec{n}(s)\subset S^2$ 为简单闭曲线. 则它将球面分为面积相等的两部分.

设 $\vec{n}(s)$ 将 S^2 分为 D_1,D_2 对 D_1：$\iint_{D_1}\underbrace{K}_{=1}dA+\int_P\underbrace{k_g}_{=0}ds=2\pi=\frac{1}{2}\text{Area}(S^2)$ 则可得证

$\chi(球)=2$
$\chi(圆盘.单连通带边界曲面)=1$
$\chi(带一个洞的圆盘)=0\Leftarrow$ → $\chi=V-E+F=6-9+3=0.$

点 边 面

只需证 $\int_P k_g dA=0$. 设ρ为主法标线 $\vec{n}(s)$ 的弧长参数

$\left|\frac{d\vec{n}}{d\rho}\right|=1\Rightarrow\left|\frac{d\vec{n}}{ds}\right|\cdot\left|\frac{ds}{d\rho}\right|=1\Rightarrow d\rho=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}ds$

$k_g=\langle\frac{d^2\vec{n}}{d\rho^2},\vec{n}\wedge\frac{d\vec{n}}{d\rho}\rangle$ ($\vec{k}_g=\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\vec{n}}{d\rho}\right)\right]^T$)

$=\langle\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{d\rho}\right)^2,\vec{n}\wedge\frac{d\vec{n}}{ds}\rangle\frac{ds}{d\rho}\overset{\dot{\vec{n}}=-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b}}{=\!=\!=}(\kappa\frac{d\tau}{ds}-\tau\frac{d\kappa}{ds})\left(\frac{ds}{d\rho}\right)^3$

$\int_P k_g d\rho=\int_P(\kappa\frac{d\tau}{d\rho}-\tau\frac{d\kappa}{d\rho})\left(\frac{ds}{d\rho}\right)^2d\rho=\int_P\frac{\kappa\frac{d\tau}{d\rho}-\tau\frac{d\kappa}{d\rho}}{\kappa^2+\tau^2}d\rho=\int_P\frac{d}{d\rho}(\arctan\frac{\tau}{\kappa})d\rho=0$

四：定义单位切向量场 $e_1=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ on $\Sigma\setminus\{p_1,\cdots,p_N\}$


...

应用：$\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 为紧致曲面. $\cdot\int_\Sigma|K|dA\geq4\pi(1+g)$ $\cdot\int_\Sigma H^2dA\geq4\pi$