

# 三维球面的五顶点内接多面体的最大表面积

PB23010356 张竞一

2025 年 10 月 15 日

## 1 引言与主要结果

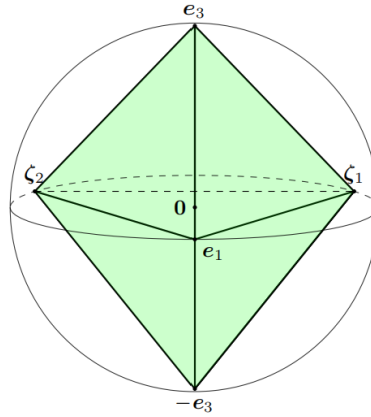
本文研究内接于单位球面  $S^2$  的多面体，特别是具有特定顶点数  $v$  的多面体。目标是找到这些多面体中具有最大表面积的多面体，并定义一种衡量观察到的多面体与理想多面体之间差异的指标。

我们可以定义表面积偏差  $S(P)$ 。理想多面体  $\hat{Q}_{SA}(P)$  是与  $P$  顶点数相同且在  $S^2$  内接的表面积最大的多面体。表面积偏差定义为：

$$S(P) := \frac{S(\hat{Q}_{SA}(P)) - S(P)}{S(\hat{Q}_{SA}(P))}$$

其中  $S(P)$  表示多面体  $P$  的表面积。

本文的主要成果是确定了内接于  $S^2$  且与  $P$  组合等价的全局表面积最大的多面体。



### 定理 1

设  $P$  是从单位球  $S^2$  上选取的五个点的凸包，则有

$$S(P) \leq \frac{3\sqrt{15}}{2} = 5.809475\dots$$

当且仅当  $P$  是由顶点

$$e_3, -e_3, e_1, \zeta_1 := \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \zeta_2 := \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

构成的三角双锥体的旋转体时，等号成立。□

如果  $P$  是一个观察到的多面体，并且与此三角双锥体组合等价，则有

$$S(P) = 1 - \left( \frac{2}{3\sqrt{15}} \right) S(P).$$

对于  $v = 4, 6, 12$  的情况，全局表面积最大多面体已被明确确定，分别为：

①  $v = 4$ ：正四面体

②  $v = 6$ ：立方八面体

③  $v = 12$ ：正十二面体

可以看出这些多面体的面均为等边三角形。

当  $v = 5$  时，球面上不存在正多面体。尽管如此，我们可以预料到最优解是一种具有最高对称性的五点构型，即三角双锥体（在球面上具有两点位于北极和南极，三点形成一个等边三角形的赤道面）。

## 2 相关结果

我们简要讨论几何中与定理 1 相关的已知结果。

设  $P$  是  $\mathbb{R}^3$  中的一个多面体，具有  $v$  个顶点、 $e$  条边和  $f$  个面。假设  $P$  的顶点位于单位球面  $S^2$  上，并且  $P$  满足条件 (A):  $P$  的外接球心（或内切球心）到多面体各面的垂足位于对应面的内部，到边的垂足位于对应的边上。根据 L. Fejes Tóth 的结果 [1]，这样的多面体的表面积被以下不等式限制：

$$S(P) \leq e \sin \frac{\pi f}{e} \left( 1 - \cot^2 \frac{\pi f}{2e} \cot^2 \frac{\pi v}{2e} \right).$$

等号仅在正多面体的情况下成立。

Linhart[2] 后来证明了条件 (A) 中关于面的条件是多余的，有如果  $P$  是一个具有  $v$  个顶点且内接于  $S^2$  的多面体，并且满足条件 (A) 中棱的部分，则有

$$S(P) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}(v-2) \left( 1 - \frac{1}{3} \cot^2 \frac{\pi v}{6(v-2)} \right) := G(v) \quad (1)$$

等号成立当且仅当  $v = 4, 6$  或  $12$ ，且  $P$  分别为正四面体、立方八面体或正十二面体。

要应用 (1)，我们必须证明任意表面积最大的多面体都满足边的条件 (A)。假设  $Q_v^*$  是内接于单位球  $\mathbb{B}_2^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$  且具有  $v$  个顶点的表面积最大的多面体，其中  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  表示  $\mathbb{R}^3$  中的欧式范数。由于  $Q_v^*$  的每条边  $E$  上的点  $\mathbf{x}^*$  在  $E$  的凸包  $\bar{E}$  中，并且  $Q_v^*$  的所有顶点都在边界上，因此  $\bar{E} \cap \mathbb{B}_2^3 = E$ 。这表明表面积最大的多面体满足足部条件。由此可知（由 (1)），正四面体、立方八面体和正十二面体分别是  $v = 4, 6, 12$  时唯一的表面积最大多面体（旋转意义下）。

我们现在转向本文考虑的问题。由 (1)，

$$G(5) = \frac{9\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \cot^2 \frac{5\pi}{18} \right) \approx 5.96495.$$

另一方面，定理 1 中的三角双锥体满足足部条件，且其表面积为

$$\frac{3\sqrt{15}}{2} \approx 5.809 < G(5).$$

因此，在定理 1 中的三角双锥体情况下，(1) 中存在严格不等式，所以我们需要一个新的论证来证明它是最大化多面体。主要步骤是确定球冠内具有最大侧表面积的  $(v-1)$  棱锥，假设棱锥的底面位于球冠的底面上。然后通过将这一结果应用于所有具有  $v=5$  个顶点的多面体的组合类型，定理 1 得证。

在下表中，我们总结了已明确确定全局表面积最大化多面体的情况。对于固定的  $v \geq 4$ ，记  $Q_v^*$  表示内接于  $S^2$  且具有  $v$  个顶点的表面积最大多面体。

表 1: 内接于  $S^2$  且具有  $v \leq 12$  个顶点的最大表面积多面体列表

| $v$ | $G(v)$                                 | $S(Q_v^*)$                | 最大化多面体 $Q_v^*$ | $S(P)$                                     |
|-----|--|---------------------------|----------------|--|
| 4   | $\frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.62$      | $\frac{8}{\sqrt{3}}$      | 正四面体           | $1 - \frac{\sqrt{3}}{8}S(P)$               |
| 5   | $\approx 5.96$                         | $\frac{3\sqrt{15}}{2}$    | 三角双锥体          | $1 - \frac{2}{3\sqrt{15}}S(P)$             |
| 6   | $4\sqrt{3} \approx 6.93$               | $4\sqrt{3}$               | 立方八面体          | $1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}S(P)$              |
| 7   | $\approx 7.65$                         | -                         | -              | -  |
| 8   | $\approx 8.21$                         | -                         | -              | -  |
| 9   | $\approx 8.65$                         | -                         | -              | -  |
| 10  | $\approx 9.02$                         | -                         | -              | -  |
| 11  | $\approx 9.32$                         | -                         | -              | -  |
| 12  | $2\sqrt{75} - 2\sqrt{15} \approx 9.57$ | $2\sqrt{75} - 2\sqrt{15}$ | 正十二面体          | $1 - \frac{S(P)}{2\sqrt{75} - 2\sqrt{15}}$ |

### 3 定义与记号

我们的一切论证在三维欧式空间  $\mathbb{R}^3$  中进行。

点  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  到闭集  $A \subset \mathbb{R}^3$  的距离定义为

$$\text{dist}(\mathbf{x}, A) = \min_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

对于两个平面  $\mathbf{u} \in S^2$  和标量  $b \in \mathbb{R}$ ，我们定义半空间

$$H = H(\mathbf{u}, b) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \geq b\}$$

令

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \geq b\}.$$

以及

$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \leq b\}.$$

这两个集合分别表示  $\mathbb{R}^3$  中由平面  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = b$  划分的两个闭半空间（类似地定义开半空间）。

向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  的正交补空间定义为

$$\mathbf{x}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}.$$

集合  $A \subset \mathbb{R}^3$  的仿射包记为  $\text{aff}(A)$ ，内部记为  $\text{int}(A)$ ，相对内部记为  $\text{relint}(A)$ ，凸包记为  $\text{conv}(A)$ ，定义为包含  $A$  的最小凸集。

对于  $v \geq 2$ ，点  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^3$  的凸包记为  $\text{conv}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_v)$ 。多面体是有限个闭半空间的交集（可能是无界的）。此后，我们仅考虑具有非空内部的有界多面体，它可以表示为有限个点的凸包，反之亦然。

①对于  $v \geq 3$ ，如果  $P \subset \mathbb{R}^3$  是  $v$  个点的凸包且这些点仿射无关，则称  $P$  为  $v$ -面体。

②对于  $v \geq 5$ ，令  $Q$  是一个  $(v-2)$ -边形， $I$  是一个线段，且  $I$  与  $Q$  在单一点相交，则  $Q \cup I$  的凸包称为  $v$ -双锥体。

多面体  $P$  的面是一个  $v$ -边形  $F$ ，它是  $P$  与一个支撑超平面  $H$  的交集（即  $H \cap P \neq \emptyset$  且  $P \subset H^+$  或  $P \subset H^-$ ）。

两个多面体  $P$  和  $Q$  是组合等价的，如果存在一个双射  $\varphi$  使得：

① $\varphi$  将  $P$  的所有面的集合  $\{F\}$  映射到  $Q$  的所有面的集合  $\{G\}$ 。

②对于任意两个面  $F_1, F_2 \in \{F\}$ ，包含关系  $F_1 \subset F_2$  成立当且仅当  $\varphi(F_1) \subset \varphi(F_2)$  成立。

## 4 定理 1 的证明

我们将使用部分变分法来证明定理 1。该方法指出，如果函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  在点  $(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)$  处取得最大值（或最小值），那么对于任意  $1 \leq k \leq n-1$ ，函数

$$g(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

在点  $(x_{k+1}, \dots, x_n) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$  处也必须取得最大值（或最小值）。

我们下面证明多个引理。第一个引理是明显的：

### [引理 1]

具有 5 个顶点的多面体只有两种组合类型：**四棱锥**和**5-双锥体**。□

因此，要证明定理 1，只需确定理想的四棱锥和理想的 5-双锥体并比较它们的表面积。我们通过优化每种组合类型来实现这一点，首先推导出最大化多面体必须满足的必要几何条件，这使得我们可以排除大多数多面体。

下一个引理也是明显的：

### [引理 2]

设  $k \geq 3$ 。在半径为  $R$  的圆中，所有内接的凸  $k$ -边形中，正  $k$ -边形具有最大周长  $2kR \sin \frac{\pi}{k}$  和最大面积  $\frac{1}{2}kR^2 \sin \frac{2\pi}{k}$ 。□

定理 1 证明的主要步骤是以下引理，它给出了最大化多面体的必要条件：

**[引理 3]**

设  $P$  是  $\mathbb{B}_2^3$  中高度为  $h$  的球冠内的一个  $(v-1)$  棱锥，且  $P$  的底面顶点位于  $\mathbb{B}_2^3$  的边界上。假设  $P$  的顶点的投影构成了一个  $(v-1)$ -边形，并且  $P$  的底面是一个正  $(v-1)$ -边形，内接于球冠底面的边界。那么  $P$  的侧表面积被最大化当且仅当  $P$  的高度为  $h$ ，且底面是一个正  $(v-1)$ -边形，内接于球冠底面的边界。

证明. 首先，固定  $v \geq 4$  和一个法向量  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$ ，法向量决定了从单位球中切出高度为  $h$  的球冠的平面；由  $\mathbb{S}^2$  的旋转不变性和侧表面积函数的性质，不失一般性，我们可以假设  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3$ 。固定  $h \in (0, 2)$ ，并定义平面

$$H(h) := \mathbf{e}_3 + (1-h)\mathbf{e}_3.$$

对于  $t \in (0, h)$ ，定义  $(v-1)$  棱锥的集合：

$$\mathcal{A}_t := \{[x_1, \dots, x_v] : [x_1, \dots, x_{v-1}] \subset H(h) \cap \mathbb{B}_2^3, x_v \in \text{int}(H(h)^+) \cap \mathbb{B}_2^3,$$

$$x'_v \in [x_1, \dots, x_{v-1}], \text{dist}(x'_v, H(h)) = t\}.$$

并令

$$\mathcal{A}_h := \bigcup_{0 < t \leq h} \mathcal{A}_t.$$

我们的目标是优化问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & L(P) \\ \text{s.t.} \quad & P \in \mathcal{A}_h \end{aligned}$$

其中  $L(P)$  表示  $P$  的侧表面积。设  $P^*$  是上述优化问题的解。我们将证明  $P^*$  的高度为  $h$ ，且底面是一个正  $(v-1)$ -边形，内接于  $H(h) \cap \mathbb{S}^2$ 。

**步骤 1:** 固定  $t \in (0, h)$ ，并令  $P \in \mathcal{A}_t$ 。不失一般性，我们可以假设底面  $(v-1)$ -边形的边按逆时针顺序标记为  $[x_1, x_2], \dots, [x_{v-2}, x_{v-1}]$ 。对于  $i = 1, \dots, v-2$ ，记边  $i$  的边长为

$$s_i := \|x_{i+1} - x_i\|_2,$$

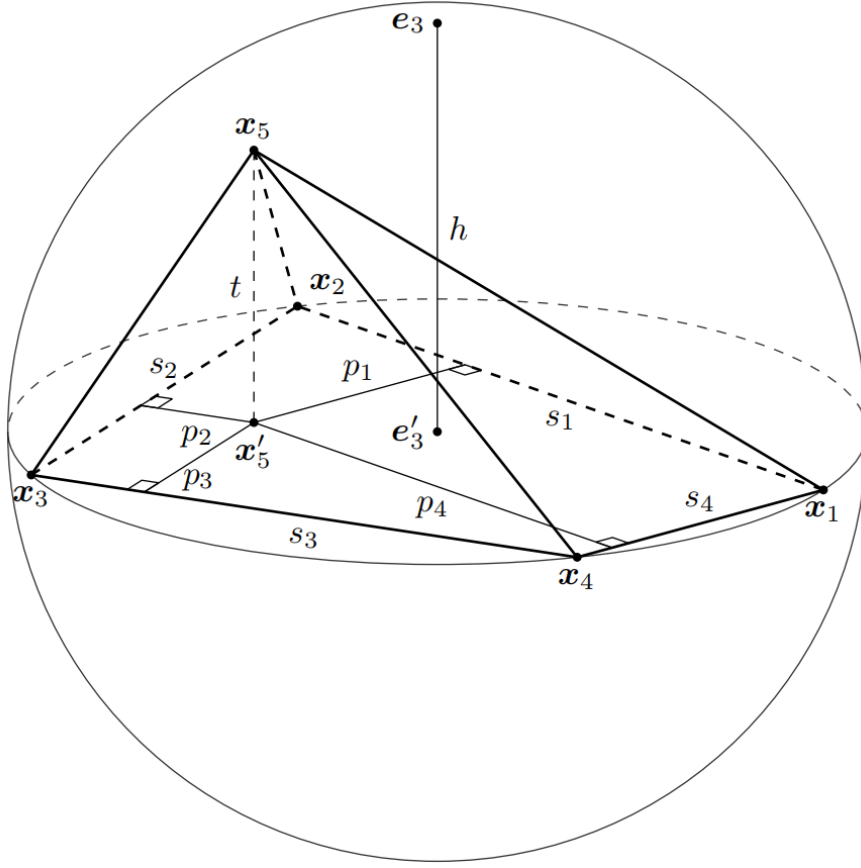
并令

$$p_i := \text{dist}(x'_v, \text{aff}([x_i, x_{i+1}]))$$

表示  $x'_v$  到包含边  $i$  的直线的正交投影长度。 $P$  的侧表面积为

$$L(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i \sqrt{p_i^2 + t^2}$$

如图 2 所示：



在第一步中，我们最大化  $L(P) = L(P, h, t, c)$ ，其中  $P \in \mathcal{A}_t$  是所有底面面积为  $c > 0$  的  $(v-1)$  棱锥。也就是说，我们解决以下优化问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & L(P, h, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i \sqrt{p_i^2 + t^2} \\ \text{s.t.} \quad & P \in \mathcal{A}_t, \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i p_i = c. \end{aligned} \quad (2)$$

为了找到此最大化问题的必要条件，我们将解决一个约束松弛的问题。内接于  $S^2$  的最大表面积  $(v-1)$  棱锥（或  $v$ -双锥体）的一个必要条件是：顶点（或顶点集）的投影位于底面  $(v-1)$ -边形（中心  $(v-2)$ -边形）的内部。因此，为了证明定理 1，只需考虑满足条件  $x'_v \in \text{int}([x_1, \dots, x_{v-1}])$  的棱锥。现在由引理 2，我们考虑以下问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & L_1(P, h, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i \sqrt{p_i^2 + t^2} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i p_i \leq \frac{1}{2} (v-1) R(h) \sin \frac{2\pi}{v-1}, \\ & p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, v-1 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $R(h) := \sqrt{1 - (1-h)^2}$  是  $H(h) \cap \mathbb{B}_2^3$  的半径。最大值在可行域上取得，并且由于我们不限制  $s_i$  为非负值，有  $L_1$  没有全局最小值。当所有  $s_i > 0$  时最大值取得。拉格朗日函数为

$$\mathcal{L} := L_1 - \lambda \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v-1} s_i p_i - \frac{1}{2} (v-1) R(h) \sin \frac{2\pi}{v-1} \right) + \sum_{i=1}^{v-1} \mu_i p_i$$

其中  $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_{v-1} \geq 0$  是 KKT 乘子。特别地，一阶必要条件  $\nabla \mathcal{L} = 0$  得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = \frac{1}{2} \sqrt{p_i^2 + t^2} - \frac{\lambda}{2} p_i = 0$$

这意味着

$$p_1 = \dots = p_{v-1}. \quad (4)$$

即以  $x'_v$  为中心、半径为  $r = p_1 = \dots = p_{v-1}$  的内切球是包含  $[x_1, \dots, x_{v-1}]$  的最大球，并且与底面的每条边相切。注意到 (2) 的一个临界点也是 (3) 的一个临界点，因此最优多面体  $P^*$  满足条件 (4)。

**步骤 2:** 在步骤 1 中，我们发现对于每个  $h \in (0, 2)$ ，在所有  $(v-1)$  棱锥  $P \in \mathcal{A}_h$  中，侧表面积的最大值是在满足  $p_1 = \dots = p_{v-1}$  的某个棱锥  $P^*$  处取得的，并且存在一个内切于底面且与底面每条边相切的球。因此，问题简化为

$$\begin{aligned} \max \quad & L(P, h, t) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{v-1} s_i \right) \sqrt{r(P, h)^2 + t(P)^2} \\ \text{s.t.} \quad & P \in \mathcal{A}_h, \\ & p_1 = \dots = p_{v-1} =: r(P, h). \end{aligned}$$

在此约束下，以下不等式成立：

(i) 根据引理 2，

$$\sum_{i=1}^{v-1} s_i \leq 2(v-1)R(h) \sin \frac{\pi}{v-1}$$

当且仅当  $[x_1, \dots, x_{v-1}]$  是正多边形且  $x_1, \dots, x_{v-1} \in \mathbb{S}^2 \cap H(h)$  时等号成立；

(ii)

$$r(P, h) \leq R(h) \cos \frac{\pi}{v-1}$$

当且仅当  $[x_1, \dots, x_{v-1}]$  是正多边形时等号成立；

(iii)  $t(P) \leq h$ ，当且仅当  $x_v = e_3$  时等号成立。

等号在 (i)、(ii) 和 (iii) 中同时成立当且仅当  $P$  的高度为  $h$ ，且底面是一个正  $(v-1)$ -边形，内接于  $H(h) \cap \mathbb{S}^2$ 。因此，

$$\begin{aligned} L(P) &= \frac{1}{2} \times 2(v-1) \sin \frac{\pi}{v-1} R(h) \times \sqrt{R(h)^2 \cos^2 \frac{\pi}{v-1} + h^2} \\ &= (v-1) \sin \frac{\pi}{v-1} \sqrt{2h - h^2} \sqrt{h \sin^2 \frac{\pi}{v-1} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{v-1}}, \end{aligned}$$

□

接下来, 我们使用引理 3 来确定内接于  $S^2$  的最优四棱锥, 显然其具有正方形底面的结构。下面我们对  $h = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$  分别求出当时正四棱锥的表面积, 这样我们可以大致找到最大表面积出现时  $h$  的大小, Mathematica 代码如下:

```

CreatePyramid[h_] :=
Module[{zBase, a, baseVertices, apex, faces}, apex = {0, 0, 1};
zBase = 1 - h;
a = Sqrt[(1 - zBase^2)/2];
baseVertices = {{a, a, zBase}, {a, -a, zBase}, {-a, -a,
zBase}, {-a, a, zBase}};
faces = {Polygon[baseVertices],
Polygon[{apex, baseVertices[[1]], baseVertices[[2]]}],
Polygon[{apex, baseVertices[[2]], baseVertices[[3]]}],
Polygon[{apex, baseVertices[[3]], baseVertices[[4]]}],
Polygon[{apex, baseVertices[[4]], baseVertices[[1]]}}];
{faces, a, baseVertices, apex}];

CalculateSurfaceArea[h_] :=
Module[{zBase, a, baseArea, sideLength, triangleHeight, sideArea,
totalArea}, zBase = 1 - h;
a = Sqrt[(1 - zBase^2)/2];
baseArea = 4 a^2;
sideLength = Sqrt[a^2 + a^2 + (1 - zBase)^2];
triangleHeight = Sqrt[sideLength^2 - (2*a)^2/4];
sideArea = 0.5*(2*a)*triangleHeight;
totalArea = baseArea + 4*sideArea;
{baseArea, 4*sideArea, totalArea}];

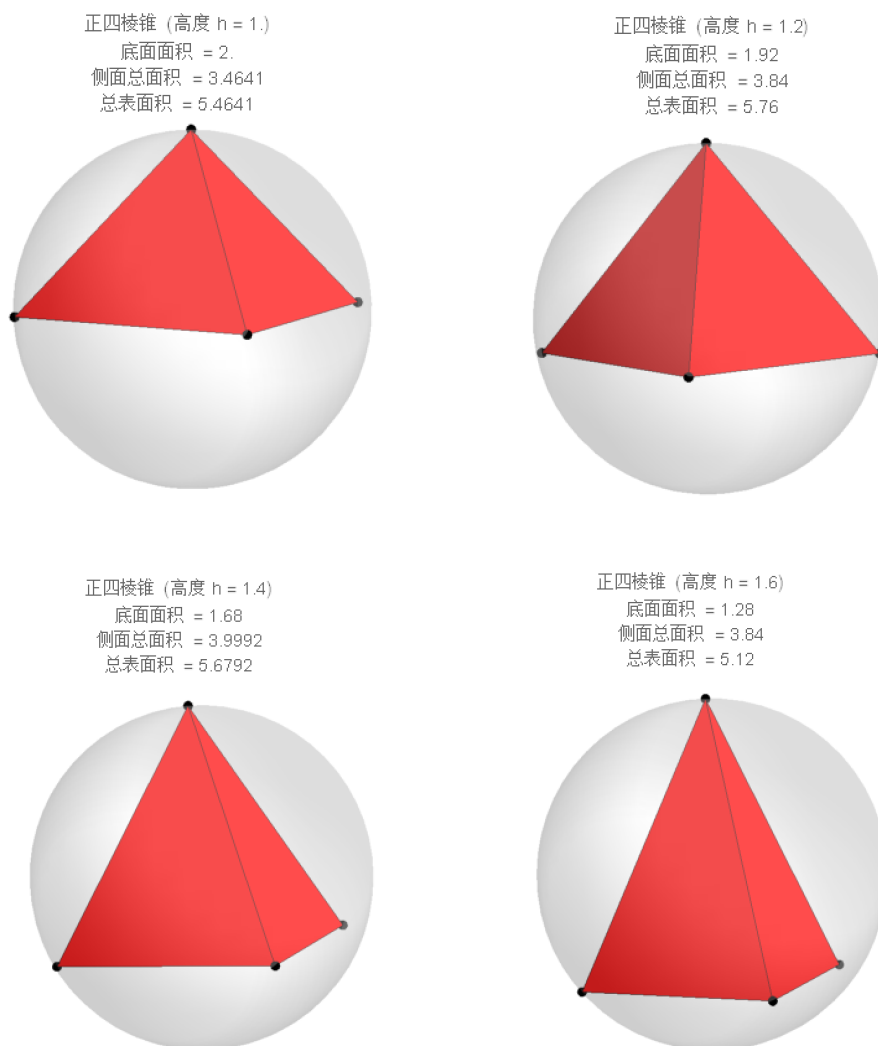
VisualizePyramidAndSphere[h_] :=
Module[{pyramidData, faces, a, baseVertices, apex, surfaceArea,
baseArea, sideArea, totalArea}, pyramidData =
CreatePyramid[h];
faces = pyramidData[[1]];
a = pyramidData[[2]];
baseVertices = pyramidData[[3]];
apex = pyramidData[[4]];
surfaceArea = CalculateSurfaceArea[h];
baseArea = surfaceArea[[1]];
sideArea = surfaceArea[[2]];
totalArea = surfaceArea[[3]];
Show[Graphics3D[{Opacity[0.3], Sphere[{0, 0, 0}, 1]}],

```

```

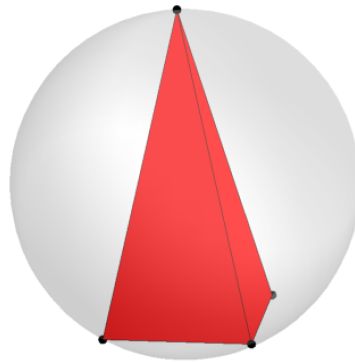
Graphics3D[{{Blue, faces[[1]]}, {Red, faces[[2]], faces[[3]],
            faces[[4]], faces[[5]]}, {PointSize[0.02],
            Point[apex]}, {PointSize[0.02], Point[
            baseVertices]}}],
PlotLabel ->
Style[StringJoin["正四棱锥 (高度 h = ", ToString[N[h]], ")\\n",
"底面面积 = ", ToString[N[baseArea]], "\\n", "侧面总面积 = ",
ToString[N[sideArea]], "\\n", "总表面积 = ",
ToString[N[totalArea]]], 14], Boxed -> False,
Lighting -> "Neutral", ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.0},
ImageSize -> 400]];
heightList = Range[1.0, 1.8, 0.2];
allGraphics = Table[VisualizePyramidAndSphere[h], {h, heightList
}];
Grid[Partition[allGraphics, 2, 2, {1, 1}, {}], Spacings -> {1,
1}]

```



**推论 1:** 设  $P$  是内接于  $S^2$  的四棱锥, 则有

正四棱锥 (高度  $h = 1.8$ )  
 底面面积 = 0.72  
 侧面总面积 = 3.13841  
 总表面积 = 3.85841



$$S(P) \leq 4\eta - 2\eta^2 + 2\sqrt{4\eta^2 - \eta^4} = 5.77886\dots$$

其中

$$\eta := \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{46} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{149}{23\sqrt{46}} \right) \right) \right) = 1.2622\dots$$

等号成立当且仅当  $P$  是高度为  $\eta$ 、正方形底面内接于圆  $\mathbb{S}^2 \cap (e_3^\perp - (\eta - 1)e_3)$  的四棱锥的一个旋转体。

证明. 我们将解决以下优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & S(P) \\ \text{s.t.} \quad & P \text{ 为四棱锥,} \\ & P \subset \mathbb{B}_2^3. \end{aligned}$$

最大值时的高度  $h \geq 1$ , 因此我们可以假设  $h \in [1, 2]$ , 并令  $P(h) \in \mathcal{A}_h$ .

根据引理 3, 侧表面积  $L(P(h))$  在  $P(h)$  的高度为  $h$  且底面为正方形、内接于  $H(h) \cap \mathbb{S}^2$  时达到最大值。根据引理 2, 对于任何高度  $h$ , 底面面积也在  $H(h) \cap \mathbb{S}^2$  内接的正方形时达到最大值。因此,

$$S(P(h)) = B(P(h)) + L(P(h)) \leq 4h - 2h^2 + 2\sqrt{4h^2 - h^4},$$

其中  $B(P(h)) := 4h - 2h^2$  是  $P(h)$  的正方形底面的面积 (这里使用了  $h \geq 1$ )。我们需要对  $h$  进行优化。

定义

$$F_5(h) := 4h - 2h^2 + 2\sqrt{4h^2 - h^4}.$$

求导:

$$\frac{dF_5}{dh} = 4 - 4h + \frac{8h - 8h^3}{\sqrt{4h^2 - h^4}} = 0.$$

我们得到方程

$$2h^3 - 2h^2 - 7h + 8 = 0.$$

该三次方程在区间  $[1, 2]$  内的根为

$$h_1 = \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{46} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{149}{23\sqrt{46}} \right) \right) \right) = 1.6538868\dots,$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{46} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{149}{23\sqrt{46}} \right) \right) \right) = 1.2622\dots$$

通过验证, 我们发现  $S(h)$  在  $h_2 =: \eta$  处取得全局最大值. 等号条件由引理 3 给出.  $\square$

推论的直接结果是, 观察到的  $(v-1)$  棱锥的表面积偏差  $S(P)$  为

$$S(P) = 1 - \frac{S(P)}{F_5(\eta)} \approx 1 - 0.173S(P).$$

更一般地, 设  $P$  是内接于  $\mathbb{B}_2^3$  的  $(v-1)$  棱锥, 则有

$$F_v(h) := \frac{1}{2}(v-1)(2h-h^2) \sin \frac{2\pi}{v-1} + (v-1) \sin \frac{\pi}{v-1} \sqrt{h^2(2h-h^2) + (2h-h^2)^2 \cos^2 \frac{\pi}{v-1}}, \quad (5)$$

其中  $\eta \in (1, 2)$  是使得对于所有  $h \in (0, 2)$ , 均有  $F(h) \leq F(\eta)$  的最优高度. 等号成立当且仅当  $P$  的底面为  $(v-1)$ -边形, 内接于  $\mathbb{S}^2 \cap (e_3^\perp - (\eta-1)e_3)$ . 在下一个推论中, 我们将完整地陈述最优  $v$ -双锥体的表面积公式.

接下来, 我们来确定内接于  $\mathbb{S}^2$  的最优三角双锥体, 显然其具有正三角横截底面的结构. 下面我们对  $h = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  分别求出当时三角双锥体的表面积, 这样我们可以大致找到最大表面积出现时  $h$  的大小, Mathematica 代码如下:

```
CreateBipyramid[h_] :=
Module[{zMiddle, r, middleVertices, topVertex, bottomVertex,
  faces},
topVertex = {0, 0, 1};
bottomVertex = {0, 0, -1};
zMiddle = 1 - h;
r = Sqrt[1 - zMiddle^2];
middleVertices =
Table[{r*Cos[2 Pi*i/3], r*Sin[2 Pi*i/3], zMiddle}, {i, 0, 2}];
faces = {Polygon[{topVertex, middleVertices[[1]],
  middleVertices[[2]]}],
  Polygon[{topVertex, middleVertices[[2]], middleVertices
[[3]]}],
  Polygon[{topVertex, middleVertices[[3]], middleVertices
[[1]]}],
```

```

    Polygon[{bottomVertex, middleVertices[[1]],
            middleVertices[[2]]}],
    Polygon[{bottomVertex, middleVertices[[2]],
            middleVertices[[3]]}],
    Polygon[{bottomVertex, middleVertices[[3]],
            middleVertices[[1]]}]];
{faces, r, middleVertices, topVertex, bottomVertex}];

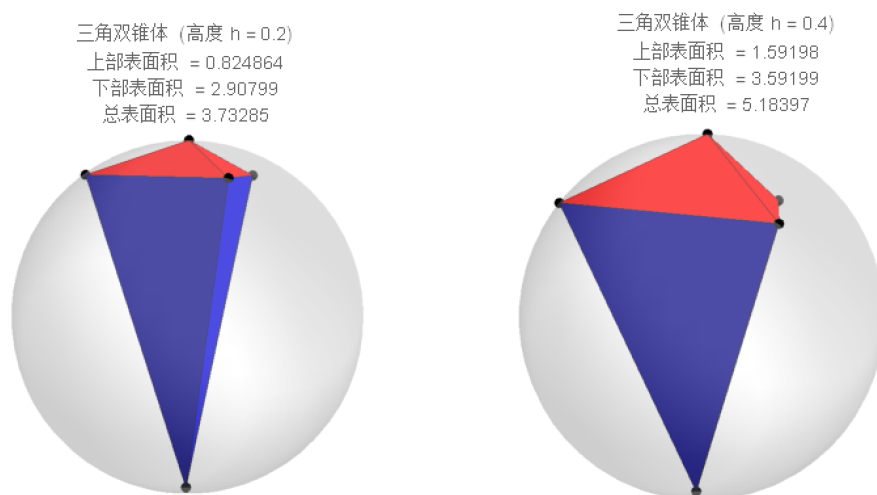
CalculateSurfaceArea[h_] :=
Module[{zMiddle, r, topDistance, bottomDistance, topArea,
        bottomArea, totalArea}, zMiddle = 1 - h;
r = Sqrt[1 - zMiddle^2];
topDistance = Sqrt[r^2 + (1 - zMiddle)^2];
bottomDistance = Sqrt[r^2 + (1 + zMiddle)^2];
topArea = 3*0.5*Sqrt[3]*r*Sqrt[topDistance^2 - (r^2/3)];
bottomArea = 3*0.5*Sqrt[3]*r*Sqrt[bottomDistance^2 - (r^2/3)];
totalArea = topArea + bottomArea;
{topArea, bottomArea, totalArea}];
VisualizeBipyramidAndSphere[h_] :=
Module[{bipyramidData, faces, r, middleVertices, topVertex,
        bottomVertex, surfaceArea, topArea, bottomArea, totalArea
        },
bipyramidData = CreateBipyramid[h];
faces = bipyramidData[[1]];
r = bipyramidData[[2]];
middleVertices = bipyramidData[[3]];
topVertex = bipyramidData[[4]];
bottomVertex = bipyramidData[[5]];
surfaceArea = CalculateSurfaceArea[h];
topArea = surfaceArea[[1]];
bottomArea = surfaceArea[[2]];
totalArea = surfaceArea[[3]];
Show[Graphics3D[{Opacity[0.3], Sphere[{0, 0, 0}, 1]}],
Graphics3D[{{Red, faces[[1]], faces[[2]], faces[[3]]}, {Blue,
        faces[[4]], faces[[5]], faces[[6]]}, {PointSize
        [0.02],
        Point[topVertex]}, {PointSize[0.02],
        Point[bottomVertex]}, {PointSize[0.02],
        Point[middleVertices]}]],
PlotLabel ->

```

```

Style[StringJoin["三角双锥体 (高度 h = ", ToString[N[h]], ")\\n",
"上部表面积 = ", ToString[N[topArea]], "\\n", "下部表面积 = ",
ToString[N[bottomArea]], "\\n", "总表面积 = ",
ToString[N[totalArea]]], 14], Boxed -> False,
Lighting -> "Neutral", ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.0},
ImageSize -> 400]];
heightList = Range[0.2, 1.0, 0.2];
allGraphics = Table[VisualizeBipyramidAndSphere[h], {h,
heightList}];
Grid[Partition[allGraphics, 2, 2, {1, 1}, {}], Spacings -> {1,
1}]
ListPlot[{Table[{h, CalculateSurfaceArea[h][[3]]}, {h, 0.2, 1.0,
0.05}]}], Joined -> True, PlotStyle -> {Thick,
Blue},
PlotMarkers -> {Automatic, Medium}, Frame -> True,
FrameLabel -> {"表面积", None}, {"高度 h", None}},
PlotLabel -> "三角双锥体表面积随高度变化", GridLines -> Automatic
,
ImageSize -> 500]

```



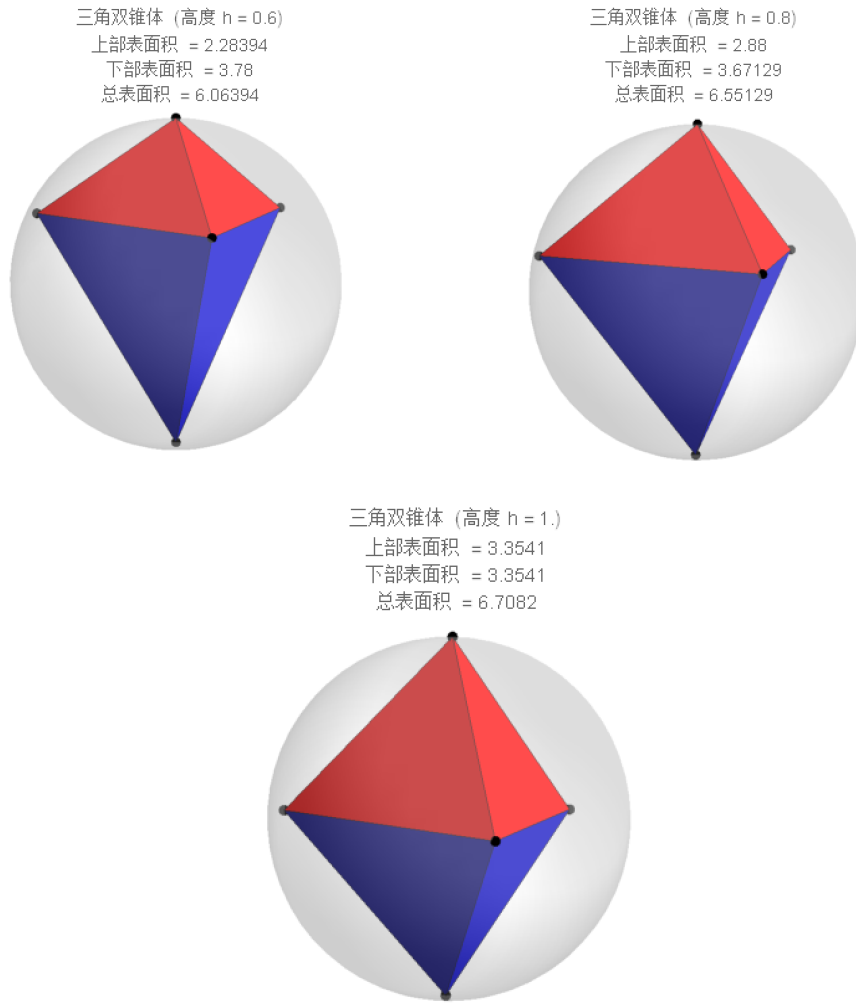
**推论 2:** 设  $P$  是内接于  $S^2$  的  $v$ -双锥体, 令  $\omega_v := \frac{\pi}{v-2}$ 。则有

$$S(P) \leq 2(v-2)\sqrt{1 + \cos^2 \omega_v} \sin \omega_v$$

当且仅当  $P$  是由北半球和南半球的极点  $\pm e_3$  以及正  $(v-2)$ -边形的凸包构成, 该正  $(v-2)$ -边形内接于赤道平面  $S^2 \cap e_3^\perp$ 。

推论的直接结果是, 观察到的  $v$ -双锥体  $P$  的表面积偏差为

$$S(P) = 1 - \frac{S(P)}{2(v-2)\sqrt{1 + \cos^2 \omega_v} \sin \omega_v}.$$



证明. 设  $P$  是内接于  $S^2$  的任意  $v$ -双锥体。存在唯一的平面，它穿过  $\text{int}(P)$  并包含  $(v-2)$  个顶点（与  $P$  共面）。我们可以假设这个平面为

$$H(h) := e_3^\perp + (1-h)e_3.$$

因此，存在  $P_1 \in \mathcal{A}_h$  和  $P_2 \in \mathcal{A}_{2-h}$ ，使得  $S(P) = L(P_1) + L(P_2)$ 。因此，对于每个  $h$ ， $S(P)$  被最大化当且仅当  $L(P_1)$  和  $L(P_2)$  同时被最大化。由引理 3，只需考虑那些  $v$ -双锥体  $P(v, h)$ ，其为高度为  $\pm h$  的两个正  $(v-2)$ -边形的凸包，且这两个正  $(v-2)$ -边形内接于  $H(h) \cap S^2$ 。因此， $P$  具有高度  $h$ ，且两个正  $(v-2)$ -边形是公共底面的正  $(v-2)$ -边形，如图 3 所示。

优化  $h$ ：这样的  $v$ -双锥体的表面积  $S(h)$  为

$$S(h) = (v-2) \sin \omega_v \times \left( \sqrt{2h^3 - h^4 + (2h - h^2)^2 \cos^2 \omega_v} + \sqrt{(2-h)^3 - (2-h)^4 + (2h - h^2)^2 \cos^2 \omega_v} \right).$$

经过简单的计算可得， $h = 1$  是唯一的临界点，并且  $S'(h) > 0$  对于  $h \in (0, 1)$ ，而  $S'(h) < 0$  对于  $h \in (1, 2)$ 。这表明引理中定义的多面体在所有  $v$ -双锥体中最大化了表面积，并且其表面积为

$$S(1) = 2(v-2)\sqrt{1 + \cos^2 \omega_v} \sin \omega_v.$$

□

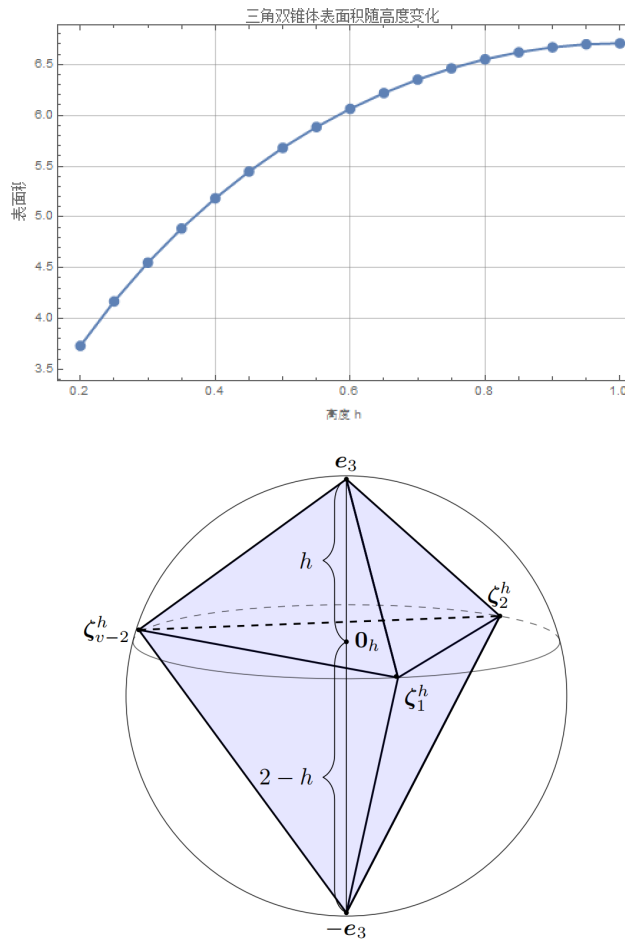


图 1: 对于  $v \geq 5$ , 点  $\zeta_i^h (1 \leq i \leq v-2)$ , 是圆  $S^2 \cap (e_3^\perp + (1-h)e_3)$  中的  $(v-2)$  次单位根, 圆心为  $\mathbf{0}_h := (1-h)e_3$

### 定理 1 的证明结论

由推论 1, 内接于  $S^2$  的四棱锥的最大表面积小于 5.78。由推论 2, 内接于  $S^2$  的最大表面积 5-双锥体是  $[e_3, -e_3, e_1, \zeta_1, \zeta_2]$  的旋转体, 其表面积为  $3\sqrt{15}/2 > 5.78$ 。因此, 由引理 1, 三角双锥体  $Q_5^* = [e_3, -e_3, e_1, \zeta_1, \zeta_2]$  在所有包含于  $\mathbb{B}_2^3$  且具有 5 个顶点的多面体中最大化了表面积。

**备注 1:** 一个最优四棱锥 (或 5-双锥体) 的必要条件是, 顶点 (或顶点集) 的正交投影位于底面 (包含三个顶点的三角形截面) 上。在这种条件下, 可以用两种方式表示底面 (包含三个顶点的三角形截面) 的表面积, 以得到约束条件:

$$g := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i p_i - \frac{1}{4} \sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^2 - 2(s_1^4 + s_2^4 + s_3^4)} = 0$$

(或)

$$g := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 s_i p_i - \frac{1}{4} \sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2)^2 + 8s_1 s_2 s_3 s_4 - 2(s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 + s_4^4)} = 0$$

其中我们使用了 Heron 公式 (或 Brahmagupta 公式)。使用拉格朗日乘子法, 在此约束下最大化侧表面积

$$L(P) = \frac{1}{2} \sum_i s_i \sqrt{p_i^2 + t^2},$$

可以推导出所有  $p_i$  相等且所有  $s_i$  相等 (Heron 公式已被证明适用于最多 8 个顶点的  $v$ -边形)。

**备注 2:** 可以使用引理 3 来确定内接于  $S^2$  的最大表面积四面体。

## 5 四棱锥和双锥体的体积与表面积偏差比较

修改引理 3 的证明, 可以证明在所有  $\mathcal{A}_h$  中的  $(v-1)$  棱锥中, 最大体积是在底面为正多边形且高度为  $h$  的棱锥中取得的。与推论 1 类似, 优化  $h \in [1, 2]$ , 我们得出  $\mathcal{A}_h$  ( $h \geq 1$ ) 中最大体积的  $(v-1)$  棱锥具有高度  $h$ , 且体积为

$$V(h) := \frac{v-1}{6} (2h^2 - h^3) \sin \frac{2\pi}{v-1}.$$

在区间  $[1, 2]$  内, 唯一的临界点是  $h = \frac{4}{3}$ , 这给出了唯一的最大体积  $(v-1)$  棱锥, 适用于所有  $v \geq 4$ 。另一方面, 在 (5) 中, 我们给出了可以由内接  $(v-1)$  棱锥实现的最大表面积  $F_v(h)$ 。简单的计算表明, 对于任何  $v \geq 5$ , 均有  $F'_v(\frac{4}{3}) \neq 0$ 。因此,  $(v-1)$  棱锥的体积和表面积偏差是对  $(v-1)$  棱锥类的不同度量。

对于  $v$ -双锥体的类别, 对先前论证的修改表明, 体积和表面积最大值在  $v$ -双锥体中是等价的。因此,  $v$ -双锥体的体积和表面积偏差在  $v$ -双锥体的类别中是等价的。理想  $v$ -双锥体的最大体积为  $\frac{1}{3}(v-2) \sin \frac{2\pi}{v-2}$ , 因此观察到的  $v$ -双锥体  $P$  的体积偏差为

$$\mathcal{V}(P) = 1 - \left( \frac{3 \csc \frac{2\pi}{v-2}}{v-2} \right) V(P).$$

## 6 总结

本文通过严谨的数学推导和几何分析, 解决了内接于单位球面的五顶点多面体的最大表面积问题。我们证明了在单位球面上选取五个点构成的凸包, 其表面积的上界为  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$  (约 5.809), 且当且仅当该凸包为特定三角双锥体的旋转体时取得等号。

研究过程中, 我们首先回顾了凸几何和离散几何中与最大表面积多面体相关的已有成果。特别地, 对于顶点数为 4、6 和 12 的情况, 最大表面积多面体分别为正四面体、立方八面体和正十二面体, 这些结果已在前人工作中得到证明, 于是我们想到求解顶点数为 5 的情况。

为解决这一问题, 我们采用了部分变分法, 并通过一系列引理构建了完整的证明框架。首先, 我们证明了具有 5 个顶点的多面体恰好有两种组合类型: 四棱锥和三角双锥体。随后, 我们分别优化了这两类多面体的表面积, 并证明了在满足特定几何条件时, 三角双锥体的表面积严格大于最优四棱锥的表面积。

特别值得注意的是, 我们通过引理 3 建立了球冠内最大侧表面积棱锥的几何特征, 证明了最优四棱锥必须具有正多边形底面且高度为特定值。通过精确计算, 我们确定了四棱锥的最大表面积约为 5.77886, 而三角双锥体的最大表面积为  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$  (约 5.809), 从而完成了定理 1 的证明。

本研究还探讨了体积偏差与表面积偏差的关系。我们证明了对于  $(v - 1)$  棱锥类型的多面体，体积和表面积偏差是两种不同的度量；而对于  $v$ -双锥体，这两种偏差在该类别中是等价的。这一发现对于理解多面体几何特性具有重要意义。。

尽管本文解决了  $v = 5$  的情况，但对于  $7 \leq v \leq 11$  和  $v \geq 13$  的情况，确定单位球面上具有  $v$  个顶点的最大表面积多面体仍是开放问题。基于数值研究，我们推测  $v = 7$  时的最优解可能是五边形双锥体，但这需要进一步的理论证明。此外，将研究扩展到更高维度空间，确定  $S^{d-1}$  中具有  $v \geq d + 2$  个顶点的最大表面积多面体，也是值得探索的方向。

总之，本文通过严格的数学证明，确立了内接于单位球面的五顶点多面体的最大表面积上界，并明确了达到此上界的几何构型。未来研究可进一步探索高维空间中的类似问题。

## 参考文献

- [1] Fejes Tóth, L. *Regular Figures*. Pergamon Press, 1964.
- [2] Linhart, J. *Über eine Ungleichung für die Oberfläche und den Umkugelradius eines konvexen Polyeders*. *Arch. Math.* **39** (1982), 278-284.