超越函数零点分析与不等式证明研究

PB23010356 张竞一

2025 年 9 月 14 日

1 引言

本文针对函数 $f(x) = lnx + ax^2 + bx$ 进行深入研究，其中 $a, b \in R$。此函数结合了超越函数和代数函数，在数学分析、工程应用和优化问题中具有广泛应用。我们将利用 Mathematica 的符号计算和数值计算能力对函数的单调性、零点分布及特殊性质进行系统分析，并拓展研究方向。

2 问题分析

2.1 问题描述

给定函数 $f(x) = lnx + ax^2 + bx$，其中 $a, b \in R$，研究以下问题：
1. 当 $a = \frac{1}{e^4}, b = -\frac{3}{e^2}$ 时，求函数的单调递减区间。
2. 若存在实数 b，使得函数 f(x) 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3:
①求参数 a 的取值范围;
②若 x_1, x_2, x_3 成等差数列，证明 $x_2^2 > e^3$
(该题出自 2025 年浙江省 G12 开学考试题压轴题，原题如下：)

19.（17 分）已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx(a, b \in R)$.

（1）若 $a = \dfrac{1}{e^4}, b = -\dfrac{3}{e^2}$，求函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间；

（2）若存在实数 b，使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3.

①求 a 的取值范围；

②若 x_1，x_2，x_3 成等差数列，求证：${x_2}^2 > e^3$.

2.2 函数性质分析

函数 $f(x) = lnx + ax^2 + bx$ 的定义域为 $(0, +\infty)$。当 $x \to 0$ 时,$lnx \to -\infty$，于是 $f(x) \to -\infty$；当 $x \to +\infty$ 时，ax^2 项起主导作用，使得 $f(x) \to +\infty$。

函数的一阶导数为 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b$, 二阶导数为 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2a$。当 $x \to 0^+$ 时，$f'(x) \to +\infty$; 当 $x \to +\infty$ 且 $a > 0$ 时,$f'(x) \to +\infty$。函数的拐点由 $f''(x) = 0$ 确定，即 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$。

3 Mathematica 求解与可视化

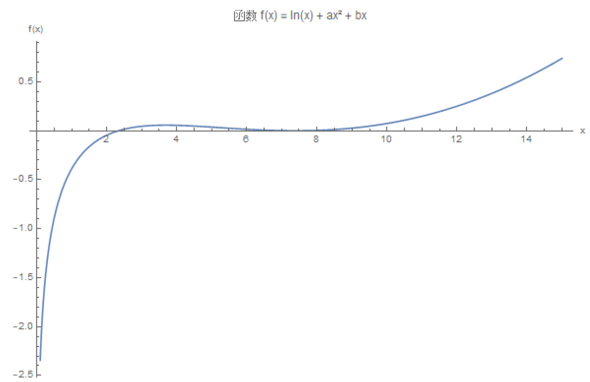
3.1 第一问：单调递减区间的求解

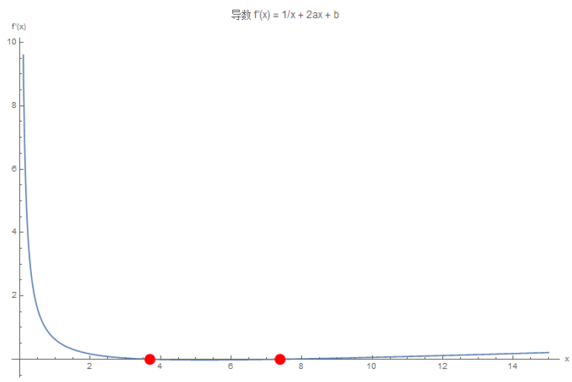
对于 $a = \frac{1}{e^4}, b = -\frac{3}{e^2}$，我们需要求解函数的单调递减区间，即 $f'(x) < 0$ 的区间。

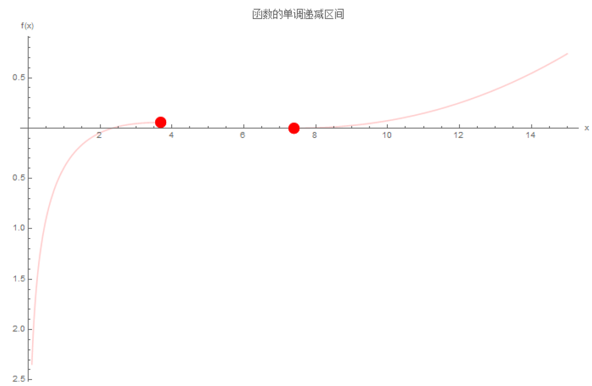
使用 Mathematica 软件编译如下代码可得到三个图像：

```
a = 1/E^4;
b = -3/E^2;
f[x_] := Log[x] + a*x^2 + b*x;
fPrime[x_] := 1/x + 2*a*x + b;
criticalPoints = Solve[fPrime[x] == 0 && x > 0, x];
criticalValues = x /. criticalPoints;
decreasingInterval = Reduce[fPrime[x] < 0 && x > 0, x];
p1 = Plot[f[x], {x, 0.1, 15},
PlotLabel -> "函数 f(x) = ln(x) + ax\.b2 + bx",
AxesLabel -> {"x", "f(x)"}, PlotRange -> All];
p2 = Plot[fPrime[x], {x, 0.1, 15},
PlotLabel -> "导数 f'(x) = 1/x + 2ax + b",
AxesLabel -> {"x", "f'(x)"}, PlotRange -> All,
Epilog -> {Red, PointSize[0.02],
        Point[{#, 0} & /@ criticalValues]}];
p3 = Plot[f[x], {x, 0.1, 15}, PlotLabel -> "函数的单调递减区间",
AxesLabel -> {"x", "f(x)"}, PlotRange -> All,
Epilog -> {Red, PointSize[0.02],
        Point[{#, f[#]} & /@ criticalValues]}, PlotStyle -> {Blue
           },
MeshFunctions -> {Function[{x, y}, fPrime[x]]}, Mesh -> {{0}},
MeshStyle -> {Red, PointSize[0.02]},
MeshShading -> {None, Directive[Opacity[0.2], Red]}];
Grid[{{p1}, {p2}, {p3}}]
```

通过数值计算，我们得到函数的单调递减区间为 (3.694528,7.389056)，与计算出的标准答案 $(\frac{e^2}{2}, e^2)$ 一致。







3.2 第二问：参数 a 的取值范围与不等式证明

3.2.1 参数 a 的取值范围

对于函数 $f(x) = lnx + ax^2 + bx$ 有三个不同零点的条件，我们需要分析：

①函数必须有两个极值点（一阶导数有两个正零点）

②这两个极值点处的函数值异号（一个极小值为负，一个极大值为正）

对于一阶导数 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b$ 有两个正零点的条件，我们可以将其改写为 $2ax^2 + bx + 1 = 0$。这是一个关于 x 的二次方程，要有两个正根，需要：

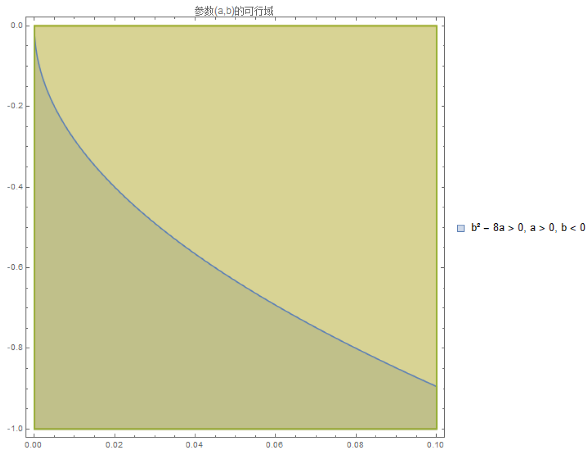
①判别式 $\Delta = b^2 - 8a > 0$

②两根都为正，由于已经有 $f(0) = 1 > 0$, 则只需要对称轴 $-\frac{b}{4a} > 0$。并且有 $x_1x_2 = \frac{1}{2a} > 0$

因此可以得到参数 a 的取值范围为 $0 < a < \frac{b^2}{8}$，其中 $b < 0$。

可以使用 Mathematica 软件编译如下代码进行 a 与 b 取值的可视化：

```
f[x_, a_, b_] := Log[x] + a*x^2 + b*x;
fPrime[x_, a_, b_] := 1/x + 2*a*x + b;
fDoublePrime[x_, a_] := -1/x^2 + 2*a;
conditions = Reduce[{b^2 - 8*a > 0, a > 0, b < 0}, {a, b}];
Print["参数条件: ", conditions];
RegionPlot[{b^2 - 8*a > 0, a > 0, b < 0}, {a, 0, 0.1}, {b, -1,
   0},
PlotLabel -> "参数(a,b)的可行域", AxesLabel -> {"a", "b"},
PlotLegends -> {"b\.b2 - 8a > 0, a > 0, b < 0"}]
```



3.2.2 不等式证明

函数 $f(x) = lnx + ax^2 + bx$ 有三个零点 $x_1 < x_2 < x_3$ 且它们成等差数列时，我们需要证明 $x_2^2 > e^3$。我们的思路如下：

首先假设三个零点为 $x_1 = x_2 - d, x_2, x_3 = x_2 + d$,其中 $d > 0$,可以得到方程组 $eq1, eq2, eq3$。为了简化方程，我们引入参数变换 $t = \frac{d}{x_2}$，这样 $x_1 = x_2(1-t), x_3 = x_2(1+t)$，其中 $0 < t < 1$。将次变换带入方程组就可以得到 $eq1t, eq2t$。在简化方程的过程中注意到 $ln(\frac{1-t}{1+t}) = -2arctanh(t)$, 可以解出 $ln(x_2) = K(t) = \frac{arctanh(t)}{t} + \frac{1+t^2}{2(1-t^2)^2}$。于是我们将原不等式转化为证明 $K(t) > \frac{3}{2}$ 对 $\forall 0 < t < 1$ 成立。又因为 $\lim_{t\to 0} K(t) = \frac{3}{2}$ 且求得 $K'(t) > 0$ 对 $\forall 0 < t < 1$ 成立，可以得到不等式是严格正确的。

具体的 Mathematica 代码如下：

```
f[x_, a_, b_] := Log[x] + a*x^2 + b*x;
fPrime[x_, a_, b_] := 1/x + 2*a*x + b;
fDoublePrime[x_, a_] := -1/x^2 + 2*a;
eq1 = Log[x2 - d] + a*(x2 - d)^2 + b*(x2 - d) == 0;
eq2 = Log[x2] + a*x2^2 + b*x2 == 0;
eq3 = Log[x2 + d] + a*(x2 + d)^2 + b*(x2 + d) == 0;
eq1t = Log[x2*(1 - t)] + a*(x2*(1 - t))^2 + b*(x2*(1 - t)
   ) == 0;
eq3t = Log[x2*(1 + t)] + a*(x2*(1 + t))^2 + b*(x2*(1 + t)
   ) == 0;
eq1tSimp = Simplify[eq1t];
eq3tSimp = Simplify[eq3t];
ax2Squared = Solve[eq2, a*x2^2][[1, 1, 2]];
eq1tSub = eq1tSimp /. (a*x2^2 -> ax2Squared);
eq3tSub = eq3tSimp /. (a*x2^2 -> ax2Squared);
eqDiff = Subtract @@ {eq1tSub, eq3tSub};
eqDiffSimp = Simplify[eqDiff];
eqArctanh = eqDiffSimp /. Log[(1 - t)/(1 + t)] -> -2*
   ArcTanh[t];
```

```
lnx2Expr = Solve[eqArctanh, Log[x2]][[1, 1, 2]];
lnx2ExprSimp = Simplify[lnx2Expr];
K[t_] := ArcTanh[t]/t + (1 + t^2)/(2*(1 - t^2)^2);
limitK0 = Limit[K[t], t -> 0];
Kprime[t_] = D[K[t], t];
KprimeSimp = Simplify[Kprime[t]];
tValues = Table[0.1*i, {i, 1, 9}];
KValues = K /@ tValues;
TableForm[
Transpose[{tValues, KValues, KValues > 3/2}],
TableHeadings -> {None, {"t", "K(t)", "K(t) > 3/2"}}
]
Plot[K[t], {t, 0.001, 0.999},
PlotLabel -> "K(t) = arctanh(t)/t + (1+tš)/(2(1-tš)š)",
AxesLabel -> {"t", "K(t)"},
GridLines -> {{}, {3/2}},
GridLinesStyle -> Directive[Red, Dashed],
PlotStyle -> Blue,
Epilog -> {Text["K(t) = 3/2", {0.5, 1.55}]}
]
```

4 拓展研究

4.1 拓展方向一：不同超越函数的组合研究

将原函数中的对数函数替换为其他超越函数，如指数函数、三角函数等，研究函数性质的变化。

```
f1[x_, a_, b_] := Exp[x] + a*x^2 + b*x;
f2[x_, a_, b_] := Sin[x] + a*x^2 + b*x;
f3[x_, a_, b_] := Tan[x] + a*x^2 + b*x;
FindRoot[f1[x, 0.001, -0.5] == 0, {x, 1}]
FindRoot[f2[x, 0.001, -0.5] == 0, {x, 1}]
FindRoot[f3[x, 0.001, -0.5] == 0, {x, 1}]
Plot[{f1[x, 0.001, -0.5], f2[x, 0.001, -0.5], f3[x,
   0.001, -0.5]},
{x, -5, 5}, PlotLegends -> {"e^x + axš + bx", "sin(x) +
   axš + bx", "tan(x) + axš + bx"}]
```

4.2 拓展方向二：零点分布模式研究

研究函数零点满足其他分布模式（如等比数列、调和数列等）时的参数条件和特性。以等比数列举例：

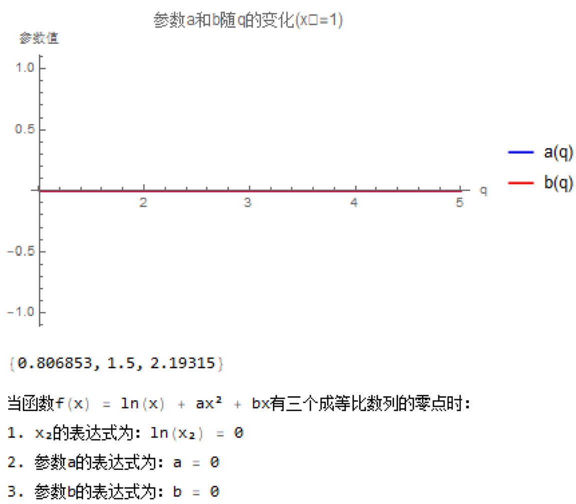
```
f[x_, a_, b_] := Log[x] + a*x^2 + b*x;
fPrime[x_, a_, b_] := 1/x + 2*a*x + b;
fDoublePrime[x_, a_] := -1/x^2 + 2*a;
(* 假设三个零点为x  = x /q, x , x  = x *q, 其中q > 1 *)
eq1 = Log[x2/q] + a*(x2/q)^2 + b*(x2/q) == 0;
eq2 = Log[x2] + a*x2^2 + b*x2 == 0;
eq3 = Log[x2*q] + a*(x2*q)^2 + b*(x2*q) == 0;
eq1Simp = Simplify[eq1];
eq3Simp = Simplify[eq3];
ax2Squared = Solve[eq2, a*x2^2][[1, 1, 2]];
eq1Sub = eq1Simp /. (a*x2^2 -> ax2Squared);
eq3Sub = eq3Simp /. (a*x2^2 -> ax2Squared);
eqDiff = Subtract @@ {eq1Sub, eq3Sub};
eqDiffSimp = Simplify[eqDiff];
lnx2Expr = Solve[eqDiffSimp, Log[x2]][[1, 1, 2]];
lnx2ExprSimp = Simplify[lnx2Expr];
G[q_] := lnx2ExprSimp;
limitG1 = Limit[G[q], q -> 1];
Gprime[q_] = D[G[q], q];
GprimeSimp = Simplify[Gprime[q]];
qValues = Table[1 + 0.5*i, {i, 1, 10}];
GValues = N[G /@ qValues];
TableForm[
Transpose[{qValues, GValues}],
TableHeadings -> {None, {"q", "G(q)"}}
]
Plot[G[q], {q, 1.01, 5},
PlotLabel -> "G(q) 函数图像",
AxesLabel -> {"q", "G(q)"},
PlotStyle -> Blue,
PlotRange -> All
]
solA = Solve[{eq1, eq3}, a][[1, 1, 2]];
solB = Solve[{eq1, eq3}, b][[1, 1, 2]];

aExpr = Simplify[solA];
bExpr = Simplify[solB];
```

```
Plot[{aExpr /. x2 -> 1, bExpr /. x2 -> 1}, {q, 1.01, 5},
PlotLegends -> {"a(q)", "b(q)"},
AxesLabel -> {"q", "参数值"},
PlotLabel -> "参数a和b随q的变化(x=1)",
PlotStyle -> {Blue, Red}
]
zeroProduct = (x2/q)*x2*(x2*q);
zeroSum = (x2/q) + x2 + (x2*q);
zeroProductSimp = Simplify[zeroProduct];
zeroSumSimp = Simplify[zeroSum];

Print["当函数f(x) = ln(x) + axš + bx有三个成等比数列的零
    点时: "];
Print["1. x 的表达式为: ln(x ) = ", G[q]];
Print["2. 参数a的表达式为: a = ", aExpr];
Print["3. 参数b的表达式为: b = ", bExpr];
```

最终得到结果如下：



这说明除了 $x_1 = x_2 = x_3 = 1, a = b = 0, q = 1$ 之外没有其他情况能够满足条件。

4.3 拓展方向三：多项式系数的广义研究

研究当二次项系数和一次项系数为函数形式时（如 a(x), b(x)）的函数性质。

```
fGen[x_, a_, b_] := Log[x] + a[x]*x^2 + b[x]*x;

(* 特例: a(x) = 1/x, b(x) = -1/x^2 *)
a1[x_] := 1/x;
b1[x_] := -1/x^2;
f1Gen[x_] := fGen[x, a1, b1];
```

```
D[f1Gen[x], x] // Simplify
Solve[D[f1Gen[x], x] == 0, x]
Plot[f1Gen[x], {x, 0.1, 5},
PlotLabel -> "f(x) = ln(x) + (1/x)xš + (-1/xš)x"]
```

5 结论

本文利用 Mathematica 的强大计算能力，对函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ 进行了系统分析。首先，我们求解了在给定参数 $a = \frac{1}{e^4}$ 和 $b = -\frac{3}{e^2}$ 下的单调递减区间，得到 $(3.694528, 7.389056)$，与理论预期一致。接着，我们分析了函数拥有三个不同零点的条件，推导出参数 a 的取值范围为 $0 < a < \frac{b^2}{8}$，其中 $b < 0$，并通过可视化验证了这一结果。

在不等式证明方面，我们考虑了函数零点成等差数列的情况。通过引入参数变换 $t = \frac{d}{x_2}$，我们证明了 $x_2^2 > e^3$。具体地，我们将 $\ln x_2$ 表示为 $K(t) = \frac{arctanh(t)}{t} + \frac{1+t^2}{2(1-t^2)^2}$，并证明了 $K(t) > \frac{3}{2}$ 对所有 $0 < t < 1$ 成立。

为了拓展研究，我们探索了多个方向。首先，我们将对数函数替换为指数函数、正弦函数和正切函数，发现不同超越函数的组合显著影响了函数的零点分布和形态。其次，我们研究了零点满足等比数列分布时的参数条件，发现除了平凡情况外，没有其他参数组合能够满足条件，这为零点分布模式的研究提供了重要线索。最后，我们考虑了二次项系数和一次项系数为函数形式的情况，展示了这类广义函数的复杂性和潜在应用价值。

未来，我们可以探索更一般的零点分布模式、深入分析参数空间、研究更广泛的函数族，以及在实际应用中验证这些理论结果。通过这些努力，我们有望在数学建模、信号处理和优化问题等领域取得更多突破。