实分析题型方法总结

tip：本笔记用于2026年夏令营数院保研考试，总结实分析中的问题与方法，将原笔记例题等整合，加上近年实分析（包括H）试题，汇总为此文件，祝同志在这场艰难的科研中取得良好成绩。

（至2025年）

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

H期中部分

2026.4.1

1.2025

一、（10分）谈谈你对勒贝格可测集合的认识

—测度相关基础

外测度：$m^*(A)=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| \mid A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\ I_k$为开矩体$\}$

Lebesgue可测集：E为可测集，若对$\forall A\subseteq\mathbb{R}^n$，$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$（Carathéodory条件）

二、（10分）谈谈你对勒贝格可测函数的认识

定义：f为广义实值函数，$E\to\overline{\mathbb{R}}$，E可测，若$\forall t\in\mathbb{R}$，$\{x\in E\mid f(x)>t\}$为可测集，称f为E上可测函数

Lusin定理：$f:E\to\mathbb{R}$可测，则$\forall\varepsilon>0$，∃闭集$F\subset E$，$m(E\setminus F)<\varepsilon$，$f|_F$为连续函数

三、（10分）计算集合族$\Gamma:=\{A\in\mathbb{R}:m(A)=0\}$的势。

Γ含于$\mathbb{R}$的子集族 $\Rightarrow \overline{\overline{\Gamma}}\le 2^c$. Cantor集的子集族含于Γ：$\overline{\overline{\Gamma}}\ge 2^c \Rightarrow \overline{\overline{\Gamma}}=2^c$

—对积分计算，首先说明f可测

四、（10分）设C是$[0,1]$区间三等分Cantor集，函数$f:[0,1]\to\overline{\mathbb{R}}$定义为

$$f(x)=\begin{cases}+\infty & x\in C\\ (-2)^{-n} & x\in \text{Cantor集构造过程中第n次舍去的长为}3^{-n}\text{的区间}, \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

计算勒贝格积分$\int_0^1|f(x)|dx$.

f可测，C零测，则$I=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot 2^{n-1}\cdot 3^{-n}=\frac{1}{4}$

—Levi，DCT，有界收敛，Fubini，逐项积分

五、（10分）计算勒贝格积分$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{n})^{-n}dx$.

$0<x^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{n})^{-n}<\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ 且$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\in L^1[0,\infty)$ ⇒ 由DCT，$I=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

—直观感觉→转化为子形式.

六、（10分）设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$是非负的勒贝格可积函数。证明：$\sum\limits_{k=0}^{\infty}m(\{x\in[0,1]:f(x)\ge k\})<\infty$.

$LHS=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)m(x\in[0,1]\mid f(x)\in[k,k+1))$

$=\sum_{k=0}^{\infty}k\,m(x\in[0,1]\mid f(x)\in[k,k+1))+m(x\mid f\ge 0)=1+\sum_{k=0}^{\infty}k\,m(x\in[0,1]\mid f(x)\in[k,k+1))\le 1+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{x\mid f\in[k,k+1)\}}f\,dx=1+\int_{[0,1]}f\,dx<\infty.$

m. 就用Riesz定理找子列a.e.

九、（20分）设$f_n:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$是一列可测函数，且存在$g\in L^1(\mathbb{R})$使得对任意$n\in\mathbb{N}$都有$|f_n(x)|\le g(x)$对a.e. $x\in\mathbb{R}$成立。现假设f_n在$\mathbb{R}$上依测度收敛到f，证明：（1）$f_n,f\in L^1(\mathbb{R})$.（2）$\|f_n-f\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0$.

(1). $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}}g(x)dx<\infty$. 由$f_n\xrightarrow{m}f$，由Riesz定理知∃子列$f_{n_i}\xrightarrow{a.e.}f$. 则$\int_{\mathbb{R}}|f|dx=\int_{\mathbb{R}}|\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}|dx\ \overset{g(x)控}{\underset{DCT}{=}}\ \lim\limits_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_{n_i}(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}}|g(x)|dx<\infty$.

(2). $\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|dx=(\int_{|x|\ge N}^{①}+\int_{|x|\le N,|f_n-f|>\delta}^{②}+\int_{|x|\le N,|f_n-f|\le\delta}^{③})|f_n-f|dx$

—积分的绝对连续性.

① 令N充分大，$I_1<\frac{\varepsilon}{3}$

② 由绝对连续性. ②$\le\int_{|x|\le N,|f_n-f|>\delta}2g(x)dx$ 对$\frac{\varepsilon}{3}>0$，∃$\delta_0>0$，∀可测$A\subset\mathbb{R}$，$m(A)<\delta_0$有$\int_A 2g\,dx<\frac{\varepsilon}{3}$. 证毕

由$f_n\xrightarrow{m}f$，$\forall\delta>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}m(|f_n-f|>\delta)=0$. 故∃$N_0>0$，$n>N_0$时$m(\cdots)<\delta_0$，故此时②$<\frac{\varepsilon}{3}$

③ 令$\delta=\frac{\varepsilon}{6N}$，$I_3<\frac{\varepsilon}{3}$

2.2024

2.（10分） 判断下列说法是否正确，证明或举反例：

假设$f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$是单调增加的连续函数，而且既是单射又是满射，则$[a,b]$中任意Lebesgue可测子集在$f$映照下的原像必是Lebesgue可测集。

—可测集的原像不一定可测.

可测函数的反函数不一定是可测函数

连续(可测)是可测. 可测(连续)不一定可测.

$f(x)=\frac{1}{2}(x+\Phi(x))$

同胚：$f(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+x)$ 划分$[0,1]=C\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k}$ $|I_{n,k}|=\frac{1}{3^n}$ 是第n次被移除的开区间

有$f([0,1])=f(C)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}f(I_{n,k})$ 且$|f(I_{n,k})|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$ ⇒ $m(f(C))=1-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2\cdot 3^n}=\frac{1}{2}$

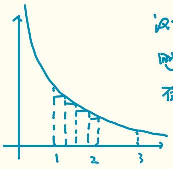
有f(C)是正测集，由选择公理，∃K不可测 $K\subset f(C)$ 而K的原像设为Z，有$Z\subset C$，$m(Z)=0$ 可测，则此时可测集原像为不可测集

4（10分） 假设$f:\mathbb{R}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$定义为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ +\infty, & x=0.\end{cases}$$

由Lebesgue可积函数的定义出发，证明该函数在$\mathbb{R}$上不是Lebesgue可积函数(利用其它方法，得分为零)。

—非负可测函数积分由简单函数逼近得到（要定）



设$f_n=\frac{4^n}{(k+1)^2}$ $x\in(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ $k\in\mathbb{N}$

则有$f_n\nearrow f$. a.e.

有$\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^n}{(k+1)^2}\cdot\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}=+\infty$ 于是$f(x)$在$\mathbb{R}$上非Lebesgue可积函数.

6. (10分) 考虑函数列

$$\left\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{n,1}, f_{n,2}, \cdots, f_{n,n}, \cdots\right\}.$$

经典反例.

其中 $f_{n,j} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n})}(x), \qquad j = 1, \cdots, n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

说明该函数列是否在下列意义下收敛:

以测度收敛，逐点收敛，几乎处处收敛，几乎一致收敛，以 L^1 收敛。

↙只需求每个点的收敛性.不要求整体收敛速度

✓ ✗ ✗ ✗ ✓.

① m. $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m(f_{n,j}(x) \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

② p. 对不同的n. x取0或1. 会存在无限次的振荡

③ a.e. 不收敛点集测度为1.

④ a.un. 非a.e收敛.

⑤ L^1. 有 $\int_0^1 |f_{n,j}(x)| dx = \frac{1}{n} \to 0$ as $n \to \infty$ 于是收敛

3.2023

5.（10分）K 是第三节课堂上构造的不可测集（即 $[0,1]/\mathbb{Q}$ 的代表元集合），证明 K 的任意可测子集均是零测集。本题为习题课讲过的原题。

若 $\exists E \subset K$. $m(E) > 0$. 对 $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. 有等价类 $E_r = E + r$. 有 $m(E_r) = m(E)$

于是 $\sum\limits_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} m(E_r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E) = \infty < 1$ 矛盾! 于是E只能为零测集.

4.2022

5.(10分) 构造一个 Lebesgue 不可测集，并证明它不可测。

取区间 $[0,1]$. 构造等价类 $x \sim y$. 若 $x - y \in \mathbb{Q}$. $x, y \in [0,1]$. 可知

由选择公理. 从每一个等价类中取一个代表元. 构成集合 V. (Vitali 集)

反证: 若 V 为可测集:

① 互不相交: 若 $\exists r_1, r_2$ s.t. $\{V + r_1\} \cap \{V + r_2\} \neq \emptyset$. 即 $\exists v_1, v_2 \in V$. $v_1 + r_1 = v_2 + r_2 \Rightarrow v_2 - v_1 = r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1$ 与 v_2 在同一等价类中. 与定义矛盾.

② 覆盖性: 对 $\forall x \in [0,1]$. $\exists v \in V$. $x - v \in \mathbb{Q}$. 不妨设 $x - v = r$. 则 $r \in [-1,1]$. $x \in V + r \Rightarrow [0,1] \subset \bigcup\limits_{r\in[-1,1]} \{V + r\}$

若可测. 有可数可加性: $m(\bigcup\limits_{r\in[-1,1]} \{V + r\}) = \sum\limits_{r} m(V + r)$.

有 $m(\bigcup\limits_{r\in[-1,1]} \{V + r\}) \geq m([0,1]) = 1$. $m(V + r) = m(V)$.

1° 若 $m(V) > 0$. 则 $m(\bigcup_r (V + r)) = +\infty < 3$ 矛盾!

2° 若 $m(V) = 0$. 则 $m(\bigcup_r (V + r)) = 0 > 1$ 矛盾!

于是任何情况均不成立. V只能为不可测集.

5.2021

6. (10')记 $\mathbb{Q} = \{r_n\}$ 为所有有理数，考虑 $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ 由下定义:

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^k |x - r_k|}, x \notin \mathbb{Q} \\ \infty, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

试证明: $m(\{x \in \mathbb{R}: f(x) > 1\}) < \infty$

$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}) = m(\{x \in \mathbb{Q} \mid f(x) > 1\}) + m(\{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \mid f(x) > 1\})$

$= m(\mathbb{Q}) + m(\{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \mid f(x) > 1\})$

$= m(\{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \mid f(x) > 1\})$

对 $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 若 $f(x) > 1$. 必有 $\exists r_k$. $|x - r_k| < \frac{1}{4^k}$. 于是 $m = m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{1}{4^k}, r_k + \frac{1}{4^k})) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4^k} = \frac{2}{3} < +\infty$, 证毕

9.(10分) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足 $f(x) + f(y) = f(x + y)$，且在一个正测集上有界，证明 f 是线性函数。

有正测集. 考虑Steinhaus定理.

若r为有理数. 有 $f(r) = r f(1)$.

不妨设f在E上有界. 则 $\exists I \subset E - E$. 设 $|f(x)| \leq M$ as $x \in E$.

对于 $x \in I$. $\exists x_1, x_2 \in E$. $x_1 - x_2 = x \Rightarrow |f(x)| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| \leq 2M$.

设 $I = [a,b]$. 考虑 $x \in [0, b-a]$. 有 $x + a \in [a,b]$. 则 $|f(x)| = |f(x+a) - f(a)| \leq 4M$.

不妨设 $b - a = c$. 对 $\forall x \in \mathbb{R}$. $\exists r, n$. s.t. $|x - r| < \frac{c}{n} \Rightarrow |f(x) - x f(1)| = |f(x - r) - (x - r) f(1)| \leq \frac{4M}{n} + \frac{c|f(1)|}{n} \to 0$

于是 $f(x)$ 为线性函数

6.2016

3. 设 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上a.e.收敛于 f，且对某个 $r > 0$ 和任意 n，均有 $\int_0^1 |f_n|^r dx \leq M < \infty$. 证明: $\forall p \in (0, r)$, $||f_n - f||_p \to 0$.

证明: 据Egorov定理, $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \subseteq [0,1]$. 在 A_ϵ 上 f_n 一致收敛于 f，并且 $m([0,1] - A_\epsilon) < \epsilon$.

一方面, A_ϵ 上, 据一致收敛定义, $\forall \delta > 0, \exists N, n > N, |f_n(x) - f(x)| < \delta$. 于是就有

$$\int_{A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \leq m(A_\epsilon)\delta^p \leq \delta^p.$$

另一方面,据Holder不等式,

$\leq (\int |\ |^r)^{\frac{p}{r}} (\int 1\, dx)^{1-\frac{p}{r}}$

$$\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \leq \left(\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \cdot \left(\int_{[0,1]-A_\epsilon} 1 dx\right)^{\frac{r-p}{r}} \leq \epsilon^{\frac{r-p}{p}} \left(\int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r) dx\right).$$

据Fatou引理,

$$\int_0^1 |f|^r dx \leq \liminf_n \int_0^1 |f_n|^r dx \leq M.$$

所以

$$\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \leq \epsilon^{\frac{r-p}{r}} 2^p (2M)^{\frac{p}{r}}.$$

分别让 δ, ϵ 趋于0, 就得到 $||f_n - f||_p \to 0$.

普期中部分

2026.4.1

1.2025

4. 求解

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x+\sin^k x}{1-e^{-kx}+x^k}dx$$

分段. 除去 $\sin x$ 在等于1时的情况.

$x=0$ 时 $f(x)=0$.

$x>2$ 时 $|f(x)|<\frac{2x}{x^k}=\frac{2}{x^{k-1}}$ $k\to\infty$ 时 $0\le\left|\lim_{k\to\infty}\int_2^{\infty}f\,dx\right|\le\left|\lim_{k\to\infty}\frac{2^{3-k}}{k-2}\right|\to 0$.

$1<x\le 2$ 时 $|f(x)|<\frac{3}{x^k}$ $k\to\infty$ 时 $0\le\left|\lim_{k\to\infty}\int_1^2 f\,dx\right|<\left|\lim_{k\to\infty}\frac{3}{k-1}(1-\frac{1}{2^{k-1}})\right|\to 0$.

$0<x\le 1$ 时 $|f(x)|<\frac{2}{1/2}=4$

由DCT. $I=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

$P_1>P_2$ 则 $L^{P_2}\subset L^{P_1}$ (有限区间)

若无限区间. 二者互不包含.

5. $f,f_1,\cdots,f_n$ 均在 $[0,\ 1]$ 上可测

(1) $f_n\xrightarrow{L_1}f$ 是否能推出 $f_n\xrightarrow{L_2}f$, 证明或者给出反例

(2) $f_n\xrightarrow{L_2}f$ 是否能推出 $f_n\xrightarrow{L_1}f$, 证明或者给出反例

(3) $f_n\xrightarrow{m}f$ 是否能推出 $\lim_{n\to\infty}m(\{|f_n-f|>0\})=0$, 证明或者给出反例

(1) × $f_n(x)=\begin{cases}n^{\frac{3}{4}} & x\in[0,\frac{1}{n})\\ 0 & x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$ $f\equiv 0$. $\|f_n-f\|_{L^1}=\int_0^{\frac{1}{n}}n^{\frac{3}{4}}dx=n^{-\frac{1}{4}}\to 0$. $\|f_n-f\|_{L^2}=(\int_0^{\frac{1}{n}}n^{\frac{3}{2}}dx)^{\frac{1}{2}}=n^{\frac{1}{4}}\to\infty$.

(2) ✓ $\|f_n-f\|_{L^1}=\int_0^1|f_n-f|\cdot 1\,dx\le(\int_0^1|f_n-f|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 1^2dx)^{\frac{1}{2}}=\|f_n-f\|_{L^2}$ 证毕

(3). × $f_n(x)=\frac{1}{n}$. $f(x)=0$. 有 $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}m(|f_n-f|>\varepsilon)=0$ 但 $\forall n>0$. $m(|f_n-f|>0)=1$.

7. g 为周期为 1 的光滑函数且 $\int_0^1 g(x)dx=0$ 。

(1) 求证: 对任意闭区间 $[a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(nx)dx=0$$

(2) 对任意可积函数 f, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f(x)g(nx)dx=0$$

成立

(1). 设 $t=nx$. 则原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}g(t)dt\le\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n}\to 0$. M: g 为周期函数. 则 $\int_{na}^{nb}g\,dx=\int_{nb-c}^{nb}g\,dx$ $c\in[0,1]$ 又 g 光滑. 此有界. 证毕.

(2). ?

例 20.1 (Riemann-Lebesgue 引理). 设 $f\in L([a,b])$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

证明. 设 $f=\chi_{(\alpha,\beta)}(x)$, 其中 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, 故

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin n\beta-\sin n\alpha}{n}\to 0.$$

对一般 $f\in L([a,b])$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 g, 使得 $\int_a^b|f-g|<\varepsilon$. 由上面的步骤, 存在 $n_0\in\mathbb{N}^*$, 使得 $n\ge n_0$ 时, $|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x|<\frac{\varepsilon}{2}$, 故 $n\ge n_0$ 时,

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^b(f(x)-g(x))\cos nx\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$, 另一情形同理. □

2.2023

1. (20分) 判断正误 (证明或者举反例说明你的结论):

(i) 区间上的单调函数可测. ✓

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中每个闭集都是 G_δ 集. ✓

例 11.3. 设 $E\subset\mathbb{R}$, 则 E 上的单调函数是可测的.

证明. 设 f 在 E 上单调增, 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 设 $a'=\sup\{x\in E\mid f(x)<a\}$. 故 $E(f<a)=E\cap(-\infty,a')$, 于是 $E(f<a)$ 可测. □

例 9.1. $\varnothing,\mathbb{R}^d$ 既是 F_σ 集, 也是 G_δ 集. 闭集是 G_δ 集, 开集是 F_σ 集.

证明. 我们证明闭集是 G_δ 集. 设 A 是闭集, 定义 $f(x)=d(x,A)$, 于是由三角不等式,

$$d(x,A)=\inf_{z\in A}d(x,z)\le\inf_{z\in A}d(y,z)+d(x,y)=d(y,A)+d(x,y),$$

同理 $d(y,A)\le d(x,A)+d(x,y)$, 于是 f 是 Lipschitz 连续函数.

考虑 $G_n=\{x\mid f(x)<\frac{1}{n}\}$, 则 G_n 是开集, 且 $A=\cap_{n=1}^\infty G_n$.

2. (15分) 计算以下Lebesgue积分的极限并解释计算的步骤:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k x^n\left(1-\frac{x}{k}\right)^k\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$|x^n(1-\frac{x}{k})^k|\le x^ne^{-x}$ 有 $\int_0^\infty x^ne^{-x}=\Gamma(n+1)=n!$ 可积

故由DCT: 原式 $=\int_0^\infty x^ne^{-x}=n!$

对于 $(1-\frac{x}{n})^n$ 类. 记住 $<e^{-x}$

2. (15分) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为实值函数. 证明以下两说法等价: 本质上为 $\mathbb{R}$ 上开集结构. $G=\bigcup_{k=1}^\infty(a_k,b_k)$

(i) $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((a,+\infty))$ 为 Lebesgue 可测集;

(ii) 对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 G, $f^{-1}(G)$ 为 Lebesgue 可测集.

(ii)→(i) 显然 (i)→(ii) 有 $f^{-1}((-\infty,b))=\bigcup_{k=1}^\infty[f^{-1}((b-k,+\infty))]^c$ 可测. 后易证.

(a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^ne^{x/2}\,\mathrm{d}x$;

$f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^ne^{\frac{x}{2}}\chi_{[0,n]}(x)$. $|f_n(x)|<e^{-x}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$

则可用DCT. $I=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=2$

例 15.3. 计算 $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}(1+\frac{x}{n})^ne^{-2x}\,\mathrm{d}x$. 积分限套入 f 中 [记]为特征函数.

解. 设 $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^ne^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)$, $E=[0,+\infty)$. 根据数学分析的知识, $f_n\nearrow e^{-x}$. 由 Levi 单调收敛定理, $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n=\int_{[0,+\infty)}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$. 最后这一步我们提前用了 Lebesgue 积分与 Riemann 积分相等的事实, 这个事实我们后面解释. □

4. (15分) 设 $f,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ 非负可测且 $f_n\to f$ a.e. on $[a,b]$. 注意积分号内要为可测函数.

交换积分极限: Levi. DCT. 有界. Fubini: Tonelli:

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f_ne^{-f_n}dm=\int_{[a,b]}fe^{-f}dm.$$

由于 f_n. f 非负. $|f_ne^{-f_n}|\le\frac{1}{e}$. 由有界收敛定理. 且由 xe^{-x} 连续. f_n 与 f 可测. 则 $f_ne^{-f_n}$ 与 fe^{-f} 可测. 故极限积分可交换. 证毕

且 $\frac{1}{e}$ 在 $[a,b]$ 上可积. 这句不可忽略☆

5. (15分) 若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则存在包含 E 的 G_δ 集 H, 使得 $m(H)=m_*(E)$. 对测度大小, 一定分为 $<\infty$ 与 $=\infty$.

对外测度. 从定义出发.

$m(E)=+\infty$ 时. 取 $H=\mathbb{R}^n$ 即可

$m(E)<+\infty$ 时. 由外测度定义: $m^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^\infty|I_i|\mid E\subset\bigcup_{i=1}^\infty I_i$. I_i 为开矩体$\}$, 则对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\exists$ 可数开矩体 $\{I_{kj}\}$ s.t. $E\subset\bigcup_{j=1}^\infty I_{kj}$. $\sum_{j=1}^\infty|I_{kj}|<m^*(E)+\frac{1}{k}$

令 $G_k=\bigcup_{j=1}^\infty I_{kj}$ G_k 为开集 且 $E\subset G_k$. $m(E)\le m(G_k)<m(E)+\frac{1}{k}$.

取 $H=\bigcap_{k=1}^\infty G_k$. H 为 G_δ 集. $m(E)\le m(H)\le m(G_k)<m(E)+\frac{1}{k}$. 令 $k\to\infty$. 有 $m(H)=m^*(E)$. 证毕.

6. (15分) 设 $E_1,E_2,\ldots,E_n$ 是 $[0,1]$ 的可测子集, 且 $[0,1]$ 上的每个点至少在其中的 k 个子集中出现. 证明: $\exists i_0$, 使得 $m(E_{i_0})\ge k/n$。 直观来看是需要找 E_{i_0} 与数 k 联系: 想到 $\chi_E(x)$ 与积分

定义示性函数. 有 $\sum_{i=1}^n\chi_{E_i}(x)\ge k$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立. $\Rightarrow\sum_{i=1}^n m(E_i)=\sum_{i=1}^n\int_{[0,1]}\chi_{E_i}dm$ 有 $\chi_{E_i}(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可测. 由逐项积分定理 $:=\int_{[0,1]}\sum_{i=1}^n\chi_{E_i}dm\ge\int_{[0,1]}k\,dm=k$

故有平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m(E_i)\ge\frac{k}{n}\Rightarrow\exists i_0$. s.t. $m(E_{i_0})\ge\frac{k}{n}$

7. (10分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测, $V\subset\mathbb{R}$ 是开集, $0\in V$. 证明: 存在可测集 E, $m(E)>0$, 使得对任何 $x,y\in E$ 都有 $f(x)-f(y)\in V$. 想到 Steinhaus 定理.

由 $V\subset\mathbb{R}$ 为开集. $\exists\delta>0$. $(-\delta,\delta)\subset V$. 只需证 $\exists E$. $m(E)>0$. $\forall x,y\in E$ 有 $f(x)-f(y)\in(-\delta,\delta)$

取 $A_n=\{x\mid |f(x)|\le n\}$. $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ 若对 $\forall n$. $m(A_n)=0$. $m(\mathbb{R})=0$. 矛盾. 则 $\exists n_0\in\mathbb{N}^+$. $m(A_{n_0})>0$. 记 $A=A_{n_0}$. 则有 $m(A)>0$ 且 $|f(x)|\le n_0$. $\forall x\in A$.

由 Steinhaus 定理. $\exists\delta'>0$. $(-\delta',\delta')\subset A-A$. 取 $U=(-\delta',\delta')\cap(-\delta,\delta)$ 则 U 为含0的开邻域.

对 $\forall 0<h<\frac{\delta}{2}$. 取 $E=A\cap(A-h)=\{x\in A\mid x+h\in A\}$ 则 E 可测. $m(E)>0$. $|f(x)-f(y)|<\delta$. $\Rightarrow f(x)-f(y)\in(-\delta,\delta)\subset V$.

3.2023(2)

1. (20 分) 判断正误 (证明或者举反例证明你的结论) —— 证函数可测 —— 结论,如连续(可测)为可测. / 定义

(a) 连续函数可测。

(b) 可积函数几乎处处有限。 —— 经典放缩.

(a). 只需证 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)<a\}$ 为可测集. 由连续函数,开集原像是开集 ✓

(b). $E_k=\{x \mid |f|\geq k\}$. 则 $E=\{x\mid |f(x)|=+\infty\}$. $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ 且 $E_k\searrow$. $\int_{\mathbb{R}^n}|f|dx\geq\int_{E_k}|f|dx\geq k\cdot m(E_k)\to m(E_k)\leq\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^n}|f|dx\to 0$ 则单调收敛定理. $m(E)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=0$.

4. (15 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一一映射,且保持点集的外测度不变。

证明:对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f(E)$ 可测。 —— 证集合可测: Carathéodory 条件. 若 E 可测, $\forall A$. $m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$

由 f 为双射. f^{-1} 存在. 对 $\forall A\subset\mathbb{R}^n$. 令 $A'=f^{-1}(A)$.

要证 $\forall A\subset\mathbb{R}^n$. 有 $m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$

有 $f(A'\cap E)=f(A')\cap f(E)=A\cap f(E)$. 由 f 保外测度. $m^*(A'\cap E)=m^*(f(A'\cap E))=m^*(A\cap f(E))$ $m^*(A')=m^*(f(A'))=m^*(A)$

$f(A'\cap E^c)=f(A')\cap f(E^c)=A\cap f(E^c)$ $m^*(A'\cap E^c)=m^*(f(A'\cap E^c))=m^*(A\cap f(E^c))$

已知 E 可测. 即对 $A'\subset\mathbb{R}^n$. 有 $m^*(A')=m^*(A'\cap E)+m^*(A'\cap E^c)\Rightarrow m^*(A)=m^*(A\cap f(E))+m^*(A\cap f(E^c))$ 又 A 任意. 则 $f(E)$ 可测. 证毕.

例 7.2 (Borel-Cantelli 引理). 设 $\{E_k\}$ 可测, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$, 则

$$m\left(\limsup_{k\to\infty}E_k\right)=0.$$

证明. $\limsup_{k\to\infty}E_k=\cap_{j=1}^{\infty}\cup_{k=j}^{\infty}E_k$, 令 $B_j=\cup_{k=j}^{\infty}E_k$, 则 $B_1\supset B_2\supset\cdots$. 由于 $m(B_1)<\infty$, 则 —— 单调收敛定理: "↗": 无限制; "↘": $m(第1个)<\infty$.

$$m\left(\limsup_{k\to\infty}E_k\right)=m\left(\lim_{j\to\infty}B_j\right)=\lim_{j\to\infty}m(B_j)\leq\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}m(E_k)=0.$$

6. (10 分) 设 $f,f_n\in L^1, n=1,2,\cdots$ 满足 $f_n\to f$ a.e., 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m.$$ —— 无非负条件. 一般用含绝对值的函数 g 凑出非负. 此类用 Fatou 引理是常见的.

证明:对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m=\int_E|f|\mathrm{d}m.$$

构造辅助函数 $g_n=|f_n|+|f|-|f_n-f|$ 有 $g_n\geq0$ 为非负可测函数列. $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 则 $|f_n-f|\xrightarrow{a.e.}0$

$\Longrightarrow$ 由 Fatou 引理: $\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{n\to\infty}|g_n|dm=2\int_{\mathbb{R}^n}|f|dm\leq\varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_ndm=\varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|+|f|-|f_n-f|dm=2\int|f|dm-\varlimsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n-f|dm$

则 $\varlimsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n-f|dm\leq0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n-f|dm=0$. 又 $\left|\int_E|f_n|-|f|dm\right|\leq\int_E\big||f_n|-|f|\big|dm\leq\int_E|f_n-f|dm\leq\int_{\mathbb{R}^n}|f_n-f|dm\to0$. 证毕.

7. (10 分) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, $m(E)<+\infty$, f 在 E 上非负可测。对于 $\varepsilon>0$, 定义

$$E_k(\varepsilon):=\{x\in E:k\varepsilon\leq f(x)<(k+1)\varepsilon\},k=1,2,\cdots$$ —— 基础题. 简单函数逼近.

和

$$A(\varepsilon):=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}km(E_k(\varepsilon)).$$

证明:

$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{\varepsilon\to0}A(\varepsilon).$$

对 $\forall\varepsilon>0$. $\forall x\in E_k(\varepsilon)$ 有 $k\varepsilon\leq f(x)\leq(k+1)\varepsilon$. $E=\bigcup_{k=0}^{\infty}E_k(\varepsilon)$. 在 E 上积分: $\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot m(E_k(\varepsilon))\leq\int_E fdm\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)m(E_k(\varepsilon))$

即 $A(\varepsilon)<\int_E fdm<A_\varepsilon+\varepsilon\cdot m(E)$ 证毕.

4.2022

4. (15 分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数。

(a). 证明 f 的图 $\Gamma=\{(x,y)|y=f(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 从而是可测集; —— 证闭集. 只需收敛列收于其内.

(b). 证明 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集。

(a). $\forall$ Γ 中收敛序列 $\{(x_n,f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$. 设其极限为 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. 由连续函数: $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(x_0)$ 即 $y_0=f(x_0)$ 则 $(x_0,y_0)\in\Gamma$. 于是闭. 所以可测.

(b) 取指示函数 $f(x,y)=\chi_\Gamma(x,y)$. 为非负可测函数

由 Tonelli 定理. $m_2(\Gamma)=\int_{\mathbb{R}}dx\int_{\mathbb{R}}\chi_\Gamma(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}}m(\{y\in\mathbb{R}\mid x,y\in\Gamma\})dx$ 内为单点集. 故 $m_2(\Gamma)=\int_{\mathbb{R}}0dx=0$.

7. (10 分) 运用 Borel-Cantelli 引理证明以下结论。令

$E=\{x\in\mathbb{R}|$存在无穷多有理数$\frac{p}{q}$, 其中p和q互素, 使得$|x-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^{2022}}\}$,

证明 $m(E)=0$.

设 $E_q=\bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\(p,q)=1}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^{2022}},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^{2022}}\right)$ $m(E_q)\leq\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\(p,q)=1}}\frac{2}{q^{2022}}<\frac{2}{q^{2021}}\Rightarrow\sum_{q=1}^{\infty}m(E_q)<\infty\Rightarrow$ 又 $E=\varlimsup_{q\to\infty}E_q$. 证毕

5.2021

1. (10分) 设$\{f_n\}$是$L^1([0,1])$中的一列非负函数, 满足$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=1$和$\int_{1/n}^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\leq 1/n$, 对全部的$n\geq1$。若$g(x)=\sup_n f_n(x)$, 证明$g\notin L^1([0,1])$。(注意: g的定义中不是lim sup。) —— 反证.

有 $\int_0^{\frac{1}{n}}g(x)dx\geq1-\frac{1}{n}$. 设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}g(x)dx$. 则 $a_n\geq0$ 且 $a_n\searrow$. 由单调有界定理: a_n 有极限 a. 若 $g\in L^1[0,1]$. $a=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}g(t)dt=0$.

又 $a_n\geq1-\frac{1}{n}\Rightarrow n\to\infty$ 时 $a_n\geq1$. 矛盾! 则 $g\notin L^1[0,1]$

4. (15分) 令$m(E)<\infty$, $\{f_n\}$是E上的可测函数列, f是E上的可测函数. 证明: f_n在E上依测度收敛于f当且仅当f_n的任意子序列f_{n_k}都可以从中再找到一个子序列$f_{n_{k_i}}$在E中几乎处处收敛于f.

$\Leftarrow$) Riesz $\Rightarrow$) 反证. 若 $f_n\overset{m}{\nrightarrow}f$. $\exists\sigma_0>0$. $\varlimsup_{n\to\infty}m(\{x\in E\mid |f_n-f|\geq\sigma_0\})=\delta_0>0$. 则存在子列 $\{n_k\}$.

有 $m(\{x\in E\mid |f_{n_k}(x)-f(x)|\geq\sigma_0\})\geq\frac{\delta_0}{2}>0$. 但 $\{f_{n_k}\}$ 有子列 $\{f_{n_{k_i}}\}\xrightarrow{a.e.}f$ 即 $\lim_{i\to\infty}m(\{x\in E\mid |f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geq\sigma_0\})=0$ 矛盾!

6. (10分) 设$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$是一个非负可积函数, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是非负严格单调函数。能否证明$g\circ f$是可积函数? 请详细解释原因。

不能. $d=1$ 时. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$ $g(x)=x^2\chi_{[0,1]}$ 则 $g\circ f=\frac{1}{x}\chi_{[0,1]}$ 不可积

H 期末部分

2026.4.7

1.2025

(10 分) 证明下列等价:

(i) $f\in\mathrm{Lip}[a,b]$ 且 Lipschitz 常数为 M; —— AC定义的理解与巩固

(ii) $f\in\mathrm{AC}[a,b]$ 而且 $|f'(x)|\leqslant M$, a.e. $x\in[a,b]$.

(i)→(ii) 对 $\forall$ 有限个互不相交的区间 $(x_i,y_i)\subset[a,b]$. 有 $\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\leq M\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|$. 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. $\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$ 时有 $\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. 故 $f\in AC[a,b]$

(ii)→(i) 对 $f\in AC[a,b]$. 有 $\forall x<y$. $x,y\in[a,b]$. 有 $f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)dt\Rightarrow|f(y)-f(x)|\leq\int_x^y|f'(t)|dt\leq M(y-x)$. 即 $f\in\mathrm{Lip}[a,b]$.

(10 分) 假设 $f\in L^2(0,+\infty)$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad \text{a.e. } x\in[0,+\infty)$$ —— 证为0. 可考虑 Borel-Cantelli 引理. —— 由 Chebyshev 不等式. 令 $A_{n,\varepsilon}=\{x\in[0,1]:|f(x+n)|>\varepsilon\}$

$|A_{n,\varepsilon}|=\int_0^1 1_{A_{n,\varepsilon}}dx\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1|f(x+n)|^2dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_n^{n+1}|f(t)|^2dt$ 求和 $<\infty$.

先证 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|^2$ 在 $[0,\infty)$ 上几乎处处收敛. 有 $|f(x+n)|^2$ 非负可测. 由逐项积分定理. $\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1|f(x+n)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}|f(x)|^2dx\le\int_0^{\infty}f^2(x)dx<\infty$.

则有 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|^2<\infty$ a.e. $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$ a.e. $x\in[0,1]$. 对 $\forall x\in[0,\infty)$, $\exists k\in\mathbb{Z}^+$, $y=x-k\in[0,1)$. 有 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=\lim_{n\to\infty}f(y+n+k)=\lim_{m\to\infty}f(y+m)=0$. 证毕

或：若 f 连续 $\in L^p$, 一定 $\to 0$. $\left(|f(x+1)-f(x)|=\left|\int_x^{x+1}f'(x)dx\right|\le\|f'\|_{L^1[x,x+1]}\to 0\right)$

若不连续, 可振荡 $\not\to 0$.

(10 分) 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\leqslant\int_0^1 f(g(x))\,dx,\quad\forall g\in L^{\infty}[0,1]$$

对任意 g 都成立. 可取特殊简单函数达到要求.

证明：f 是凸函数.

即证 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 对 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $\lambda\in[0,1]$. 取 $g=\begin{cases}x_1 & x\in[0,\lambda]\\ x_2 & x\in(\lambda,1]\end{cases}$ 即可.

(10 分) 设 μ 是自然数集合 $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ 上的计数测度, 假设 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } x=y\\ -1, & \text{if } x=y+1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

→ 可积定义的理解.

证明

$$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}f(x,y)\,d\mu(x)d\mu(y)\neq\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}f(x,y)\,d\mu(y)d\mu(x)$$

说明该结果与 Fubini 定理为何不冲突.

$LHS=\sum_{y=1}^{\infty}\left(\sum_{x=1}^{\infty}f(x,y)\right)=\sum_{y=1}^{\infty}0=0$. $RHS=\sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{\infty}f(x,y)\right)=1+\sum_{x=2}^{\infty}0=1$ 故 $LHS\neq RHS$. 不冲突：Fubini 定理要求 f 可积, 即 f^+ 与 f^- 均可积, 即 $|f|$ 可积. 显然 $\int|f|=\infty$ 不满足条件.

(10 分) 假设 $f\in AC[a,b]$, 证明：f 将零测集映为零测集. 简单题, 主要是方法.

对零测集, 无法用其内部, 考虑外测度.

$\forall\delta>0$, $\exists\{I_k\}$ 为可数开区间列覆盖 E, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\delta$. 设 $I_k=(a_k,b_k)$. 则 $\sum(b_k-a_k)<\delta$. $\forall\varepsilon>0$, $\sum|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ 有 $f(E)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}f(I_k)$. $m^*(f(E))\le m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}f(I_k)\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(f(I_k))\le\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$. 证毕

2. 2024

题目 (10 分). 假设

$$f(x)=\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{t}dt.$$

证明：

DCT 用于函数列. 此处为比较判别法

$$f\in BV[0,1].$$

由DCT. $|t^{-\frac12}\sin\frac1t|\le|t^{-\frac12}|\in L^1[0,1]$ $\Rightarrow$ $t^{-\frac12}\sin\frac1t\in L^1[0,1]$ 又由积分的绝对连续性. $f\in AC[0,1]\subseteq BV[0,1]$

第七题

题目 (15 分). 假设 (X,Γ,μ) 是一个测度空间,

$$f\in L^1(X,\mu)$$

不能用有界收敛定理

$\Downarrow$

要求 $m(E)$ 有界

而且

$$0\leqslant f\leqslant 1,\forall x\in X.$$

证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X(f(x))^n\,d\mu(x)=\mu\left(f^{-1}(\{1\})\right).$$

$f\le|f|$ 且 $|f|\in L^1$ $\Rightarrow$ DCT 知 $\lim_{n\to+\infty}\int_X(f(x))^n d\mu(x)=\int_X\lim_{n\to\infty}(f(x))^n d\mu(x)=\int_X\left(0\chi_{[f(x)<1]}+\chi_{[f(x)=1]}\right)d\mu(x)=\mu(f^{-1}(1))$

题目 (5 分). 假设 $f\in L^{\infty}(\mathbb{R})$, 而且

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|dx=0.$$

证明：

$$f=\text{常数},\quad\text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

答案 (解法一). 根据 *Lebesgue* 微分定理/*Lebesgue* 点定理, 对几乎处处的 x 和几乎处处的 y,

$$f(x)-f(y)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(z)dz-\frac{1}{h}\int_y^{y+h}f(z)dz\right),\quad(2')$$

整理后得到

$$|f(x)-f(y)|=\lim_{h\to 0}\left|\int_x^y f(z)dz-\int_x^y f(z+h)dz\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{h}|f(z+h)-f(z)|dz,\quad(2')$$

令 $h\to 0$, 得到 $f(x)=f(y)$, 对几乎处处的 x 和几乎处处的 y 成立, 于是 f 等于某常数 (前式成立的某个 $f(x)$) 几乎处处 (1′)。

3. 2023

1. (10分) 举例说明下面两个包含关系均为真包含关系

$$Lip[0,1]\subset AC[0,1]\subset BV[0,1]$$

证AC：证 $f'\in L[a,b]$ 且 $f(x)=f(a)+\int_a^b f'(x)dx$

证Lip：证 $f'\in L^{\infty}[a,b]$.

$f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}$ $(\alpha,\beta>0)$.

$AC[0,1]$: $\alpha>\beta$

即证 $f'(x)\in L^1[0,1]$ 有 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}$

则 $|f'(x)|\le|\alpha x^{\alpha-1}|+|\beta x^{\alpha-\beta-1}|$ $\Rightarrow$ $\int_0^1|f'(x)|dx=1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}<\infty$ 于是 $f'(x)\in L^1[0,1]$

证有 $f(x)=f(0)+\int_0^1 f'(x)dx$ 对 $\forall x>\varepsilon>0$. 有 $f(x)\in AC[\varepsilon,1]$ 即 $f(x)-f(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^1 f'(x)dx$ 由 f 的连续性: $\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)=f(0)$.

对 $f'(x)\chi_{[\varepsilon,1]}(x)$, 有 $|f'(x)\chi_{[\varepsilon,1]}|<|f'(x)|\in L^1[0,1]$ $\Rightarrow$ 由DCT. 有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 f'(x)dx=\int_0^1 f'(x)dx$ $\Rightarrow$ $f(x)=f(0)+\int_0^1 f'(x)dx$ 则 $f\in AC[0,1]$

$Lip[0,1]$: $\alpha\ge\beta+1$

即要 $f'(x)\in L^{\infty}[0,1]$. $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\alpha}}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}$ $\Rightarrow$ $\alpha\ge\beta+1$ 时成立.

Cantor 函数：设为 $\varphi(x)$, 则 $\varphi(x)\in BV[0,1]\setminus AC[0,1]$

因为 $\int_0^1\varphi'(x)dx<\varphi(1)-\varphi(0)=1$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)\notin AC[0,1]$

又 $\varphi(x)$ 是单调增. 有 $\bigvee_0^1\varphi(x)=\varphi(1)-\varphi(0)<\infty$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)\in BV[0,1]$ 证毕

5.（10分）证明 $\mathbb{R}^3$ 中存在可数个互不相交的闭集小球 $B_j \subset [0,1]^3$，使得

$$m([0,1]^3 \backslash (\cup_j B_j)) = 0$$

——回顾Vitali覆盖，不要没印象

$[0,1]^3$ 中全部闭集小球构成 $[0,1]^3$ 的一个Vitali覆盖。由Vitali覆盖定理：$[0,1]^3 \subset \bigcup_j B_j \cup Z$　Z为零测集，证毕

4.2022

6.(10分) 设 k 是非负整数，$\theta \in [-1,1]$，计算 Lebesgue 积分：

$$\int_0^{\infty} x^k x^{-\log x}(1+\theta \sin(2\pi \log x))dx$$

$I = \int_0^{\infty} x^{k-\ln x}dx + \theta \int_0^{\infty} x^{k-\ln x}\sin(2\pi \ln x)\,dx \triangleq I_1 + \theta I_2$

令 $t = \ln x \Rightarrow I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+(k+1)t}dt = e^{(\frac{k+1}{2})^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\frac{k+1}{2})^2}dt = \sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{(k+1)^2}{4}}$

$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+(k+1)t}\sin 2\pi t\,dt = 0.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2+bt}\sin ct\,dt = e^{\frac{b^2-c^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot \sin\frac{bc}{2a}$

(cos)　　(cos)

证明思路：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+(b+ic)t}dt$ 且处可略.

5.2021

2.设$f \in \mathrm{BV}[0,1]$，集合$E = \{x \in [0,1] | f'(x) = \infty\}$是否 Lebesgue 可测？

是. f在$[0,1]$上a.e.可导. 即$f'(x)$在$x \in [0,1] \backslash N$上$\exists$且有限

设$D = \{x \in [0,1] \mid f'(x)$存在有限$\}$. 则$D$为$[0,1]$可测子集且$m([0,1]\backslash D) = 0$. 有$E \subseteq [0,1]\backslash D \Rightarrow m(E) = 0$. E零测故可测

4.设$f \in L(E)$，证明：

$$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} m(\{x \in E | f(x) > \lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

$\int_E |f(x)|^p dx = \int_E \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}dt\,dx = \int_E \int_0^{\infty} pt^{p-1}\mathbb{1}\{|f(x)|>t\}dt\,dx = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mathbb{1}\{x \in E \mid |f(x)|>t\}dt$

Tonelli

普期末部分

2026.4.7

1.2025

定义在 $[0,1]$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 和 f，求证

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}dx = 0$$

——积分分段算.

$\Rightarrow$) $A_{n\varepsilon} = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ 则有 $n\to\infty$ 时 $m(A_{n\varepsilon}) \to 0$. $\int_0^1 \cdots dx = \int_{A_{n\varepsilon}} \cdots dx + \int_{A_{n\varepsilon}^c} \cdots dx \le \int_{A_{n\varepsilon}} 1\,dx + \int_{A_{n\varepsilon}^c} \varepsilon\,dx \le m(A_{n\varepsilon}) + \varepsilon \to 0$

$\Leftarrow$) $\int_0^1 \cdots dx \ge \int_{A_{n\varepsilon}} \cdots dx > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(A_{n\varepsilon})$ 故有 $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\varlimsup_{n\to\infty} m(A_{n\varepsilon}) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(A_{n\varepsilon}) = 0$, 即 $f_n \xrightarrow{m} f$.

四.
1. 是否存在一个处处不连续的函数，它几乎处处等于一个连续函数
2.L^1 收敛是否存在子列几乎处处收敛
3.L^1 收敛是否能推出几乎处处收敛

1. 除零测集外连续，则不存在.
2. 由Chebyshev不等式：$m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon}\int |f_n - f|dx \to 0$. 即 $f_n \xrightarrow{m} f$. 由Riesz定理证毕.
3. 不能. 经典反例：$f_{n,k}(x) = \chi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}(x)$　$1 \le k \le n$. 排为$\{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \cdots\}$

Jordan分解：$f = g - h$. g, h单增

2. 设 $f \in BV[a,b]$

求证：存在 $g \in AC[a,b]$ 和 $h \in BV[a,b]$，满足 $h'(x) = 0$　a.e.　on　$[a,b]$，　s.t.　$f = g - h$

——见AC. 想积分

BV函数性质：f' a.e.存在. f'在$[a,b]$上L-可积

定义$g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$　$h(x) = f(x) - g(x)$. 有$g \in AC[a,b]$. $h'(x) = f'(x) - g'(x) \overset{a.e.}{=} 0$

定理 25.2. 设 $f \in AC([a,b])$ 且 $f'(x) = 0$ *a.e.* 于 $[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

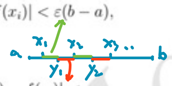
证明. 令 $E = \{x \in (a,b) \mid f'(x) = 0\}$, 由条件可知, E 可测. 对任意 $\varepsilon > 0$, 以及任意 $x \in E$, 当 $h_x > 0$ 充分小时, 有 $|f(x+h_x) - f(x)| < \varepsilon h_x$. 令 $\mathcal{F} = \{[x, x+h_x]\}$, 则 $\mathcal{F}$ 是 E 的 Vitali 覆盖. 故存在有限个区间 $\{[x_i, y_i]\}$ 互不相交, 且

$$m\left((a,b)\backslash \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]\right) = m\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]\right) < \delta.$$

在 $\bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]$ 上, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon(b-a),$$

由绝对连续性, 在 $(a,b)\backslash \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]$ 上有



$$\sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(y_i)| < \varepsilon.$$

故

$$|f(b) - f(a)| = \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \le \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

以上对任意 $\varepsilon > 0$ 成立. 令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $f(a) = f(b)$. 以上讨论对任意 $c \in (a,b)$ 也成立, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数. □

定义 23.1 (Vitali 覆盖). 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}$ 为一族区间 (开, 闭, 半开半闭, 不能为单点, 可能不可数多). 若对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $x \in E$, 存在 $I_\alpha \in \mathcal{F}$, 使得 $x \in I_\alpha$, $|I_\alpha| < \varepsilon$, 则称 $\mathcal{F}$ 是 E 的 **Vitali 覆盖**.

定理 23.2 (Vitali 覆盖定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, $m_*(E) < +\infty$, $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}$ 为 E 的 Vitali 覆盖, 则:
(1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的区间 $\{I_1, \cdots, I_n\} \subset \mathcal{F}$, 使得 $m_*(E \backslash \bigcup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon$.
(2) 存在可数个互不相交的区间 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, 且 $m_*(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$.

2.2024

三、（15分）设$a, b > 0$, 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

证明: $f \in BV[0,1]$当且仅当$a > b$. 并在$a = b$时，对任意给定的$\alpha \in (0,1)$，构造一个不是有界变差的f满足α阶Holder连续条件，即存在$A > 0$使得$|f(x) - f(y)| \le A|x-y|^\alpha$对任意$x, y \in [0,1]$成立。

$\Rightarrow$) 若 $a \le b$. 取 $x_k = (\frac{1}{k\pi})^{\frac{1}{b}}$ $f(x_k) = 0$. $y_k = (\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi})^{\frac{1}{b}}$. $f(y_k) = (-1)^k(\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi})^{\frac{a}{b}}$. $\sum_{k=1}^{n-1}|f(y_k) - f(x_k)| = \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi})^{\frac{a}{b}}$ 发散

$\Leftarrow$) $f'(x) = ax^{a-1}\sin x^{-b} - bx^{a-b-1}\cos x^{-b}$　$x \in (0,1]$. $\int_0^1 |f'(x)|dx \le a\int_0^1 x^{a-1}dx + b\int_0^1 x^{a-b-1}dx < \infty$. 则$|f'|$可积, f为BV函数

Hölder: $f(x) = x^a \sin\frac{1}{x^a}$ $0 < x \le 1$. $f(0) = 0$. $a = \alpha$

$x = 0, y = 0$时 ✓

$x = 0$. $0 < y \le 1$时 $|f(y) - f(0)| \le y^a = y^\alpha = |0-y|^\alpha$ ✓

$0<x,y\le 1$ 时 $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|\le(a\xi^{a-1}+a\xi^{-1})\cdot|x-y|$ $\xi\ne 0$ 时 ✓

$\xi\to 0$ 时 $|f(x)-f(y)|\le|x^a-y^a|+y^a|\sin x^{-a}-\sin y^{-a}|$ 可放缩成立.

3.2023

2. (15分) 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f'(x)\ge 0$ a.e., 证明: f 是增函数.

想到积分.

$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ $f'\in L^1[a,b]$. $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)dx\ge 0$

4. (15分) 设 $f\in L^1[0,1]$, 令 $F(x):=\int_x^1 f(t)dt$. 证明:

(i) $F\in L^1[0,1]$;

(ii) $\lim_{x\to 0+} xF(x)=0$;

证Lebesgue可积,在被积函数加 $|\cdot|$

(i). $\int_0^1|F(x)|dx=\int_0^1\left|\int_x^1 f(t)dt\right|dx\le\int_0^1\int_x^1|f(t)|dt\,dx$ 由Fubini定理. $=\int_0^1|f(t)|dt\int_0^t dx=\int_0^1 t|f(t)|dt\le\|f\|_{L^1}<\infty$. 故 $F\in L^1[0,1]$

(ii). $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0.\int_0^\delta|f(t)|dt<\varepsilon$. $F(x)=\int_x^\delta+\int_\delta^1 f(t)dt\Rightarrow|xF(x)|\le x\int_x^\delta|f(t)|dt+x\int_\delta^1|f(t)|dt<x\varepsilon+xM\to 0$.

6. (10分) 设函数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f_k\to f$ a.e. 且 $\sup_k\|f_k\|_1<\infty$. 证明:

$$\lim_{k\to\infty}\{\|f_k\|_1-\|f_k-f\|_1\}=\|f\|_1.$$

构造非负函数列

$|f_k|\le|f_k-f|+|f|\Rightarrow\|f_k\|_1\le\|f_k-f\|_1+\|f\|_1$ 即 $\|f_k\|_1-\|f_k-f\|_1\le\|f\|_1$

对非负列 $(|f_k|-|f_k-f|)$ 用Fatou引理. $\varliminf_{k\to\infty}(\|f_k\|_1-\|f_k-f\|_1)\ge\|f\|_1$ → 证毕

4.2022

7. (5 分) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上指定的零测度集合，证明存在一个单调的函数 f，使得 f 在集合 E 上不可导。

$\exists$ 开区间 $\{I_n\}_{n=1}^\infty$. $E\subset\bigcup_{n=1}^\infty I_n$. $\sum_{n=1}^\infty|I_n|<\infty$. $f(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\chi_{(a_n,\infty)}(x)$ 其中 $I_n=(a_n,b_n)$. 则 f 单增. 不可导易证

5. (15 分) 设 f_n 是定义在 $[a,b]$ 上的单调增的绝对连续函数。如果函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty f_n$ 在 $[a,b]$ 上点点收敛于 f，求证：f 也是绝对连续的。

令 ε 为 $\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^n}$.

对每个 $n\in\mathbb{N}^*,\forall\varepsilon>0.\exists\delta_n>0.\sum_k(y_k-x_k)<\delta_n$ 时 $\sum_k|f_n(y_k)-f_n(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2^n}$ 取 $\delta=\min_i\delta_i$. 则对 $\forall$ 满足 $\sum_k(y_k-x_k)<\delta$ 的区间组,有 f_n 满足上述不等式.

$\sum_k|f(y_k)-f(x_k)|=\sum_k\left|\sum_{n=1}^\infty(f_n(y_k)-f_n(x_k))\right|=\sum_k\sum_{n=1}^\infty(f_n(y_k)-f_n(x_k))=\sum_{n=1}^\infty\sum_k\cdots<\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$. 证毕.

4. (15 分) 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，$f_n:B\to\mathbb{R}$ 是一列可测函数，而且满足 (a).f_n 几乎处处收敛于函数 f；(b).$\|f_n\|_{L^2(B)}\le 1$ 对于任何的 n；求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n=\int_B f.$$

由已知条件判断方法

Fatou只能用于非负函列

对 $|f_n|^2$ 用Fatou引理. 有 $\int_B|f|^2=\int_B\varliminf_{n\to\infty}|f_n|^2\le\varliminf_{n\to\infty}\int|f_n|^2\le 1\Rightarrow f\in L^2(B)$ 且 $\|f\|_{L^2}\le 1$.

有 $|\int_B f_n-\int_B f|=|\int_B(f_n-f)|\le(\int_B 1^2)^{\frac12}(\int_B(f_n-f)^2)^{\frac12}=(\int_B|f_n|^2+|f|^2-2f_nf)^{\frac12}$

由 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$. $|f_nf|\le\frac{|f_n|^2+|f|^2}{2}$ 由DCT. 得 $\lim_{n\to\infty}\int_B f_nf=\int_B f^2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=0\Rightarrow\|f_n-f\|_{L^2}\to 0$. 由B有界. $\|f_n-f\|_{L^1}=0$ 证毕

5.2021

7. (15分) 在实分析期中改卷的过程中，助教看到李四同学在第三题的证明中使用了以下错误结论：“对于[0,1] 上的连续函数f，可将[0,1] 区间分成可数多个子区间的并，使得f 在每个子区间上是单调的。”本题我们来构造一个[0,1] 上的连续函数，且满足：在任何一个[0,1] 的子区间上都不单调。

(1)(5分) 证明：存在一个[0,1] 的可测子集A，使得：对任何一个[0,1] 的子区间I均有$0<m(A\bigcap I)<m(I)$。[提示：用类似Cantor集合的构造方法构造这样的集合。]

(2)(10分)构造一个[0,1] 上的连续函数，且满足：在任何一个[0,1] 的子区间上都不单调。提示：利用第(1)小问结论和微积分基本定理。

1. **第1步**：取区间 $[0,1]$，删除中间长度为 $1/4$ 的开区间 $(3/8,5/8)$，剩余两个闭区间：
   $[0,3/8]\cup[5/8,1]$，　总剩余长度 $1-1/4=3/4$.
2. **第2步**：对每个剩余闭区间，删除中间长度为其长度 $1/4$ 的开区间 (即每个区间删除长度为 $3/8\times 1/4=3/32$ 的部分)，剩余4个闭区间，总长度：
   $3/4-2\times 3/32=3/4-3/16=9/16$.
3. **第 n 步**：对第 $n-1$ 步剩余的 2^{n-1} 个闭区间，每个删除中间长度为其长度 $1/4$ 的开区间，剩余 2^n 个闭区间，总长度：
   $m_n=(3/4)^n$.
4. **定义集合**：令 $A=\bigcap_{n=1}^\infty A_n$，其中 A_n 为第 n 步剩余的闭区间的并。

验证性质

1. **A 是可测集**：闭集的交是 Borel集，故 A 可测，且 $m(A)=\lim_{n\to\infty}m_n=\lim_{n\to\infty}(3/4)^n=0$ 不成立，实际 $m(A)=\prod_{k=1}^\infty(3/4)=3/4>0$ (无穷乘积收敛)。
2. **对任意开区间 I，$0<m(A\cap I)<m(I)$**：
   - 若 I 与 A 相交，则存在 n，使得 I 包含第 n 步的某个闭区间 J，故 $m(A\cap I)\ge m(A\cap J)>0$。
   - 由于每一步都删除了部分区间，I 中存在不属于 A 的点，故 $m(A\cap I)<m(I)$。

(2) 构造处处不单调的连续函数

目标：构造 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，且在任意子区间上不单调。

构造步骤

1. **定义函数**：取第 (1) 问中的集合 A，定义
   $f(x)=\int_0^x(\chi_A(t)-\chi_{A^c}(t))dt,$
   其中 χ_A 为 A 的特征函数，$A^c=[0,1]\setminus A$。
2. **验证连续性**：被积函数 $g(t)=\chi_A(t)-\chi_{A^c}(t)$ 是有界可测函数 ($|g(t)|\le 1$)，故 $f(x)$ 是绝对连续函数，因此连续。
3. **验证处处不单调**：
   - 对任意开区间 $I\subset[0,1]$，由第 (1) 问，$0<m(A\cap I)<m(I)$，故 $0<m(A^c\cap I)<m(I)$。
   - 导数 $f'(x)=g(x)$ 在 A 上为1，在 A^c 上为-1 (几乎处处)。
   - 由于 I 中同时存在 A 和 A^c 的点，故 $f'(x)$ 在 I 上既取正值也取负值，因此 $f(x)$ 在 I 上既不递增也不递减，即不单调。

2. (10分) 判断对错并给出理由

一定有 $m(E)<\infty$ 时

(1). $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 是一列$\mathbb{R}^n$上一致有界的可积函数。假如这串函数几乎处处收敛到f，则存在一个子列依测度收敛到f。

(2). $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 是一列$\mathbb{R}^n$上一致有界的非负可积函数。假如该函数列一致收敛到一个非负可积函数f，则存在子列$\{f_{i_k}\}_{k=1}^\infty$满足$\lim_{k\to\infty}\int f_{i_k}=\int f$.

结论：错误。

理由：
依测度收敛与几乎处处收敛的关系中，有著名的结论：若 f_n 在有限测度集上几乎处处收敛到 f，则 f_n 依测度收敛到 f；但在**无限测度集**（如 $\mathbb{R}^n$）上，**几乎处处收敛不能推出依测度收敛。**

反例：取 $n=1$，定义
$f_i(x)=\chi_{[i,i+1]}(x),$
即 f_i 为区间 $[i,i+1]$ 上的特征函数。

- 几乎处处收敛：对任意 $x\in\mathbb{R}$，当 $i>x$ 时，$f_i(x)=0$，故
  $f_i\xrightarrow{a.e.}0=f(x)$。
- 不依测度收敛：对 $\varepsilon=1/2$，
  $m\{x:|f_i(x)-0|>1/2\}=m([i,i+1])=1,$
  不趋于0，因此 f_i 不依测度收敛到 f，自然不存在依测度收敛的子列。

结论：正确。

理由：
由题设，f_i 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致有界，即存在 $M>0$，使得 $0\le f_i(x)\le M$ 对所有 i,x 成立，且 f_i 一致收敛到 f，故 $0\le f(x)\le M$。

1. **对任意 $R>0$，在 $B_R(0)$ 上用控制收敛定理**：
   对有界集 $B_R(0)$，由一致收敛，
   $\lim_{i\to\infty}\int_{B_R(0)}f_i=\int_{B_R(0)}f.$
2. **估计无穷远部分**：
   对任意 $\varepsilon>0$，由于 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，存在 $R>0$ 使得
   $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)}f<\varepsilon.$
   同时，f_i 一致有界，设界为 M，则
   $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)}f_i\le M\cdot m(\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)),$
   但更关键的是，由 f_i 非负，$\int f_i\ge\int_{B_R(0)}f_i$。
3. **取子列**：
   对每个 $k\in\mathbb{N}$，取 $R_k\to\infty$，由控制收敛定理，存在 i_k 使得
   $\left|\int_{B_{R_k}(0)}f_{i_k}-\int_{B_{R_k}(0)}f\right|<\frac{1}{k}.$
   结合无穷远部分的估计，可得
   $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_{i_k}=\int_{\mathbb{R}^n}f.$
   更直接地，由 f_i 一致收敛到 f，且一致有界，应用控制收敛定理 (取控制函数为 M，但需注意 $\mathbb{R}^n$ 无界，可通过取穷竭集得到)，存在子列满足积分收敛。

4. (15分) 假设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是绝对连续的，那么

(1). f将零测集映射到零测集。

(2). f将可测集映射到可测集。

证可测,可从结构入手. 可测 = 闭 ∪ 零

(第2问很多会用到第1问)

(1) $\exists$ 开区间 $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ $E\subset\bigcup_{n=1}^\infty I_n$. $\sum_{n=1}^\infty|I_n|<\delta$ $f(E)\subset f(\bigcup I_n)=\bigcup f(I_n)$

$m^*(f(E))\le m^*(\bigcup_{n=1}^\infty f(I_n))\le\sum_{n=1}^\infty m^*(f(I_n))\le\sum_{n=1}^\infty|f(b_n)-f(a_n)|<\varepsilon$.

(2). A 可测 $\subset\mathbb{R}$. $\exists F\subset A$ 为 F_σ 集. $A=F\cup N$. N 零测. 由 f 连续. $f(F)$ 为 F_σ 集. $f(N)$ 零测 $\Rightarrow f(A)=f(F)\cup f(N)$ 可测

3. (15分) 设$E \subset \mathbb{R}$且$0 < m(E) < \infty$，$f(x)$在$\mathbb{R}$上非负可测。则$f \in L^1(\mathbb{R})$当且仅当$g(x) = \int_E f(x-t)\,\mathrm{d}t$在$\mathbb{R}$上可积。

—Tonelli

$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_E f(x-t)dtdx = \int_E dt \int_{\mathbb{R}} f(x-t)dx$

令$u = x-t$. $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)du = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g\,dx = m(E)\cdot\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. 于是等价.

6.2020

1. (20分) 如果f是$\mathbb{R}^d$上的实值可积函数, 并且对于任意的可测集E,

$$\int_E f(x)dx \geq 0.$$

—反证法.

证明：$f \geq 0$, a.e.

设$E = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$ 由f可测. E可测. 只需证$m(E) = 0$.

取$E_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. $0 \leq \int_{E_n} f(x)dx \leq -\frac{1}{n}m(E_n) \Rightarrow m(E_n) = 0$. 又$E_n \uparrow$. $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$. 证毕

5. (15分) 设f_n是区间$[0,1]$上的一列可测函数, 满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad a.e. \quad x \in [0,1]$$

—由Egorov定理划分. 将小测度集上的影响分离出

且

$$\sup_n \|f_n\|_{L^2([0,1])} \leq 1.$$

若直接用[0,1]算. 无法控制小测度集.

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1([0,1])} = 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta = \varepsilon^2 > 0$. $\forall E \subset [0,1]$. $m(E) < \delta$. E可测. 有$\int_E |f(x)|dx \leq \|f_n\|_{L^2}\cdot\sqrt{m(E)} \leq \varepsilon$ 即$\sup_n \int_E |f_n|dx < \varepsilon$. $\{f_n\}$一致可积

由Egorov定理. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$可测集$A \subset [0,1]$ s.t. $m([0,1]\setminus A) < \varepsilon$ 且f_n在A上一致收敛于0. 即$\exists N > 0$. $n > N$时$|f_n(x)| < \varepsilon$对$\forall x \in A$成立.

则$\|f_n\|_{L^1} = \underbrace{\int_A}_{n>N\text{时}<\varepsilon\cdot m(A)\leq\varepsilon} + \int_{[0,1]\setminus A} |f_n|dx \to$ 取$\varepsilon < \delta$. $< \varepsilon$. 证毕

6. (15分) 令m表示$\mathbb{R}$上的Lebesgue测度, $A \subset \mathbb{R}$是Lebesgue可测集. 假设对于所有的实数$a < b$,

$$m(A \cap [a,b]) < \frac{b-a}{2}.$$

—对测度. 想正则性.

证明：$m(A) = 0$.

$m(A) = \inf\{m(U) \mid A \subset U.\ U\text{开}\}$ 只需证$\forall \varepsilon > 0$. $\exists U \supset A$. $m(U) < \varepsilon$.

由开集结构. $U = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ $(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \phi$ $(k \neq j)$. $m(U) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$

有$m(A \cap (a_k, b_k)) < \frac{b_k - a_k}{2} \Rightarrow m(A) = m(A \cap U) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap (a_k, b_k)) < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \frac{1}{2}m(U)$. 且$m(U) < m(A) + \varepsilon$ 又$m(A) \leq m(U) \Rightarrow m(A) = 0$.