# 实分析复习

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

tip：此复习笔记为备考2026暑期夏令营而创，按章进行，每章内容分为书中全部定义与定理以及原笔记内容。重要程度自行分辨取舍。实分析内容极难，复习时先看一遍周民强教材，综合原笔记与总结内容，再与李皓昭班讲义对比融合，凝结合为此笔记。其中章后题为简略版，用于大概了解此章内容如何出题，详细题目与解题方法会在方法总结中给出。

## 第一章 集合与点集

**定理 1.2（De. Morgan 法则）**

(i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$； (1.4)

(ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$. (1.5)

**定义 1.7** 设 $A,B$ 为两个集合，称集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 $A$ 与 $B$ 的**对称差集**，记为 $A\triangle B$，它是由既属于 $A,B$ 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合（见图 1.4）.

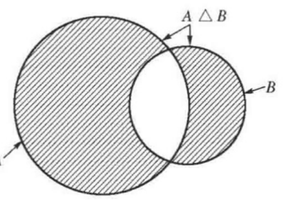



图 1.4

**定义 1.8** 设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**，此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty}A_k$；若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**，此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty}A_k$.

**定义 7.2 (集合的上极限).** $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 一族集合, $B_j=\cup_{k=j}^\infty A_k, j=1,2,\cdots$, 则有 $B_1\supset B_2\supset\cdots$, 定义

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcap_{j=1}^\infty B_j=\bigcap_{j=1}^\infty\bigcup_{k=j}^\infty A_k,$$

称为 $\{A_k\}$ 的**上极限**, 记为 $\limsup_{k\to\infty}A_k$, 则

$$\limsup_{k\to\infty}A_k=\{x\mid\forall j\geq 1,\exists k\geq j,x\in A_k\},$$

即 $x\in\limsup_{k\to\infty}A_k$, 若 $x$ 落在无穷多集合 $A_k$ 中.

**定义 7.3 (集合的下极限).** $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 一族集合, $B_j=\cap_{k=j}^\infty A_k, j=1,2,\cdots$, 则有 $B_1\subset B_2\subset\cdots$, 定义

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcup_{j=1}^\infty B_j=\bigcup_{j=1}^\infty\bigcap_{k=j}^\infty A_k,$$

称为 $\{A_k\}$ 的**下极限**, 记为 $\liminf_{k\to\infty}A_k$, 则

$$\liminf_{k\to\infty}A_k=\{x\mid\exists j_0,\forall k\geq j_0,x\in A_k\},$$

即 $x\in\liminf_{k\to\infty}A_k$, 若 $x$ 仅仅不落在有限多个 $A_k$ 中.

由定义, $\liminf_{k\to\infty}A_k\subset\limsup_{k\to\infty}A_k$. 称集合列 $\{A_k\}$ 存在**极限**, 若二者相等.

**定理 1.3** 若 $\{A_k\}$ 为一集合列，则

(i) $\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:$ 对任一自然数 $j$，存在 $k(k\geqslant j)$，$x\in A_k\}$；

(ii) $\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:$ 存在自然数 $j_0$，当 $k\geqslant j_0$ 时，$x\in A_k\}$.

这就是说，$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的；$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\supset\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k.$$

(i) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$；

(ii) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$；

(iii) $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$；

(iv) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

例：1. 设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R},$$

则对 $t\in\mathbf{R}$，有

$$\{x\in\mathbf{R}:f(x)\leqslant t\}=\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{m=1}^\infty\bigcap_{n=m}^\infty\left\{x\in\mathbf{R}:f_n(x)<t+\frac{1}{k}\right\}.$$

x应只不在n较小时的有限项集合，x在下极限集。即 $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\leq t\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}\mid f_m(x)<t+\frac{1}{k}\}$

命题：$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{m=n}^\infty A_m=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{m=n}^\infty A_m$；$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{m=1}^\infty\bigcap_{n=m}^\infty A_n=\lim_{m\to\infty}\bigcap_{n=m}^\infty A_n$

**定理 1.5（Cantor-Bernstein 定理）**[②] 若集合 $X$ 与 $Y$ 的某个真子集对等，$Y$ 与 $X$ 的某个真子集对等，则 $X\sim Y$.

特例：$B\subset C\subset A$ 时，若 $A\sim B$，则 $A\sim C$

**定理 1.6** 任一无限集 $E$ 必包含一个可列子集.

**定理 1.7** 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 为可列集，则并集

$$A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$$

也是可列集. 可列集的并也可列

**定理 1.8** 设 $A$ 是无限集且其基数为 $\alpha$. 若 $B$ 是至多可列集，则 $A\cup B$ 的基数仍为 $\alpha$.

**定理 1.9** 集合 $A$ 为无限集的充分且必要条件是 $A$ 与其某真子集对等.

**定理 1.10** $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 不是可数集.

**定理 1.11** 设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 $A_k$ 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ 的基数是连续基数.

证明一一映射：取 $x_1,x_2\in X$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)$　　c为连续基数

$\overline{\overline{\mathbb{N}}}=\aleph_0$. $\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\aleph=c$. $c^{\aleph_0}=c$. $c^c=2^c$, $c=2^{\aleph_0}$　　$\overline{\overline{A^B}}=\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$

$(-1,1)\sim\mathbb{R}$. $[0,1]$ 不可数. $(\mathbb{Q},\mathbb{Q})\sim(\mathbb{N},\mathbb{N})\sim\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$. 均为 $\aleph_0$

$\overline{\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}=\aleph-\aleph_0=\aleph$

**定理 1.11** 设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 $A_k$ 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ 的基数是连续基数.

**定理 1.12（无最大基数定理）** 若 $A$ 是非空集合，则 $A$ 与其幂集 $\mathscr{P}(A)$（由 $A$ 的一切子集所构成的集合族）不对等.

事实上，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$

**定理 1.15（Bolzano-Weierstrass 定理）** $\mathbf{R}^n$ 中任一有界无限点集 $E$ 至少有一个极限点.

**定义 1.23** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $E\supset E'$（即 $E$ 包含 $E$ 的一切极限点），则称 $E$ 为**闭集**（这里规定空集为闭集）. 记 $\bar{E}=E\cup E'$，并称 $E$ 为 $E$ 的**闭包**（$E$ 为闭集就是 $E=\bar{E}$）.

**定理 1.16（闭集的运算性质）** (i) 若 $F_1,F_2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，则其并集 $F_1\cup F_2$ 也是闭集，从而有限多个闭集的并集是闭集；

(ii) 若 $\{F_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集族，则其交集 $F=\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集.

无限闭集并不一定闭

$$F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\subset\mathbf{R}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则有 $\bigcup_{k=1}^\infty F_k=(0,1]$. 此例还说明

证闭集：只需 $\forall\{x_k\}\subset E$ 且 $x_k\to x_0$，有 $x_0\in E$.

**定理 1.17（Cantor 闭集套定理）** 若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空有界闭集列，且满足 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$，则 $\bigcap_{k=1}^\infty F_k\neq\varnothing$.

**定理 1.18（开集的运算性质）** (i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族，则其并集 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集；

(ii) 若 $G_k (k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，则其交集 $G = \bigcap_{k=1}^{m} G_k$ 是开集（有限个开集的交是开集）；

(iii) 若 $G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，则 $G$ 是开集的充分必要条件是，对于 $G$ 中任一点 $x$，存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset G$.

**定义 1.25** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 对 $x\in E$，若存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset E$，则称 $x$ 为 $E$ 的**内点**. $E$ 的内点全体记为 $\mathring{E}$，称为 $E$ 的**内核**. 若 $x\in\overline{E}$ 但 $x\,\overline{\in}\,\mathring{E}$，则称 $x$ 为 $E$ 的**边界点**. 边界点全体记为 $\partial E$.

**定义 1.26** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x\in E$，存在 $G\in\Gamma$，使得 $x\in G$，则称 $\Gamma$ 为 $E$ 的一个**开覆盖**. 设 $\Gamma$ 是 $E$ 的一个开覆盖. 若 $\Gamma'\subset\Gamma$ 仍是 $E$ 的一个开覆盖，则称 $\Gamma'$ 为 $\Gamma$（关于 $E$）的一个**子覆盖**.

**定理 1.21（Heine-Borel 有限子覆盖定理）** $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖.

**定义 1.27** 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数，$x_0\in E$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in E\cap B(x_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**连续**，称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0\,\overline{\in}\,E'$ 的情形，即 $x_0$ 是 $E$ 的孤立点时，$f(x)$ 自然在 $x=x_0$ 处连续）. 若 $E$ 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点，则称 $f(x)$ **在 $E$ 上连续**. 记 $E$ 上的连续函数之全体为 $C(E)$.

**定义 1.28（$F_\sigma$，$G_\delta$ 集）** 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可数个闭集的并集，则称 $E$ 为 $F_\sigma$**（型）集**；若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可数个开集的交集，则称 $E$ 为 $G_\delta$**（型）集**.

**定理 1.23（Baire 定理）*** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是 $F_\sigma$ 集，即 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$，$F_k(k=1,2,\cdots)$ 是闭集. 若每个 $F_k$ 皆无内点，则 $E$ 也无内点.

**定义 1.32** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$，则称 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**稠密集**；若 $\mathring{\overline{E}}=\varnothing$，则称 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**无处稠密集**；可数个无处稠密集的并集称为**贫集或第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**.

例：有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集

证明：令 $\mathbb{Q}=\{r_k\mid k=1,2,\cdots\}$ 若 $\mathbb{Q}=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$，$G_i$ 为开集，则有 $\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}=(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^c)\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\})$

均为闭集. 又 $\overline{G_i}=\mathbb{R}'$，则 $G_i^c$ 无内点，则 $\mathbb{R}$ 为第一纲集，与 $\mathbb{R}$ 为第二纲集矛盾！

## 第一章 内容整理

1. 上下极限集相关：$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$

   总会出现　　一直出现

2. 证明单射：取 $x_1,x_2$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1=x_2$.

   证明满射：寻 $D\subset X$. s.t. $f(D)=Y$

3. 若为一一映射，有 $f(A\circ B)=f(A)\circ f(B)$ 其中 $\circ$ 为集合运算

   原像集中交并补运算可拿在外面，如 $f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$

4. Cantor-Bernstein 定理：若 $X$ 与 $Y$ 某个真子集对等，$Y$ 与 $X$ 某个真子集对等，则 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$

   证明用映射分解定理：∃单射 $f:X\to Y$. $g:Y\to X$. $X=A\cup\tilde{A}$，$Y=B\cup\tilde{B}$

   此时 $f:A\to B$，$g:\tilde{B}\to\tilde{A}$ 为一一映射，则有 $F(x)=\begin{cases}f(x) & x\in A\\ g^{-1}(x) & x\in\tilde{A}\end{cases}$ 为 $X\to Y$ 的一一映射，即 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$

   $\Rightarrow$ 若 $C\subset A\subset B$. $B\sim C$ 则有 $B\sim A$

5. 证明对等：分割构造映射

   例：$A\subset B$，$A\sim(A\cup C)$. 证 $B\sim(B\cup C)$

   $B=A\cup(B\setminus A)$　　设一一映射 $f:A\to A\cup C$

   $B\cup C=(A\cup C)\cup(B\setminus A)$　可取一一映射 $F(x)=\begin{cases}f(x) & x\in A\\ x & x\in B\setminus A\end{cases}$ 对等成立

6. Cantor 闭集套：$F_k\neq\phi$. $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$，则 $\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\neq\phi$

7. 开集：一定要利用 $B(x,\delta_x)\subset D$

   有界闭集 $\Leftrightarrow$ 紧集 $\Leftrightarrow$ 对∀开覆盖，∃有限子覆盖

Cantor 三分集：

一般地说，设所得剩余部分为 $F_n$，则将 $F_n$ 中每个（互不相交）区间三等分，并移去中央三分开区间，记其留存部分为 $F_{n+1}$，如此等等. 从而我们得到集合列 $\{F_n\}$，其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

作点集 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，我们称 $C$ 为 **Cantor（三分）集**.

Cantor 集 $C$ 有下述基本性质：

(i) $C$ 是非空有界闭集.

因为每个 $F_n$ 都是非空有界闭集，而且 $F_n\supset F_{n+1}$，所以根据 Cantor 闭集套定理，可知 $C$ 不是空集（实际上，$F_n(n=1,2,\cdots)$ 中每个闭区间的端点都是没有被移去的，即都是 $C$ 中的点）. 显然，$C$ 是闭集.

(ii) $C=C'$（$E=E'$ 称为**完全集**）.

**证明.** 假设 $x\in C$ 是孤立点，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap C=\{x\}$. 由于 $x\in C_n$ 对于任意 $n$ 成立，则存在充分大 $n$ 以及一个闭区间 $I_n$，使得 $x$ 是 $I_n$ 的一个端点，且 $I_n\subset(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$，矛盾. □

(iii) $C$ 无内点.

**证明.** 任取 $x\in C$，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{3^n}<2\varepsilon$，由于 $C_n$ 是 $2^n$ 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间的不交并，$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 不能完全包含在 $C_n$ 中，进而不能完全包含在 $C$ 中. 由此可知 $x$ 不是 $C$ 的内点. □

(iv) Cantor 集的基数是 $c$.

事实上，将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开，则 Cantor 集中点 $x$ 与下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i},\quad a_i=0,2$$

一一对应. 从而知 $C$ 为连续基数集（与 $(0,1]$ 的二进位小数比较）.

**例 4.1.** $[0,1]$ 中的点 $\frac{1}{4},\frac{1}{13},\frac{1}{2}$ 是否属于 $C$?

**解.** 考虑三进制展开

$$\frac{1}{4}=(0.020202\cdots)_3,\quad\frac{1}{13}=(0.002002\cdots)_3,\quad\frac{1}{2}=(0.111\cdots)_3,$$

于是 $\frac{1}{4},\frac{1}{13}\in C$，$\frac{1}{2}\notin C$. □

Cantor 函数：设 $C$ 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 集. 其中的点 $x=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}$　$\alpha_i=0,1$　$i=1,\cdots$

首先定义 $\varphi(x)=\varphi(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}$（三进制转二进制）$\varphi(C)=[0,1]$

再定义 $\Phi(x)=\sup\{\varphi(y)\mid y\in C,\,y\leq x\}$ 则 $\Phi(x)$ 为 $[0,1]$ 上递增连续函数. $\Phi'(x)\overset{a.e.}{=}0$. 将零测集映为正测集


$\Phi(x)$ 在 $C$ 中的点不可导：$\forall x\in C$. $x=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ $a_k=0,1$. $x_n=\begin{cases}x+\frac{2}{3^n} & a_n=0\\ x-\frac{2}{3^n} & a_n=1\end{cases}$

有 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. $a_n=0$ 时 $f(x_n)-f(x)=\frac{1}{2^n}$. $x_n-x=\frac{2}{3^n}$

$a_n=1$ 时 $f(x_n)-f(x)=\frac{-1}{2^n}$. $x_n-x=\frac{-2}{3^n}$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=+\infty$

tip：Cantor 集与 Cantor 函数常用于构造反例.

8. $F_\sigma$ 集：可数闭集的并　$F_{\sigma\delta}$：可数 $F_\sigma$ 集的交

   $G_\delta$ 集：可数开集的交

   Borel 集：$\mathbb{R}^n$ 中开闭集全体的集合

   可数稠密开集的交稠密

   可数无内点闭集的并无内点

9. Cantor 三分集：非空有界闭集，为完全集，无内点，基数为 $c$（三进制与 $(0,1)$ 一一对应）

10. 函数连续：$f\in C(\mathbb{R})\Leftrightarrow E_1=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)>t\}$ 与 $E_2=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<t\}$ $(t\in\mathbb{R})$ 为开集

1. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 是非空完全集，试证明对任意的 $x\in E$，存在 $y\in E$，使得 $x-y$ 为无理数.

有 $\overline{\overline{E}}=c$. 对 $\forall x_0\in E$. 设 $A_{x_0}=\{x_0-y\mid y\in E\}$. 可构造 $f_{x_0}(x)=x_0-x$ $x\in A_{x_0}$ 则 $f_{x_0}$ 为 $A$ 与 $E$ 之间的双射 $\Rightarrow\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{E}}=c$

若 $\exists x_1\in E$，$\forall y\in E$，s.t. $x_1-y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 则对此 $x_1$ 有 $A_{x_1}\subseteq\mathbb{Q}$ 则 $\overline{\overline{A}}\leq\aleph_0$ 与 $\overline{\overline{A}}=c$ 矛盾！于是原命题成立.

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F\subset\mathbf{R}$ 上的连续函数列，则 $f_n(x)$ 在 $F$ 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

设 $E=\{x\in F\mid\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\}$.

$E_{n,m}^k=\{x\in F\mid|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$　则 $E=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{\substack{m=N\\n=N}}^{+\infty}E_{m,n}$ 于是为 $F_{\sigma\delta}$ 集

10. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是不可数集，试证明存在 $x_0\in E$，使得对于任一内含 $x_0$ 的圆邻域 $B(x_0)$，点集 $E\cap B(x_0)$ 为不可数集.

若对 $\forall x_0\in E$. $B(x_0)\cap E$ 为可数集，则 $E=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+}B(x_0,r)$ 为可数集矛盾！

# 第二章 Lebesgue 测度

**定义 5.1** (外测度). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 为任何子集, 定义其**外测度**

$$m_*(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \;\middle|\; \{Q_j\}\text{为}E\text{的闭方体可数覆盖}: E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right\}.$$

**评论.** (1) 在外测度的定义中, 可数并不能改为有限并.

(2) 在外测度的定义中, 可数也不可以改为任意: 对于一族非负数 $\{x_i\}_{i\in I}$, 我们定义其和为

$$\sum_{i\in I} x_i := \sup\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I' \subset I, I'\text{为有限集}\right\}.$$

在这样的定义下, 如果这族非负数中有不可数多个是正的, 则它们的和为 $+\infty$; 如果这族非负数都是 0, 则它们的和为 0. 如果我们用任意代替可数来定义外测度, 考虑任一子集 $E$ 的结果: 如果要求闭方体是不能退化的, 则任意会约化为可数; 如果将退化的闭方体也考虑在内, 则总有 $m_*(E) = 0$, 这没有意义. 常用于外测度相关证明题.

(3) 在外测度的定义中, 闭方体可以改为开方体 (后面证明).

(4) $0 \le m_*(E) \le \infty$.

**例 5.2.** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可数集, 则 $m_*(E) = 0$. 反之不成立, 如[0,1]上的Cantor集的外测度也为0.

**证明.** 设 $E = \{a_1, a_2, \cdots\}$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 考虑 $I_k = [a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}]$, 则 $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \varepsilon$, 故 $m_*(E) \le \varepsilon$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立, 于是 $m_*(E) = 0$. 但其不可数. □

**定理 2.1（$\mathbf{R}^n$ 中点集的外测度性质）**

(i) 非负性：$m^*(E) \geqslant 0$，$m^*(\varnothing) = 0$；

(ii) 单调性：若 $E_1 \subset E_2$，则 $m^*(E_1) \leqslant m^*(E_2)$；

(iii) 次可加性：$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

**评论.** 可数次可加性不能改为任意次可加性. 例如: $E = [0,1]$, 对于任意 $\alpha \in [0,1]$, 则 $E = \cup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\}$, 但 $m_*(E) = 1, m_*(\{\alpha\}) = 0$, 于是不满足任意次可加性.

(4) $m_*(E) = \inf\{m_*(O) \mid O \supset E, O\text{为开集}\}$ 若=0，只有可测时成立

(5)(分离可加性) 若 $E = E_1 \cup E_2$, 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

**评论.** 这条性质不能改为不交可加性, 即: 若 $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 则通常 $m_*(E) \neq m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 若不然, 对于任意集合 $E, A \subset \mathbb{R}^d$, 有 $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, 且 $(A \cap E) \cap (A \cap E^c) = \varnothing$, 这时对于任意 $A \subset \mathbb{R}^d$ 成立:

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c).$$

这是可测集定义的 Caratheodory 条件. 于是条件等价于 $E$ 可测, 而不可测集是存在的.

(6) 若 $E = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 是可数个几乎不交的方体的并, 则 $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$.

(7) 在 $m_*$ 的定义中, 闭方体可以用开方体代替.

(8) 平移不变性: 设 $E \subseteq \mathbb{R}^d, x_0 \in \mathbb{R}^d$, 则 $m_*(E) = m_*(E + x_0)$

(9) 数乘: 设 $E \subseteq \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}$, 则 $m_*(\lambda E) = |\lambda|^d m_*(E)$.

$m(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) \ge \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n)$. $m(\varliminf_{n\to\infty} E_n) \le \varliminf_{n\to\infty} m(E_n)$

**定义 2.2** 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbf{R}^n$，有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)^{②}, \tag{2.2}$$

则称 $E$ 为 Lebesgue 可测集（或 $m^*$-可测集），简称为**可测集**[3]，其中 $T$ 称为**试验集**（这一定义可测集的等式也称为 Carathéodory 条件）. 可测集的全体称为**可测集类**，简记为 $\mathscr{M}$. → 基数为 $2^c$

(1) 开集是可测的.

(2) 若 $m_*(E) = 0$, 则 $E$ 可测. — 零测集一定可测

(3) 可测集的可数并是可测的.

(4) 闭集是可测的.

(5) 可测集的补集是可测的.

(6) 可测集的可数交是可测的: 这由 De Morgan 定律, 性质 (3) 和性质 (5) 得到.

(7)$E$ 可测等价于对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m_*(E \backslash F) < \varepsilon$.

(8) 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是不交的可测集, $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则 $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$.

若只有 $E \subset \mathbb{R}^n$, 对于外测度.
有正则性:
$\exists H$ 为 $G_\delta$ 集, $m(H) = m_*(E)$
(等测包对一切集成立)

## 7.1 单调收敛定理

**定义 7.1** (单调集合列的极限). 称 $E_k \nearrow E$, 若 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, 且 $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. 称 $E_k \searrow E$, 若 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, 且 $E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$.

**定理 7.1** (单调收敛定理). 设 $\{E_k\}$ 可测.

(1) 若 $E_k \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$.

(2) 若 $E_k \searrow E$, 且对于某个 $k$, 有 $m(E_k) < \infty$, 则 $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$. 条件

**评论.** (2) 中, 不能去掉对于某个可测集测度有限的条件. 否则, 考虑 $E_n = (n, +\infty)$, $E_n \supset E_{n+1}$, 且 $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$.

$m(\varliminf E_k) \le \varliminf m(E_k)$

**例 7.3** (Fatou 引理). 设 $\{E_k\}$ 可测, 则 $m(\liminf_{k\to\infty} E_k) \le \liminf_{k\to\infty} m(E_k)$.

**证明.** $\liminf_{k\to\infty} E_k = \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{k=j}^{\infty} E_k$, 令 $B_j = \cap_{k=j}^{\infty} E_k$, 则 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, 进而

$$m\left(\liminf_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(B_j) \le \liminf_{k\to\infty} m(E_k).$$

**例 7.4.** 设 $\{E_k\}$ 可测, 且 $m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$, 则 $m(\limsup_{k\to\infty} E_k) \ge \limsup_{k\to\infty} m(E_k)$. 条件

**证明.** $\limsup_{k\to\infty} E_k = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} E_k$. 令 $B_j = \cup_{k=j}^{\infty} E_k$, 则 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$. 由于 $m(B_1) < \infty$, 故

$$m\left(\limsup_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(B_j) \ge \limsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

定理指出：存在包含 $E$ 的集 $H$，使得 $m(H) = m(E)$；存在含于 $E$ 的集 $K$，使得 $m(K) = m(E)$. 我们称如此的 $H$ 与 $K$ 为 $E$ 的**等测包**与**等测核**. 等测包对于一般点集 $E$ 的外测度也是成立的.

**定理 2.15（外测度的正则性）** 若 $E \subset \mathbf{R}^n$，则存在包含 $E$ 的 $G_\delta$ 集 $H$，使得 $m(H) = m^*(E)$.（此时我们也称 $H$ 为 $E$ 的等测包.）

不可测集的构造:

我们开始构造不可测集:

(1) 在 $[0,1]$ 上定义关系: $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \mathbb{Q}$. 则 $\sim$ 是一个等价关系. 对于任意 $x \in [0,1]$, 其所在等价类

$$E_x = \{y \in [0,1] \mid x - y \in \mathbb{Q}\} = \{x + r \mid r \in \mathbb{Q}, x + r \in [0,1]\}.$$

(2) 由选择公理, 存在 $[0,1]$ 中的一个子集 $N$ 使得 $N$ 由每个等价类中选取一个代表元构成.

**命题 10.1.** 上面构造的 $N$ 是不可测的.

**证明.** 令 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = [-1,1] \cap \mathbb{Q}$, 定义 $N_n = N + r_n$, 它们满足:

(1) 当 $m \neq n$ 时, $N_m \cap N_n = \varnothing$: 设 $z \in N_m \cap N_n$, 则 $z = x + r_m = y + r_n$, 其中 $x, y \in N, r_m \neq r_n$, 于是 $x - y = r_n - r_m \in \mathbb{Q}$, 故 $x \sim y$. 但是 $x - y = r_n - r_m \neq 0$, 故 $x, y$ 是 $N$ 中不同的元素, 它们落在不同的等价类中, 于是矛盾.

(2) $[0,1] \subset \cup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$: 后面的包含是显然的. 对于左边的包含, 任意 $x \in [0,1]$, 由于 $x \in E_x$, 则 $E_x \cap N = \{y\}$, 其中 $y \in [0,1], x - y \in \mathbb{Q}$, 于是 $x = y + r_k \in N_k \subset \cup_{k=1}^{\infty} N_k$.

若 $N$ 可测, 则 $N_k$ 可测, 于是

$$1 \le m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(N) \le 3,$$

这是不可能成立的, 于是矛盾. 矛盾表明 $N$ 是不可测的. □

**例 10.2.** 一族 (不可数多) 可测集的交可能不可测.

**证明.** 设 $N$ 是上面构造的集合, 它不可数. 将 $N$ 表示为 $N = \cup_{a\in N}\{a\}$, 则 $N^c = \cap_{a\in N}\{a\}^c$. $\{a\}^c$ 可测, 但是 $N^c$ 不可测. □

**例 10.3.** 作 $[0,1]$ 中的不可数集 $W$, 使得 $W - W$ 无内点.

**解.** 仍然考虑上面构造的 $N$, 则 $N$ 不可数. 任取 $x, y \in N$. 若 $x = y$, 则 $x - y = 0$; 若 $x \neq y$, 则 $x - y$ 是无理数. 于是 $N - N \subset \{0\} \cup ([-1,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$. 右边的集合不包含任何的区间, 因为任何区间中存在有理数, 故 $N - N$ 没有内点. □

**定理 2.20（Steinhaus 定理）** 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集，且 $m(E) > 0$. 作（向量差）点集

$$E - E \xlongequal{\text{def}} \{x - y: x, y \in E\},$$

则存在 $\delta_0 > 0$，使得 $E - E \supset B(0, \delta_0)$.

## 第二章 内容整理

1. 递增列: $m^*(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(E_n)$

2. Fatou引理: $m^*(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) \ge \varlimsup_{n\to\infty} m^*(E_n)$ (要求 $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$)

$m^*(\varliminf_{n\to\infty} E_n) \le \varliminf_{n\to\infty} m^*(E_n)$ (无要求)

3. 正则性: 对 $\forall E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. $\exists F$ 闭, $G$ 开. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $m(E\backslash F) < \varepsilon$. $m(G\backslash E) < \varepsilon$

4. 证可测: ① $\exists F$ 闭. $m(E\backslash F) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. (对 $G \supset E$ 开集同理)

② $H$ 可测. $H\backslash E$ 零测, $E = H\backslash(H\backslash E)$ (常用 $G_\delta$ 集: $H_k \supset \mathbb{R}^n$. $m^*(H_k\backslash E) < \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$)

③ Caratheodary条件(定义)

5. ☆ 不可测集的构造与不可测集相关性质

(4) 设 $E \subset \mathbf{R}$ 是可测集，且 $m(E) < +\infty$，则

$$\lim_{x\to+\infty} m((E + \{x\}) \cap E) = 0.$$

取 $E$ 的开覆盖的可列子覆盖 $\{J_k\}$. 即 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ 取 $\alpha = \max_{\forall i,j \ge 1} d(J_i, J_j)$. 对 $\forall x > \alpha$. 有 $(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k + \{x\}) \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k) = \phi$

则 $(E + \{x\}) \cap E = \phi \Rightarrow \lim_{x\to\infty} m((E + \{x\}) \cap E) = 0$. 证毕.

- $(X, \Gamma, \mu)$ 是概率测度空间, $A_n \in \Gamma$, $\mu(A_n) = 1$. 则 $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ ← 无限交 ⇒ 转化为无限并 然后利用可数次可加性

$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^c) = 1$ 又 $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \le 1 \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$

- $\forall$ 不可测集合 $K_0 \subset \mathbb{R}$, 存在 $K_1 \subset K_0$, $K_1$ 中的Lebesgue可测集必为零测集。(补充条件: $K_1$ 不可测; 否则是平凡的)

不妨设 $m^*(K_0) < \infty$. 设 $\lambda = \sup_{E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \text{且} E \subset K_0} m(E)$ 取 $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = \lambda \Rightarrow \lambda \le m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sup_{E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \text{且} E \subset K_0} (m(E)) \le \lambda$

取 $K_1 = K_0 \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 即 $K_0 = K_1 \sqcup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 若 $\exists E \subset K_1$, $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ 且 $m(E) > 0$. 则 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \cup E) = \lambda + m(E) > \lambda$. 矛盾!

于是有 $m(E) = 0$. 证毕

- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{充}}{\underset{\text{必}}{\xLeftrightarrow{\exists \epsilon_0 > 0}}} m^*(E \setminus A) \geqslant \epsilon_0, \quad \forall A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

必要性: 若 $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, 有 $A = E$ 使 $m^*(E\backslash A) = 0$. 矛盾!

(或由正则性知 $\exists F \subset E$, $F$ 为闭集. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $m^*(E\backslash F) < \varepsilon$. 矛盾!)

充分性: 若 $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists A_k \subset \mathbb{R}^n$, $m^*(E\backslash A_k) < \frac{1}{k}$, 则 $m(E\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) < m(E\backslash A_k) < \frac{1}{k}$

即 $E\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为零测集 $\Rightarrow E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sqcup (E\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 矛盾!

# 第三章 可测函数

**定义 11.1** (可测函数). 给定函数 $f$, 若 $-\infty < f < +\infty$, 则称 $f$ 是**有限值函数**. 若 $-\infty \le f \le +\infty$; 则称 $f$ 是**(广义) 实值函数**. 设 $E$ 可测, $f$ 定义在 $E$ 上, $f$ 称为 $E$ 上的**可测函数**, 若任意 $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E \mid -\infty \le f < a\}$ 可测, 这个集合记为 $E(f < a)$ 或 $\{f < a\}$.

**例 11.1.** 若 $m(E) = 0$, 则 $E$ 上任意函数可测. 若 $E \subset \mathbb{R}$ 不可测, 考虑

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 2, & x \notin E \end{cases}.$$

则 $E(f < \frac{3}{2}) = E$ 不可测, 则 $f$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

**定理 11.1.** 设 $f$ 是定义在 $E$ 上的函数, 则下列等价:

*(1)* $f$ 是 $E$ 上的可测函数.
*(2)* 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $E(f \le a)$ 可测.
*(3)* 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $E(f > a)$ 可测.
*(4)* 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $E(f \ge a)$ 可测.

**定义 11.2** (几乎处处). 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $P(x)$ 是 $E$ 中元素 $x$ 的某命题. 若存在 $E$ 的子集 $A$ 使得 $m(A) = 0$, 且 $P(x)$ 对 $E \setminus A$ 成立, 则称 $P(x)$ 在 $E$ 上**几乎处处**成立, 记为 $P(x)$ a.e. 于 $E$.

**例 11.4.** $f, g$ 是 $E$ 上的函数, 则 $f = g$ a.e. 于 $E$ 等价于 $m(E(f \ne g)) = 0$.

**命题 11.5.** 设 $f, g$ 在 $E$ 上, 则若 $f = g$ *a.e.* 于 $E$, 则 $f, g$ 可测性相同.

**证明.** 设 $A = E(f \ne g)$, 则 $m(A) = 0$, 进而由

$$E(g > t) = A(g > t) \cup \{x \in E \setminus A \mid g(x) > t\} = A(g > t) \cup \{x \in E \setminus A \mid f(x) > t\}$$

以及 $E(f > t)$ 的类似刻画得到结论. □

**定义 11.3** (几乎处处收敛). 设 $f_k, f$ 为 $E$ 上的函数, 若 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e. 于 $E$, 则称 $\{f_k\}$ 在 $E$ 上**几乎处处收敛**到 $f$, 记为 $f_k \to f$ a.e. 于 $E$.

**命题 11.6.** 设 $\{f_k\}$ 为可测集 $E$ 上的可测函数列, 且 $f_k \to f$ *a.e.* 于 $E$, 则 $f$ 可测.

**证明.** 令 $E_1 = \{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$, 则 $m(E_1) = 0$. 在 $E \setminus E_1$ 上 $f_k \to f$, 故 $f$ 在 $E \setminus E_1$ 上可测, 于是 $f$ 在 $E$ 上可测. □

## 命题: 连续函数-定可测

**定义 12.1** (特征函数与简单函数). (1) 给定集合 $E$, 定义其**特征函数** $\chi_E$ 为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

(2) 设 $E = \cup_{i=1}^N E_i$, $\{E_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中两两不交的测度有限的可测集, 又设 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{R}$ 中的实数, 则 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}(x)$ 称为**简单函数**.

**命题 12.1.** 简单函数的性质如下:

*(1)* 简单函数是可测的.
*(2)* 若 $f, g$ 简单, 则 $cf$ $(c \in \mathbb{R})$ 和 $f \pm g$ 简单.
*(3)* 若 $\varphi$ 是 $\mathbb{R}$ 上实值函数, $f$ 简单, 则 $\varphi(f(x))$ 简单.

**定理 3.9(简单函数逼近定理)** (i) 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 则存在非负可测的简单函数渐升列:

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)^{①}, \quad x \in E; \tag{3.5}$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E.$$

若 $f(x)$ 还是有界的, 则上述收敛是一致的. → 对(i),(ii)均成立

**定义 3.4** 对于定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 称点集

$$\{x: f(x) \ne 0\}$$

的闭包为 $f(x)$ 的**支集**, 记为 $\operatorname{supp}(f)$. 若 $f(x)$ 的支集是有界(即支集是紧集)的, 则称 $f(x)$ 是**具有紧支集**的函数.

**推论 3.10** 定理 3.9 中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数.

**定义 13.1** (可测函数列的收敛). 设 $E$ 可测, $\{f_k\}$ 和 $f$ 是 $E$ 上的可测函数.

(1) **几乎处处收敛**: 存在零测集 $E_0 \subset E$, 使得 $f_k \to f$ 在 $E \setminus E_0$ 上成立, 记为 $f_k \to f$ a.e. 于 $E$

(2) **依测度收敛**: 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lim_{k\to\infty} m(E(|f_k - f| \ge \varepsilon)) = 0$, 记为 $f_k \xrightarrow{m.} f$ 于 $E$.

(3) **几乎一致收敛**: 对任意 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 使得 $E_\delta$ 可测, $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且 $f_k \rightrightarrows f$ 在 $E_\delta$ 上成立, 记为 $f_k \to f$ a.un. 于 $E$.

a.e. 收敛: 除零测集外

m. 收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\} = 0.$

a.un 收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} m\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{x \mid |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0\}\} = 0.$

a.e 但不 m.: $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $E = [0, \infty)$. $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$ $f_n(x) \xrightarrow{a.e.} 1$
但 $m(|f_n(x) - 1| > \frac{1}{2}) = m([n, \infty)) = \infty$. $f_n(x) \not\xrightarrow{m.} 1$

m 但不 a.e.: $[0,1]$ 分为 $n$ 份. $A_n^i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ $1 \le i \le n$ $\{E_k\} = \{A_1^1, A_2^1, A_2^2, \cdots\}$
有 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k) = 0$. 取 $f_k(x) = \chi_{E_k}(x)$. 则 $\forall \varepsilon > 0$. $m(|f_k(x) - 0| > \varepsilon) \to 0$.
但在 $[0,1]$ 上的每一点都在 0,1 两值跳动不 a.e. 收敛

## 13.2 收敛性之间的关系

**定理 13.4** (Egorov 定理). 设 $E$ 可测, $m(E) < \infty$, 设 $\{f_k\}$ 在 $E$ 上可测且几乎处处有限. 若 $f_n \to f$ *a.e.* 于 $E$, 则 $f_n \to f$ *a.un.* 于 $E_\delta$

则对 $\forall \delta > 0$. $\exists E_\delta \subset E$ 可测. $m(E \setminus E_\delta) < \delta$.

→ $m(E) < \infty$ 是必要的. 如 $f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x)$ 与 $f(x) = 1$

证明: 对 $\forall$ 固定 $x \in \mathbb{R}$. $\exists N = [x] + 1$. $n > N$ 时 $f_n(x) \equiv 0 = f(x)$ 即 $f_n(x) \xrightarrow{a.e.} f(x)$

若 $\exists E_\delta \subset \mathbb{R}$. $f_n$ 在 $E_\delta$ 一致收敛. 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. $\exists N > 0$. $n > N$ 时 $|f_n(x) - 1| < \frac{1}{2}$. $\Rightarrow E_\delta \subset (-\infty, N] \Rightarrow +\infty > \delta \ge m(N, \infty) = +\infty$. 矛盾!

**定理 13.5.** 设 $m(E) < \infty$, 若 $f_n \to f$ *a.e.* 于 $E$, 则 $f_n \xrightarrow{m.} f$.

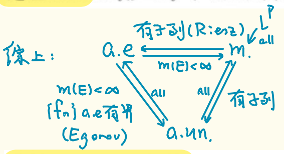
**定理 13.6** (Riesz 定理). 设 $f_k \xrightarrow{m.} f$, 则存在 $\{f_{k_l}\}_{l=1}^\infty$, 使得 $f_{k_l} \to f$ *a.e.* 于 $E$.

**定理 13.7.** 设 $f_n \to f$ *a.un* 于 $E$, 则 $f_n \to f$ *a.e* 于 $E$.

**定理 13.8.** 设 $f_n \to f$ *a.un.* 于 $E$, 则 $f_n \xrightarrow{m.} f$ 于 $E$.

**定理 13.9.** 设 $f_n \xrightarrow{m.} f$ 于 $E$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $f_{n_k} \to f$ *a.un.* 于 $E$.

综上:




Littlewood 三原理:
1. 可测集差不多是开集 (开集 - 小测度集)
2. 可测函数差不多是连续函数 (Lusin 定理)
3. 收敛差不多一致收敛 (Egorov 定理)

**定理 14.1** (Lusin 定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f$ 是 $E$ 上 *a.e.* 有限的可测函数, 则对任意 $\delta > 0$, 则存在闭集 $F_\delta$, 使得 $m(E \setminus F_\delta) < \delta$, 且 $f|_{F_\delta}$ 连续.

**评论.** (1) Lusin 定理的结论不能改为 "存在闭集 $F \subset E, m(E \setminus F) = 0$", 使得 $f|_F$ 连续, 反例见例 14.1. → 反例: $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $x \in [-1, 1]$

(2) 当 $\delta$ 递减时, 可以取 $F_\delta$ 递增.

(3) Lusin 定理的逆定理成立.

**例 14.3** (Lusin 定理的逆定理). 设 $f$ 在 $E$ 上 a.e. 有限, 任意 $\delta > 0$, 存在闭集 $F_\delta \subset E$, 使得 $m(E \setminus F_\delta) < \delta$, 且 $f|_{F_\delta}$ 连续, 则 $f$ 在 $E$ 上可测.

证明: $\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. $\exists F_n \subset E$. $m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ 且 $f|_{F_n}$ 连续. 令 $H_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. $H_1 = E \setminus H_0$. 则 $m(H_1) = 0$.

对 $\forall a$. $E(f > a) = H_1(f > a) \cup H_0(f > a) = H_1(f > a) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(f > a))$ 可测. 则 $f$ 可测.

**推论 3.20** 若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E. \tag{3.9}$$

有界可测函数可用连续函数列逼近

**定理 3.22** 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x) = f(g(x))$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数.

↓ 顺序不可颠倒. 外连续(可测)

颠倒反例: 即证 $g$ 可测. $f$ 连续, 则 $g(f(x))$ 不一定可测

**例 3** 设 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\Psi(x) = \frac{x + \Phi(x)}{2},$$

$m(\Psi(C)) = \frac{1}{2}$

则 $\Psi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 $C$ 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, $W$ 是 $\Psi(C)$ 中的不可测子集.

正测集一定有不可测子集

现在令 $f(x)$ 是点集 $\Psi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 作

$$g(x) = \Psi^{-1}(x), \quad x \in [0,1].$$

显然, $f(x) = 0$, a. e. $x \in [0,1]$, $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 易知 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不是可测函数.

$f(g(x)) = \chi_W(x)$ 不可测

**注** 该例说明, 存在可测函数 $f(x)$, 它有反函数 $f^{-1}(x)$, 但 $f^{-1}(x)$ 不可测.

可测函数的反函数不一定可测

**定理 14.5** (Tietze 扩张定理). 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集, $f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数 $g$, 使得 $g|_F = f|_F$, 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$

4. 试问: $f_n(x) = \cos^n x$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

对 $\forall \varepsilon > 0$. $\{x \mid |f_n(x)| > \varepsilon\} = (0, \arccos(\varepsilon^{\frac{1}{n}})) \cup (\pi - \arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}}, \pi)$

于是有 $m(\{x \mid |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 2\arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 0$ as $n \to \infty$ 则 $f_n(x) \xrightarrow{m.} 0$.

**例 1** 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实值可测函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

有 $f(x+h) - f(x) = f(h)$ 与 $f(0) = 0$. 只需证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

由 Lusin 定理: $\exists$ 闭集 $F$. $m(F) > 0$. $f(x)$ 在 $F$ 上是连续函. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. $|x - y| < \delta$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

由 Steinhaus 定理: $\exists \delta_1 > 0$. $(-\delta, \delta) \subset F - F$. 对 $\forall z \in (-\delta, \delta)$. $\exists x, y \in F$. s.t. $|f(z)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 证毕

**例 3** 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测, 则存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, a. e. $x \in [a, b]$.

由 Lusin 定理. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ 闭集 $F_n \subset [a, b]$ s.t. $F_n \subset F_{n+1}$. $m([a, b] \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. $f \in C(F_n)$

则 $\exists g \in C[a, b]$ s.t. $g = f$ in $F_n$. 由 Weierstrass 逼近定理. $\exists P_n(x)$ 为多项式 s.t. $|g(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}$

即 $|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}$ $x \in F_n$.

令 $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 有 $m([a, b] \setminus F) = 0$. 对 $x_0 \in F$. $\exists n_0$. $n \ge n_0$ 时 $x_0 \in F_n$. $\forall \varepsilon > 0$. 取 $n_1 > n_0$. $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$ 有 $|f(x_0) - P_n(x_0)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ $(n > n_1)$

证毕!

# 第四章 Lebesgue积分

## 非负可测函数的积分定义

设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上非负可测, 定义

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x \,\middle|\, h(x) \le f(x), h(x)\text{在}E\text{上非负简单}\right\}.$$

若 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, 则称 $f(x)$**(Lebesgue) 可积**. 这样定义的积分的相关性质如下:

(1) 设 $f, g$ 非负可测, $f \le g$, 则 $\int_E f\,\mathrm{d}x \le \int_E g\,\mathrm{d}x$.

**证明.** 设 $h$ 简单非负, 且 $h \le f$, 则 $h \le g$, 故由 $g$ 的积分的定义, $\int_E h \le \int_E g$. 对 $h$ 求上确界, 则 $\int_E f \le \int_E g$. □

(2) 若存在非负可积 $F(x)$, 使得 $f(x) \le F(x)$, 且 $f(x)$ 非负可测, 则 $f(x)$ 可积.

(3) 若 $f$ 在 $E$ 上非负有界, 且 $m(E) < \infty$, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积.

(4) 若 $f$ 在 $E$ 上非负可测, 且 $A \subset E$, 则 $\int_A f = \int_E f\chi_A$.

(5) 若 $f = 0$ a.e. 于 $E$, 则 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 特别的, 若 $m(E) = 0$, 则 $\int_E f(x) = 0$.

(6) 设 $f(x)$ 非负简单可测. 若 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f = 0$ a.e. 于 $E$.

**证明.** 令 $E_k = E(f > \frac{1}{k})$, 则当 $k \to \infty$ 时, 有 $E_k \nearrow E(f > 0)$. 由条件,

① $$0 = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{k}\int_{E_k}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}m(E_k) \ge 0,$$

故 $m(E_k) = 0$, 进而 $m(E(f > 0)) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$. □

①,②: 常用的放缩法 —— 截断

(7) 若 $f(x)$ 是 $E$ 上非负可积函数, 则 $f(x)$ a.e. 有限.

**证明.** 令 $E_k = E(f > k)$, 则 $k \to \infty$ 时, 有 $E_k \searrow E(f = \infty)$. 由条件,

② $$+\infty > c = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \ge k\int_{E_k}\mathrm{d}x = k \cdot m(E_k),$$

故 $m(E_k) \le \frac{c}{k}$ 对任意 $k$ 成立. 进而 $m(E(f = \infty)) \le m(E_k) \le \frac{c}{k}$ 对任意 $k$ 成立. 令 $k \to \infty$, 则 $m(E(f = \infty)) = 0$. □

利用 (6)(7) 的证明方法, 我们有如下的结论:

**定理 15.1** (Chebyshev 不等式). 设 $f$ 在 $E$ 上非负可积, $a > 0$, 则

$$m(E(f > a)) \le \frac{1}{a}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$ (本质上. $\int_E f > a\, m(E(f>a))$)

**证明.** 由

$$\int_E f \ge \int_{E(f>a)} f \ge a\int_{E(f>a)} 1 = a \cdot m(E(f > a)),$$

于是结论成立. □

(8) 若 $f, g$ 非负可测, 且 $f = g$ a.e. 于 $E$, 则 $\int_E f = \int_E g$. → 逐点递增.

**定理 15.2** (Levi 单调收敛定理). 若 $\{f_n\}$ 非负可测, $f_n \nearrow f$ a.e. 于 $E$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这里的 $f_n \nearrow f$ 是指 $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ 对任意 $n$ 成立, 且 $n \to \infty$ 时 $f_n(x) \to f(x)$.

**评论.** (1) 对于非负可测 $f_n \nearrow f$, 极限和积分总可以交换次序, 这里我们不需要可积条件.

(2) $\{f_n\}$ 的单调性不能去掉. 例如: $E = \mathbb{R}$, 考虑 $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$, 则 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ a.e. 于 $\mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, 而 $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = 0$, 不相等.

(3) Levi 单调收敛定理对 Riemann 积分不成立. 例如: $E = [0, 1]$, 设 $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, 取

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = q_1, q_2, \cdots, q_n \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $f_n \nearrow D(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$. 则作为 Riemann 积分, $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 但 $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在.

(4) Levi 单调收敛定理中, 非负的条件不能去掉. 例如: 取

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{nx}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f_n \nearrow f = 0$, 但 $\int_{[0,1]} f_n = -\infty$.

(5) Levi 单调收敛定理中, $f_n \to f$ a.e. 于 $E$ 可以改为 $f_n \xrightarrow{m} f$ 于 $E$, 这是由 Riesz 定理得到的.

**例 15.1.** 设 $f, g$ 非负可测, 则 $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$. 同时对于 $c \ge 0$, 有 $\int_E cf = c\int_E f$.

**证明.** 存在非负简单 $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$, 使得 $\varphi_n \nearrow f, \psi_n \nearrow g$, 于是 $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$, 由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_E (f + g) = \lim_{n\to\infty}\int_E (\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E \varphi_n + \int_E \psi_n\right) = \int_E f + \int_E g,$$

于是结论成立. 另一结论类似成立. □

**例 15.2.** 设 $\{f_n\}$ 非负可测, 且 $f_n \searrow f$, 若 $f_1$ 可积, 则 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$.

**证明.** 由条件, 所有 $f_n$ 和 $f$ 都可积. 令 $g_n = f_1 - f_n$, 则 $g_n \ge 0$ a.e. 于 $E$. 由于 $f_n \searrow f$, 则 $g_n \nearrow f_1 - f$. 由 Levi 单调收敛定理, $\lim_{n\to\infty}\int_E g_n = \int_E (f_1 - f)$, 进而有

$$\int_E f_1 - \lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f_1 - \int_E f,$$

于是结论成立 (请问上面的论证中哪里用到了 $f_1$ 的可积性条件?). □

**定理 15.3** (逐项积分定理). 若 $\{f_k\}$ 在 $E$ 上非负可测, 则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

**例 15.4.** 计算 $\int_{[0,1]} \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

**解.** 由于 $-\frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 对 $x \in (0, 1)$ 成立, 故

$$-\int_{[0,1]}\frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

故结果为 $-\frac{\pi^2}{6}$. □

**定理 4.5 (积分的线性性质)** 设 $f(x), g(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, $\alpha, \beta$ 是非负常数, 则 均要求非负

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**推论 15.4.** 设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 其中 $\{E_k\}$ 两两不交, 若 $f$ 非负可测, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**定理 4.8 (Fatou 引理)**[①] 若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \le \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (4.4)$$

**评论.** (1) Fatou 引理中, 我们没有假设可积的条件.

(2) 不等号条件不能改为等号. 考虑 $E = [0, 1]$ 上的函数 $f_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x)$. 由于 $f_n \to f = 0$ a.e. 于 $E$, 则 $\int_E f = 0$, 但 $\int_E f_n = 1$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

(3) 几何意义: 考虑两个非负函数 $f_1, f_2$, 通过比较在区间 $I$ 上与横轴围成的面积可知

$$\int_I \min\{f_1(x), f_2(x)\}\,\mathrm{d}x \le \min\left\{\int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x, \int_I f_2(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

令 $g_{2n-1}(x) = f_1(x), g_{2n}(x) = f_2(x)$, 则 $\{g_n\}$ 为一列非负函数, 且

$$\int_I \liminf_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \min\{f_1(x), f_2(x)\}\,\mathrm{d}x$$
$$\le \min\left\{\int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x, \int_I f_2(x)\,\mathrm{d}x\right\} = \liminf_{n\to\infty}\int_I g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) Fatou 引理中的条件可以改为依测度收敛. 即若 $\{f_n\}$ 非负, 且 $f_n \xrightarrow{m.} f$, 则 $\int_E f \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$.

**推论 15.7.** 设 $\{f_n\}$ 非负可测, $f_n(x) \le f(x)$ a.e., 且 $f_n \to f$ a.e., 则 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$.

能够发现 Fatou引理蕴含着 Levi单调收敛定理

↑ 均为非负可测函数的讨论

↓ 对于一般可测函数的讨论

## 15.3 一般可测函数的积分

将 $E$ 上的可测函数 $f$ 作正负部分解 $f = f^+ - f^-$. 若 $f^+$ 和 $f^-$ 均可积, 则称 $f$ 在 $E$ 上 **(Lebesgue) 可积**, 且 $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$, $E$ 上的可积函数全体记为 $L(E)$. 称 $f$ 在 $E$ 上积分存在, 若 $\int_E f^+$ 与 $\int_E f^-$ 至少有一个有限, 同上定义积分值.

积分的性质: 设 $f, g \in L(E)$, $c \in \mathbb{R}$, 则:

(1) $cf \in L(E)$, 且 $\int_E cf = c\int_E f$.

(2) $f + g \in L(E)$, 且 $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

(3) 若 $f \le g$, 则 $\int_E f \le \int_E g$.

(4) 若 $A, B \subset E$, 且 $A \cap B = \varnothing$, 则 $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

**证明.** 利用 $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ 以及 $\int_E \chi_A f = \int_A f$. □

(5)(三角不等式) $|\int_E f| \le \int_E |f|$.

**证明.** 这是由于 $|\int_E f| = |\int_E f^+ - \int_E f^-| \le \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|$. □

(6)(Chebyshev 不等式) 对任意 $\lambda > 0$, 有 $m(E(|f| \ge \lambda)) \le \frac{1}{\lambda}\int_E |f|$.

**证明.** 这是由于 $\int_E |f| \ge \int_{E(|f|\ge\lambda)} |f| \ge \lambda m(E(|f| \ge \lambda))$. □

(7) 若 $f \in L(E)$, 则 $f$ a.e. 有限.

**证明.** $f \in L(E)$, 则 $f^+, f^- \in L(E)$, 于是 $f^+, f^-$ a.e. 有限, 故 $f = f^+ - f^-$ a.e. 有限. □

(8) 若 $f = 0$ a.e. 于 $E$, 则 $\int_E f = 0$.

9. 对不交定义域有可数可加性

**定理 16.1** (Lebesgue 控制收敛定理). 设 $\{f_n\}$ 可测, 且 $f_n \to f$ a.e. 于 $E$. 又设存在 $g \in L(E)$, 使得 $|f_n| \le g$ a.e. 于 $E$, 则:

(1) $f_n, f$ 可积, 且 $\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$.

DCT　　或m.　　控制函数一定可测

(2) 定理中 $|f_n| \le g, g \in L(E)$ 不能去掉. 考虑 $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$, 则不存在 $g \in L(E)$, 使得 $|f_n| \le g$. 这是由于对任意 $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, 有 $g(x) \ge f_n(x) = n$, 故

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g(x)\,\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty,$$

故 $g$ 总是不可积. 这时 $f_n \to f = 0$ a.e., $\int_0^1 f = 0$, 但 $\int_0^1 f_n = 1$.

例: 证明 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上不 $\xrightarrow{m.}$ 0.

证明: 设 $f_n(x) = \cos nx$. 若 $f \xrightarrow{m.} 0$. 则 $\forall \varepsilon > 0$. $m(|f_n| > \varepsilon) \to 0$. 则 $m(f_n^2 > \varepsilon^2) \to 0$. $f_n^2 \xrightarrow{m.} 0$.

由 Lebesgue 控制收敛定理. $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n^2 = \int_E 0 = 0$. 又 $\int_E f_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi$ 矛盾!

用的 m. 型

**例 16.2.** 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

**解.** 令 $f_n(x)=\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 x, E=(0,+\infty)$ 我们希望找 $g(x)\in L(E)$, 使得 $|f_n(x)|\le g(x)$.

当 $0<x<1$ 时, 有

$$|f_n(x)|\le\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\le\frac{n\sqrt{x}}{2nx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

使用控制收敛定理

要明确写出控制函数

并且验证.

当 $x\ge 1$ 时, 有

$$|f_n(x)|\le\frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2}\le\frac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-\frac{3}{2}}.$$

于是取

$$g(x)=\begin{cases}x^{-\frac{1}{2}}, & x\in(0,1)\\ x^{-\frac{3}{2}}, & x\in[1,+\infty),\end{cases}$$

则 $|f_n|\le g$, 且 $g\in L(E)$. 进而由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

对于控制收敛定理的特殊情况,有:

**定理 16.3 (有界收敛定理).** 设可测集 $E$ 满足 $m(E)<+\infty$, $f_n\to f$ *a.e.* 或 $f_n\xrightarrow{m}f$, 且 $|f_n|\le M$, 则 $f_n\xrightarrow{L^1}f$.

要E有界

**定理 16.4.** 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

**解.** 利用分部积分

$$\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{x^n}{1+x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $0\le\frac{x^n}{(1+x)^2}\le 1$ 在 $[0,1]$ 上成立, 且 $\frac{x^n}{(1+x)^2}\to 0$ a.e., 则由有界收敛定理, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=0,$$

故结果为 $\frac{1}{2}$. □

**定理 16.5 (逐项积分).** 设 $\{f_k\}$ 在 $E$ 上可积, 若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

条件.

则:

*(1)* $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ *a.e.* 收敛.

*(2)* $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 可积, 且

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

**例 16.3.** 求 $I=\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

**解.** 利用展开式

$$\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{e^x}\cdot\frac{1}{1+e^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}xe^{-nx}.$$

记 $f_n(x)=(-1)^{n+1}xe^{-nx}$, 则

只需此条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

则由上面的逐项积分定理,

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{\infty}xe^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

**定理 4.17 (积分号下求导)** 设 $f(x,y)$是定义在 $E\times(a,b)$上的函数,它作为 $x$ 的函数在 $E$ 上是可积的,作为 $y$ 的函数在$(a,b)$上是可微的.若存在 $F\in L(E)$,使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\right|\leqslant F(x),\quad (x,y)\in E\times(a,b),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\,\mathrm{d}x.\qquad(4.12)$$

## 17 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

**定理 17.1.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 上实值有界, 则:

*(1)* $f(x)$ 是 *Riemann* 可积的当且仅当 $f(x)$ 几乎处处连续.

*(2)* 若 $f(x)$ 是 *Riemann* 可积的, 则 $f(x)$ 是 *Lebesgue* 可积的, 且两积分相等.

如:[a,b]上有界单调函数一定Riemann可积,因为间断点一定可数

**定理 17.4.** 设 $f(x)$ 在 $[a,s]$ 上有界且几乎处处连续对任意 $s>a$ 成立, 则 $f$ 在 $[a,\infty)$ 上 *Lebesgue* 可积当且仅当 $(R)\int_a^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$. 且在这样的情形下, *Lebesgue* 积分值与 *Riemann* 积分值相等.

例: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. $\int_0^{\infty}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$ 但 $\int_0^{\infty}|f(x)|dx=\infty$. 则 f Riemann可积 但不是 Lebesgue可积的

**例 17.2.** 设 $C$ 为 Cantor 集, 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in C\\ \frac{1}{2^{n-1}}, & x\in[0,1]\backslash C\text{的每个长为}\frac{1}{3^n}\text{的小区间}\end{cases},$$

长为$\frac{1}{3^n}$有$2^{n-1}$个

证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 并求 $(R)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

有$2^{n-1}$个

**证明.** 首先 $|f(x)|\le 1$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]\backslash C$ 的每个小区间上为常值, 故 $f$ 的不连续点集包含在 $C$ 中, 故其测度为 0. 于是 $f$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处连续, 故 $f$ 是 Riemann 可积的. 由此,

$$(R)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(L)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[0,1]\backslash C}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_C f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}.$$

## 18 积分的绝对连续性

**定理 18.1.** 若 $f$ 是可测集 $E$ 上的可积函数, 则:

*(1)* 对任意 $\varepsilon>0$, 存在有界可测集 $B$, 使得 $\int_{E\backslash B}|f|\le\varepsilon$.

*(2)* 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $A\subset E$ 使得 $m(A)<\delta$, 有 $|\int_A f|\le\int_A|f|\le\varepsilon$.

**例 18.1.** 设 $f\in L(E)$, 且 $0<A=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, 则存在 $E$ 中的可测集 $e$, 使得 $\int_e f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{A}{3}$.

**证明.** 令 $E_t=E\cap(-\infty,t)$, 以及 $g(t)=\int_{E_t}f(x)\,\mathrm{d}x$. 由积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|\Delta t|<\delta$ 时,

☆常用

$$|g(t+\Delta t)-g(t)|\le\int_{E\cap[t-|\Delta t|,t+|\Delta t|]}|f|<\varepsilon,$$

于是 $g$ 关于 $t$ 是连续的. 进而由 $\lim_{t\to-\infty}g(t)=0, \lim_{t\to\infty}g(t)=A$, 根据连续函数的介值定理, 存在 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得 $g(t_0)=\frac{A}{3}$. 取 $e=E\cap(-\infty,t_0)$ 即可. □

## 19 积分在平移和数乘下的不变性

**定理 19.1.** 设 $f(x)\in L(\mathbb{R}^n)$, 则 $f(x+h)\in L(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x+h)\,\mathrm{d}x.$$

**例 19.1.** 设 $f\in L([0,+\infty))$, 则 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$ a.e. 成立.

**证明.** 可设 $x\in[0,1]$. 由 $f\in L([0,+\infty))$, 则

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)}|f(x)|\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,1]}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{[0,1]}\sum_{n=0}^{\infty}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x<+\infty.\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}|f(x+n)|<+\infty$ a.e. 成立, 故 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$ a.e. 于 $[0,1]$. □

**定理 19.2.** 设 $I\subset\mathbb{R}$ 为区间, $f\in L(I)$, $a\neq 0$, $J=\frac{1}{a}I$, $g(x)=f(ax)$, 则 $g\in L(J)$, 且

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x=|a|\int_J g(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 20 可积函数的逼近

我们证明: 可积函数可用简单函数、阶梯函数和连续函数在 $L^1$ 意义下逼近.

分段:∀可测集

**定理 20.1.** 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在可积简单函数 $g$, 使得 $\int_E|f-g|<\varepsilon$.

**定理 20.2.** 设 $f\in L(E)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g$, 使得 $\int_E|f-g|<\varepsilon$.

分段:只能是区间.

**定理 20.3.** 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $f\in L(E)$, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在具有紧支集的阶梯函数 $g$, 使得 $\int_E|f-g|<\varepsilon$.

**例 20.1 (Riemann-Lebesgue 引理).** 设 $f\in L([a,b])$, 则

OK

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

**证明.** 设 $f=\chi_{(\alpha,\beta)}(x)$, 其中 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, 故

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin n\beta-\sin n\alpha}{n}\to 0.$$

对一般 $f\in L([a,b])$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $g$, 使得 $\int_a^b|f-g|<\varepsilon$. 由上面的步骤, 存在 $n_0\in\mathbb{N}^*$, 使得 $n\ge n_0$ 时, $|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x|<\frac{\varepsilon}{2}$, 故 $n\ge n_0$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_a^b(f(x)-g(x))\cos nx\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_a^b g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$, 另一情形同理. □

**定理 21.1 (Fubini).** 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积 则对 *a.e.* 的 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ 有:

*(1)* $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积, 从而可测. → 指固定y下的f.如$f^{y_0}(x)=f(x,y_0)$

*(2)* $g(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积, 从而可测.

*(3)* 重积分可以化为如下累次积分:

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

**评论.** (1) 由对称性, 对 a.e. 的 $x\in\mathbb{R}^{d_1}$, 也有类似的结论, 请自行模仿. 综合得到: $f$ 可积时, 两累次积分相等, 都等于重积分. ☆

(2) 定理中, "几乎处处" 不能去掉: 若 $f(x,y)$ 可测, 则固定 $x$(或 $y$), $f_x(y)$(或 $f^y(x)$) 不一定可测. 考虑 $N\subset\mathbb{R}$ 是不可测集, $Z\subset\mathbb{R}$ 是零测集, 则 $m_*(N\times Z)\le m_*(N)m_*(Z)=0$, 故 $f(x,y)=\chi_N(x)\chi_Z(y)=\chi_{N\times Z}(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测. 对于任意 $y\in Z$, 有 $f^y(x)=\chi_N(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可测.

**定理 21.2 (Tonelli).** 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上非负可测 则对 *a.e.* 的 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ 有:

*(1)* $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上非负可测.

*(2)* $g(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上非负可测.

*(3)* 重积分可以化为如下累次积分:

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

注意此时结果允许为 $+\infty$.

**推论 21.3.** 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测, 若

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^{d_2}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y < +\infty,$$

或

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^{d_1}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

**例 21.3.** 求 $I = \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-3x})\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$.

**解.** 利用 Newton-Leibniz 公式, 转化为二重积分:

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \int_3^1 \frac{\partial}{\partial y} e^{-yx}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x \int_1^3 e^{-yx}\,\mathrm{d}y.$$

验证

$$\int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^\infty |e^{-yx}\cos x|\,\mathrm{d}x \le \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^\infty e^{-yx}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y < +\infty,$$

验证f可积 (在特定区间)

由推论 19.3,

$$I = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\log 5.$$

**定理 21.5.** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上非负, 定义

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid 0 \le y \le f(x)\},$$

则:

*(1)* $f$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测当且仅当 $A$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中可测.

*(2)* 若 (1) 成立, 则 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = m(A)$. —Lebesgue 积分几何意义

等价:

Levi → Fatou

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k = \int_E \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} f_n \overset{\text{Levi}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_E \inf_{n\ge k} f_n \le \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k$$

非负可测函数

Fatou → Lebesgue 控制收敛定理.

设 $|f_n| \le g$. 则 $2g - |f_n - f| \in L^+$

有 $\varliminf_{n\to\infty}\int_E (2g - |f_n - f|) \ge \int_E \varliminf_{n\to\infty}(2g - |f_n - f|)$

即 $\varlimsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\,dx \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\,dx = 0.$

于是 $f_n \xrightarrow{L^1} f$. $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f\,dx$.

Lebesgue 控制收敛定理 → Levi

取 $S^+ \ni \varphi_{kj} \le f_k$. $g_j \overset{\text{def}}{=} \max\{\varphi_{1j}, \dots, \varphi_{jj}\} < f_j$ $g_j \nearrow f$

(5) 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 试证明 $m(E) = 0$.

设 $E_k = \{x \in E \mid f(x) \ge \frac{1}{k}\}$ 则 $0 = \int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} m(E_k) \ge 0 \Rightarrow m(E_k) = 0$ 于是 $m(E) = 0$.

(1) 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中递增可测集列, 且 $E_k \to E(k\to\infty)$. 若 $f(x)$ 是 $E$ 上非负可测函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

← 指标函数常用.

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi(E_k)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\lim_{k\to\infty}\chi(E_k)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi(E)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

**例 3** 设 $f \in L(E)$, $f_n \in L(E)(n \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (x \in E),\quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)\quad (n \in \mathbf{N}, x \in E),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $F_n(x) = f(x) - f_n(x)$. 则 $F_n(x)$ 为单调递减可积函数列

则 $\lim_{n\to\infty}\int_E F_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} F_n(x)\,dx = 0$. 证毕.

见递增/减, 想到 Levi

# 第五章 微分与不定积分

**定理 22.4 (Lebesgue 微分定理).** 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则

$$\lim_{m(B)\to 0, x\in B} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$$

对 *a.e.* $x \in \mathbb{R}^d$ 成立.

**定义 22.2 (局部可积).** 称可测函数 $f$ 为局部可积函数, 若对于任意球 $B$, 有 $f(x)\chi_B(x)$ 可积. 局部可积函数的全体记为 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

**评论.** 局部可积而不可积的例子: $e^x$, $|x|^{-1/2}$.

**推论 22.6.** *Lebesgue 微分定理对局部可积函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 成立.*

**例 22.1.** 设 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, 且 $\lambda_n \to +\infty$, 定义 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty}\sin\lambda_n x \text{存在}\}$, 则 $A$ 为零测集.

**证明.** 首先 $A$ 为可测集, 于是可以定义 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\chi_A(x)\sin\lambda_n x$. 对任意可测集 $B$, 使得 $m(B) < +\infty$, 则利用有界收敛定理以及 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_B \chi_A(x)\sin\lambda_n x\,\mathrm{d}x = 0.$$

此时由 Lebesgue 微分定理可知, 对 a.e. $x \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = 0.$$

考虑

$$0 = \int_B f^2(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{B\cap A}\sin^2\lambda_n x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{B\cap A}\frac{1}{2}(1-\cos 2\lambda_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m(B\cap A),$$

这对于任意可测集 $B$ 使得 $m(B) < +\infty$ 成立. 于是 $m(A) = 0$. □

**定义 22.4 (Lebesgue 点).** 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 若 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $f(x)$ 有限, 且

$$\lim_{m(B)\to 0, x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y = 0,$$

则称 $x$ 为 **Lebesgue 点**, 所有 Lebesgue 点全体组成的集合成为 **Lebesgue 集**.

**评论.** (1) 若 $x$ 是 $f$ 的 Lebesgue 点, 则

$$\lim_{m(B)\to 0, x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

(2) $f$ 的连续点为 Lebesgue 点.

**推论 22.8.** 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\mathbb{R}^d$ 中几乎所有点都是 *Lebesgue* 点.

**定理 22.9.** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x) = \int_{[a,x]} f(y)\,\mathrm{d}y$. 则对 $f$ 的 *Lebesgue* 点 $x \in (a,b)$, 有 $F'(x) = f(x)$, 于是 $F'(x) = f(x)$ *a.e.* 于 $[a,b]$.

## 23 单调函数的可微性

定理: $f:[a,b]\to\mathbb{R}\uparrow$, 则 $f'$ 是 a.e. $\exists$ 且有界

我们希望证明: 不等号: 对 Cantor 函数 $\Phi(x)$, 有 $0 = \int_0^1 \Phi'(x)\,dx < 1 = \Phi(1) - \Phi(0)$

**定理 23.1.** 若 $f$ 是单调递增的, 则 $f$ 几乎处处可微, $f'$ 可积, 且

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$

**定义 23.1 (Vitali 覆盖).** 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}$ 为一族区间 (开, 闭, 半开半闭, 不能为单点, 可能不可数多). 若对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $x \in E$, 存在 $I_\alpha \in \mathcal{F}$, 使得 $x \in I_\alpha$, $|I_\alpha| < \varepsilon$, 则称 $\mathcal{F}$ 是 $E$ 的 **Vitali 覆盖**.

**例 23.1.** 设 $E = [a,b]$, 设 $[a,b]\cap\mathbb{Q} = \{r_n\}$, 定义 $I_{n,m} = (r_n - \frac{1}{m}, r_n + \frac{1}{m})$, 则

$$\mathcal{F} = \{I_{n,m} \mid m,n \in \mathbb{N}^*\}$$

是 Vitali 覆盖.

**定理 23.2 (Vitali 覆盖定理).** 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, $m_*(E) < +\infty$, $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}$ 为 $E$ 的 *Vitali* 覆盖, 则:

*(1)* 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的区间 $\{I_1, \cdots, I_n\} \subset \mathcal{F}$, 使得 $m_*(E\setminus\bigcup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon$.

*(2)* 存在可数个互不相交的区间 $\{I_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, 且 $m_*(E\setminus\bigcup_{i=1}^\infty I_i) = 0$.

**定理 23.4 (Fubini 逐项微分定理).** 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上单增函数列 (关于变量 $x$), 且和函数 $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$, 则 $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ *a.e.* 于 $[a,b]$.

**例 23.4.** 存在 $[0,1]$ 上严格单增函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = 0$ a.e. 于 $[0,1]$.

设 $\{r_n\} = [0,1]\cap\mathbb{Q}$. $f_n(x) = 2^{-n}\chi_{[r_n,1]}(x)$. $f_n(x)\uparrow$ 且 $f_n'(x) = 0$ a.e. 成立.

令 $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. 由 Fubini 逐项微分定理: $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x) = 0$. 则 $f(x)$ 满足要求

## 24 有界变差函数

问题: 除单调函数外, 还有哪些函数几乎处处可微?

**定义 24.1 (有界变差函数).** 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数, 若存在 $M > 0$, 使得对任意分割 $\pi$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le M,$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**有界变差函数**. 有界变差函数的全体记为 $BV([a,b])$.

同时定义函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上的的**全变差**为

$$\bigvee_a^b f = \sup_\pi \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

于是 $f \in BV([a,b])$ 当且仅当 $\bigvee_a^b f < +\infty$.

**例 24.1.** $[a,b]$ 上的单增函数是有界变差的. 这是因为对任意分割 $\pi$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

**例 24.2.** $[a,b]$ 上的 Lipschitz 函数是有界变差的. 设 $f$ 的 Lipschitz 常数是 $M$, 则对任意分割 $\pi$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a) < +\infty.$$

**例 24.3.** (1) $[a,b]$ 上的有界变差函数不一定连续. 为此可以考虑

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \end{cases}.$$

(2) $[a,b]$ 上的连续函数也不一定是有界变差的. 为此可以考虑

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Cantor 函数在此

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]\cap BV[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b] \subset L^1$$

有界变差函数具有下面的性质:

(1) 有界变差函数有界. 这是由于对任意 $x\in[a,b]$, 有 $|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le M$.

(2) 设 $f\in BV([a,b])$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f\in BV([a,b])$. 且 $\bigvee_a^b(\alpha f)=|\alpha|\bigvee_a^b(f)$.

(3) 设 $f,g\in BV([a,b])$, 则 $f+g\in BV([a,b])$, 且 $\bigvee_a^b(f+g)\le\bigvee_a^b f+\bigvee_a^b g$.

(4) 设 $f,g\in BV([a,b])$, 则 $fg\in BV([a,b])$.

(5) 设 $f\in BV([a,b])$, 任取 $c\in(a,b)$, 则 $\bigvee_a^b f=\bigvee_a^c f+\bigvee_c^b f$, 同时 $f\in BV([a,c])$, 且 $f\in BV([c,b])$.

(6) $f\in BV([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的单增函数 $g(x)$ 与 $h(x)$, 使得 $f=g-h$, 该分解称为 $f$ 的 **Jordan 分解**. 换言之, $BV([a,b])$ 是包含 $[a,b]$ 上单增函数的最小的线性空间.

(7) 若 $f\in BV([a,b])$, 则 $f$ 的间断点集是至多可数的, 进而 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 同时, $f$ 在 $[a,b]$ 上 a.e. 可微, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积.

(8) 设 $f\in BV([a,b])$, 则 $\bigvee_a^x f$ 右 (左) 连续当且仅当 $f(x)$ 右 (左) 连续.

**例 24.5.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\bigvee_a^b f=\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**证明.** 对 $[a,b]$ 的任一分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 由数学分析中的 Newton-Leibniz 公式,

$a=x_0<x_1\cdots<x_n=b$ $\quad\sum|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\int_a^b|f'|\mathrm{d}x$

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 对上述分割, 定义 $\lambda=\max_i|x_i-x_{i-1}|$. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 使得 $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, 于是

$$\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n|f'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1})=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\bigvee_a^b f.$$

综上得到结论. Riemann积分定义 □

## 25.2 微积分基本定理

**定理 25.2.** 设 $f\in AC([a,b])$ 且 $f'(x)=0$ *a.e.* 于 $[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

**定理 25.3.** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x)$ *a.e.* 于 $[a,b]$. 事实上, 对于 $[a,b]$ 上的 *Lebesgue* 点, 有 $F'(x)=f(x)$.

**定理 25.4 (微积分基本定理).** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 则下列等价:

*(1)* $f\in AC([a,b])$.

*(2)* 存在可积函数 $g(x)$, 使得

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.\tag{2}$$

当 (2) 成立时, $f'=g$ *a.e.* 成立.

**推论 25.5.** 设 $f,g\in AC([a,b])$, 则有分部积分公式:

$$\int_a^b fg'=fg\big|_a^b-\int_a^b f'g.$$

**定义 25.1 (绝对连续函数).** 给定 $[a,b]$ 上的函数 $f$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 当 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时, 有 $\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**绝对连续函数**, 记为 $f\in AC([a,b])$.

$\forall x,y\in[a,b]$. $x<y$. 有 $f(y)-f(x)=\int_x^y f(t)\mathrm{d}t$

绝对连续函数具有如下的性质:

(1) 绝对连续函数是连续的, 进一步是一致连续的.

(2) 若 $f,g\in AC([a,b])$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f,f+g\in AC([a,b])$.

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\in AC([a,b])$.

(4) 在有界区间上绝对连续函数是有界变差函数, 即 $AC([a,b])\subset BV([a,b])$, 进而 $f$ 在 $[a,b]$ 上 a.e. 可微, 且 $f'(x)$ 是可积的.

**评论.** (1) 在绝对连续函数的定义中, "有限个" 可以改为 "可数个".

(2) $[a,b]$ 上的 Lipschitz 函数是绝对连续的.

(3) (一致) 连续函数不一定绝对连续. 为此, 可以考虑

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0,1].\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

之前已经证明 $f\notin BV([0,1])$, 故 $f\notin AC([0,1])$.

(4) 无限区间上绝对连续函数不一定是有界变差函数. 为此, 可以考虑 $[\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\sin x$. 由于 $|f'(x)|\le1$, 故 $f$ 是 Lipschitz 函数, 进而 $f$ 绝对连续. 但是, 取分点 $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}<\cdots<\frac{2n+1}{2}\pi$ 是 $[\frac{\pi}{2},\frac{2n+1}{2}\pi]$ 的分割, 则

$$\sum_{k=1}^n\left|\sin\frac{2k-1}{2}\pi-\sin\frac{2k+1}{2}\pi\right|=2n\to\infty.$$

(5) (一致) 连续的有界变差函数不一定绝对连续. 为此, 可以考虑 Cantor-Lebesgue 函数. 一个快速的方法是, 利用后面要讲的微积分基本定理, 若其绝对连续, 则 $\int_0^1F'(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=1$, 但 $F'(x)=0$ a.e. 于 $[0,1]$, 得到 $\int_0^1F'(x)\,\mathrm{d}x=0$, 矛盾.

**例 6** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的有界可测函数. 若有

$$I_n=\int_{[0,1]}x^nf(x)\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x)=0$, a. e. $x\in[0,1]$.

**证明** 令 $F(x)=xf(x)(x\in[0,1])$, 则得

$$\int_{[0,1]}x^nF(x)\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

由此知, 对任一多项式 $P(x)$, 也有

$$\int_{[0,1]}P(x)F(x)\mathrm{d}x=0.$$

现在, 对任意的 $g\in C([0,1])$ 以及 $\varepsilon>0$, 可作多项式 $P(x)$, 使得 $|g(x)-P(x)|<\varepsilon(x\in[0,1])$. 因此, 我们有

$$\left|\int_{[0,1]}g(x)F(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{[0,1]}(g(x)-P(x))F(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_{[0,1]}|g(x)-P(x)||F(x)|\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_{[0,1]}|F(x)|\mathrm{d}x.$$

根据 $\varepsilon$ 的任意性, 可得 $\int_{[0,1]}g(x)F(x)\mathrm{d}x=0$. 又根据 $g(x)$ 的任意性, 我们有

$$F(x)=0,\ \text{a. e. } x\in[0,1],\quad f(x)=0,\ \text{a. e. } x\in[0,1].$$

# 第六章 $L^p$ 空间与抽象测度

**定义 26.1 ($L^p$ 空间).** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, $1\le p<\infty$. 若 $f$ 在 $E$ 上可测, 且

$$\int_E|f|^p<+\infty,\tag{3}$$

则称 $f\in L^p(E)$, 且记

$$\|f\|_p=\|f\|_{L^p(E)}=\left(\int_E|f|^p\right)^{1/p}.$$

记 $L^p(E)$ 为所有满足(3)式的可测函数的集合.

$L^p$ 空间具有如下的性质: 若 $f,g\in L^p(E)$, 则

(1) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\|f\|_p$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$.

(2) $\|f\|_p=0$ 当且仅当 $f=0$ a.e. 于 $E$.

(3) Minkowski 不等式: $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

**定义 26.3 ($L^p$ 距离与 $L^p$ 收敛).** (1) 在 $L^p(E)$ 上定义

$$d(f,g)=\|f-g\|_p=\left(\int_E|f-g|^p\right)^{1/p},$$

则 $(L^p(E),d)$ 是距离空间. 注意这里我们需要将几乎处处相等的函数视作恒等的函数.

(2) 设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset L^p(E)$. 若存在 $f\in L^p(E)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}d(f_k,f)=\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0,$$

则称 $\{f_k\}$ 依 $L^p$ 收敛到 $f$, 记为 $f_k\xrightarrow{L^p}f$.

上面定义的收敛性有如下的性质:

(1) 唯一性: 若 $f_n\xrightarrow{L^p}f$, $f_n\xrightarrow{L^p}g$, 则 $f=g$ a.e.

**证明.** 这是由于 $\|f-g\|_p\le\|f-f_n\|_p+\|f_n-g\|_p\to0$. □

(2) 若 $f_n\xrightarrow{L^p}f$, 则 $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p=\|f\|_p$.

**证明.** 这是由于 $|\|f_n\|_p-\|f\|_p|\le\|f_n-f\|_p\to0$. □

(3) 若 $f_n\xrightarrow{L^p}f$, 则 $f_n\xrightarrow{m}f$, 进而存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k}$ 几乎处处收敛到 $f$.

**证明.** 这是由于

$$m(E(|f_n-f|>\varepsilon))=m(E(|f_n-f|^p>\varepsilon^p))\le\frac{1}{\varepsilon^p}\int_E|f_n-f|^p\to0$$

对任意固定 $\varepsilon>0$ 成立. □

**定义 26.5 (可分).** 设 $(X,d)$ 是距离空间, $A\subset X$ 为子集. 若对任意 $x\in X$, 任意 $\varepsilon>0$, 存在 $a\in A$, 使得 $d(x,a)<\varepsilon$, 则称 $A$ 是 $X$ 的**稠密子集**. 若 $X$ 中存在可数稠密子集, 则称 $X$ **可分**.

**例 26.2.** $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的可数稠密子集, 故 $\mathbb{R}$ 可分.

**定理 26.2.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $1\le p<\infty$, 则:

*(1)* $L^p$ 中的简单函数全体在 $L^p(E)$ 中稠密.

*(2)* 具有紧支集的连续函数全体在 $L^p(E)$ 中稠密.

*(3)* 具有紧支集的阶梯函数全体在 $L^p(E)$ 中稠密.

**定理 26.3.** 对于 $1\le p<\infty$, 有 $L^p(E)$ 可分.

**定义 26.6 ($L^\infty$ 空间).** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f$ 在 $E$ 上可测, 定义

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{L^\infty(E)}=\inf\{M\mid|f|\le M\text{ a.e.}\}.$$

若 $\|f\|_\infty<+\infty$, 则称 $f$ 是**本性有界的**. $E$ 上本性有界的函数全体记为 $L^\infty(E)$.

**定理 26.4.** 对任意 $f,g\in L^\infty(E)$, 有三角不等式

$$\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

**定理 26.5.** 设 $m(E)<+\infty$, 则对任意 $f\in L^\infty(E)$, 有 $\|f\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$.

**定理 6.2 (Hölder 不等式)** 设 $p$ 与 $p'$ 为共轭指标, 若 $f\in L^p(E)$, $g\in L^{p'}(E)$, 则有

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

$$\|fg\|_1\le\|f\|_p\cdot\|g\|_{p'},\quad1\le p\le+\infty,\tag{6.1}$$

本性上确界: $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}f$ 为 $f$ 定义域去除 0 测集后的值域上确界

如 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\chi_{\mathbb{Q}}(x)=1$. $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}\chi_{\mathbb{Q}}(x)=0$.

无界集(如 $\mathbb{R}$)中 $L^p$ 与 $L^q$ 互不包含 $(p<q)$

如 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}$ $\quad f\in L^2(\mathbb{R})$ $f\notin L^1(\mathbb{R})$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{(0,1]}(x)$ $\quad g\notin L^2(\mathbb{R})$ $g\in L^1(\mathbb{R})$

有界集(如 $[0,1]$)中 $L^p\subset L^q$ $(p>q)$ 即 $p$ 越大空间越小. 且为真子集关系.

证明:

**例 2** 若 $m(E)<+\infty$, 且 $0<p_1<p_2\le+\infty$, 则 $L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$, 且有

$$\|f\|_{p_1}\le(m(E))^{(1/p_1)-(1/p_2)}\|f\|_{p_2}.\tag{6.2}$$

**证明** 不妨设 $p_2<+\infty$. 令 $r=p_2/p_1$, 则 $r>1$. 记 $r'$ 为 $r$ 的共轭指标, 则对 $f\in L^{p_2}(E)$, 由(6.1)式可得

Hölder不等式.

$$\int_E|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x=\int_E(|f(x)|^{p_1}\cdot1)\mathrm{d}x$$
$$\le\left(\int_E|f(x)|^{p_1\cdot r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_E1^{r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'}$$
$$=(m(E))^{1/r'}\left(\int_E|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/r},$$

从而可知

$$\left(\int_E|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1}\le(m(E))^{(1/p_1)-(1/p_2)}\left(\int_E|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}.$$

这就是(6.2)式,

# 期中复习部分

1. 上极限集：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$　下：$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$.

　　永远会存在　　　　$n\to\infty$ 时每个 $A_n$ 中都存在

2. Cantor-Bernstein 定理：$\#A\geq\#B$. $\#B\geq\#A$. 证明 $\#A=\#B$.

　证明：由题意知存在单射：$f:A\to B$. $g:B\to A$.

　　由映射分解定理：$A=E\sqcup E^{\sim}$. $B=F\sqcup F^{\sim}$. $f(E)=F$. $g(F^{\sim})=E^{\sim}$ 二者为一一映射.

　　可构造 $F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in E \\ g^{-1}(x) & x\in E^{\sim}\end{cases}$ 知 $F(x)$ 为一一映射. 于是有 $\#A=\#B$. 证毕.

　推论：$C\subset A\subset B$. $B\sim C\Rightarrow B\sim A$.

3. $\overline{\overline{\mathbb{N}}}=\overline{\overline{\mathbb{Q}}}=\aleph_0$ 可数个可列集的并为可列集　$2^{\aleph_0}=c$. $c^c=2^c$

　$\overline{\overline{\mathbb{R}}}=c$. 任何区间有连续统　　$\aleph_0^{\,n}=\aleph_0$

4. 紧集的任意开覆盖有有限子覆盖

5. Lebesgue 不可测集的构造：

　取区间 $[0,1]$. 构造等价类 $x\sim y$. 若 $x-y\in\mathbb{Q}$. $x,y\in[0,1]$. 可知

　由选择公理. 从每一个等价类中取一个代表元. 构成集合 $V$.　(Vitali 集)

　反证：若 $V$ 为可测集：

　① 互不相交：若 $\exists r_1,r_2$ s.t. $\{V+r_1\}\cap\{V+r_2\}\neq\phi$. 即 $\exists v_1,v_2\in V$. $v_1+r_1=v_2+r_2\Rightarrow v_2-v_1=r_1-r_2\in\mathbb{Q}\Rightarrow v_1$ 与 $v_2$ 在同一等价类中. 与定义矛盾.

　② 覆盖性：对 $\forall x\in[0,1]$. $\exists v\in V$. $x-v\in\mathbb{Q}$. 不妨设 $x-v=r$. 则 $r\in[-1,1]$. $x\in V+r\Rightarrow[0,1]\subset\bigcup\limits_{r\in[-1,1]}\{V+r\}$

　若可测. 有可数可加性：$m(\bigcup\limits_{r\in[-1,1]}\{V+r\})=\sum\limits_r m(V+r)$.

　有 $m(\bigcup\limits_{r\in[-1,1]}\{V+r\})\geq m([0,1])=1$. $m(V+r)=m(V)$.

　　1° 若 $m(V)>0$. 则 $m(\bigcup\limits_r(V+r))=+\infty<3$ 矛盾！

　　2° 若 $m(V)=0$. 则 $m(\bigcup\limits_r(V+r))=0>1$ 矛盾！

　于是任何情况均不成立. $V$ 只能为不可测集

6. $F_\sigma$：可数闭集的并. $G_\delta$：可数开集的交

　Baire 定理：若 $E$ 是 $F_\sigma$ 集. $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 每个 $F_n$ 都无内点. 则 $E$ 无内点

7. Cantor 集（构造重要反例的基础）

　$C$ 是非空有界闭集. 完全集 $(\forall x\in C.\ \forall\delta>0.\ \exists x'\neq x.\ x'\in B(x,\delta),\ x'\in C)$. 无内点. 有连续统 $c$. 是零测集

　Cantor 函数：$\varphi(2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2^i}$　$x_i=0,1.$ $i=1,2,\cdots$　$\Phi(x)=\{\sup\varphi(y)\mid y\leq x.\ y\in C\}$

　$\varphi(C)=[0,1]$ 将零测集映为正测集

8. 常用构造满足条件子集方法：$f=m([a,x)\cap E)$　证连续性：$|f(x+\Delta x)-f(x)|<|\Delta x|$.

9. 可测集定义：设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 对 $\forall T\subset\mathbb{R}^n$. $m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$ (Carathéodary 条件)

10. 可测集基数为 $2^c$.

　证明：Cantor 集是零测集. 故可测. 基数为 $c$. 于是 $\overline{\overline{\mathcal{M}}}\geq 2^c$.

　　　又 $\mathbb{R}$ 中全部子集的数量为 $2^c$. 于是 $\overline{\overline{\mathcal{M}}}\leq 2^c\Rightarrow\overline{\overline{\mathcal{M}}}=2^c$

11. 对递增（减）可测集列. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$

12. Borel-Cantelli 引理：对可测集列 $\{E_k\}$. 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$. 则 $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)=0$.

　证明：$m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m(\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}E_i)\leq\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=k}^{\infty}m(E_i)=0$.

13. Fatou 引理：$\{E_k\}$ 为可测集列. 则 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}m(E_k)\geq m(\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)$, $m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)\geq\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}m(E_k)$

14. 外测度的正则性：对 $E\subset\mathbb{R}^n$. $\exists$ 包含 $E$ 的 $G_\delta$ 集 $H$. $m(H)=m^*(G)$

15. Steinhaus 定理：$E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集. $m(E)>0$. 则 $\exists\delta>0$. $B(0,\delta)\subset E-E$

　证明：由 Lebesgue 密度定理. $\exists$ 矩体 $I$. $m(E\cap I)>\frac{3}{4}|I|$.

　　若对 $\forall a>0$. $B(0,a)\not\subset E\cap I-E\cap I$. 则对 $\forall x_1,x_2\in E\cap I$. $\forall t\in B(0,a)$. $x_1-x_2\neq t\Rightarrow(E\cap I)\cap(E\cap I+t)=\phi$

　　于是 $m((E\cap I)\cup(E\cap I+t))=2m(E\cap I)>\frac{3}{2}|I|$. 又 $E\cap I\subset I$. $E\cap I+t\subset[I+t]\Rightarrow m((E\cap I)\cup(E\cap I+t))<|I|+t$

　　当 $|t|<\frac{1}{2}|I|$ 时 $\frac{3}{2}|I|>\frac{3}{2}|I|$. 矛盾！证毕

16. 可测集原像不一定可测. 可测集不一定是 Borel 集.

反例：在 $[0,1]$ 上，$\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数，取 $f=\frac{1}{2}(x+\Phi(x))$ $x\in[0,1]$

$f$ 为严格增的连续函数，$f(0)=0, f(1)=1$，则 $f$ 有反函数 $f^{-1}$

设 $I_{n,k}$ 为第 $n$ 步移去的第 $k$ 个开区间，有 $m(f(I_{n,k}))=\frac{1}{2}m(I_{n,k}) \Rightarrow m(f(C))=\frac{1}{2}m(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k})=\frac{1}{2}$

于是存在不可测集 $W\subset f(C)$，而 $f^{-1}(W)=Z$，$Z\subset C$ 为零测集

设 $g=f^{-1} \Rightarrow g(W)=Z$，即可测集的原像可为不可测集。

同时 $Z$ 非 Borel 集，否则 $W$ 为 Borel 集，可测。

17. 可测函数的定义：对可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，若 $\{x\mid f(x)>t\}$ 是可测集，则称 $f(x)$ 为 $E$ 上的可测函数

单调函数一定可测；$f(x)$ 可测 $\overset{\checkmark}{\underset{\times}{\rightleftharpoons}}$ $|f(x)|$ 可测　　　开集的原像是可测集

可测关于复合运算不封闭，$f=\frac{1}{2}(x+\text{Cantor}(x))$，$g=f^{-1}$，$W\subset f(C)$ 为不可测集，$Z\subset C$ 为零测集，$f(Z)=W$

对函数 $\chi_Z\circ g$：$(\chi_Z\circ g)^{-1}(Z)=g^{-1}(Z)=W$ 不可测

[极逼近时，对 y 轴分割]

18. 简单函数逼近定理：$f(x)$ 为 $E$ 上可测函数，必存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，$|\varphi_k(x)|<|f(x)|$，且 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$ $x\in E$.

另：用函数值为有理数的函数逼近：$E_{n,k}=\{x\mid f(x)\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}), n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\}$，$f_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}}(x) \Rightarrow 0<f(x)-f_n(x)<2^{-n}$，$f_n(x)\nearrow f(x)$，记作。

19. a.e. 收敛：除零测集外

m. 收敛：$\lim_{n\to\infty} m\{x\mid |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon, \forall\varepsilon>0\}=0$.

a.un 收敛：$\lim_{n\to\infty} m\{\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x\mid |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\ \forall\varepsilon>0\}\}=0$.

a.e 与 a.un

20. Egorov 定理：在 $E$ 上 a.e. 有界的可测函数列，$m(E)<+\infty$，若 $\{f_k\}\xrightarrow{a.e} f(x)$，则对 $\forall\delta>0$，$\exists\, m(E_\delta)<\delta$，$f_k(x)$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

$m(E)<\infty$ 是必要的，如 $f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x)$ 与 $f(x)=1$

证明：a.e $\xrightarrow{\text{Egorov}}$ a.un $\xrightarrow{\lim}$ m

21. a.e $\longrightarrow$ m　$(m(E)<\infty)$　　a.un $\longrightarrow$ a.e.　$(m(E)<\infty)$

Riesz 定理：m $\longrightarrow$ a.e.　(∀子列 $f_k$，∃子列 $f_{k_i}$)　　若 a.e. 或 m. 可 $\rightarrow L^1$　$(m(E)<\infty$，$f_n(x)$ 有界$)$

m $\rightarrow$ a.un.　(∀子列，∃子列)　(m $\rightarrow$ a.e. $\rightarrow$ a.un.)

21. a.e 而非 m.：$f_n(x)=\chi_{(n,n+1)}(x)$　　$E=(0,+\infty)$

m. 而非 a.e.：$f_{nk}(x)=\chi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}$　$k=1,2,\cdots,n$.　$E=[0,1]$　$g_k=\{f_{11}, f_{21}, f_{22},\cdots\}$　$g_k\xrightarrow{m}0$　$g_k\overset{a.e.}{\nrightarrow}0$　$m(g_k\neq 0)=1$

22. Lusin 定理：$f(x)$ 为 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则对 $\forall\delta>0$ ∃闭集 $F\subset E$，$m(E\setminus F)<\delta$，$f(x)$ 在 $F$ 上连续

23. 若 $f(x)$ 为 $E$ 上非负可测函数，有 $\int_E f(x)dx=\sup_{\substack{\varphi(x)\le f(x)\\ x\in E}}\{\int_E h(x)dx \mid h(x)\text{ 为 }E\text{ 上非负可测简单函数}\}$

24. 一些常用等式（不等式）：$\int_A f(x)\,dx=\int_E f(x)\chi_A(x)\,dx$　$A\subseteq E$

$E_k=\{x\mid f(x)\ge\frac{1}{k}\} \Rightarrow \frac{1}{k}m(E)=\int_E\frac{1}{k}dx\le\int_E f(x)dx$，有 $\{x\mid f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$

$F_k=\{x\mid f(x)>k\} \Rightarrow km(E)=\int_E k\,dx<\int_E f(x)dx$　有 $\{x\mid f(x)=\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$.

25. Levi 非负渐升列积分定理：$\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上 $\nearrow$ $\ge 0$ $\rightarrow f(x)$，则 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$

对渐降也成立.$(g_k(x)=f_1(x)-f_k(x))$

26. Fatou 引理：非负可测函数列，$\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx\ge\int_E\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)dx$

27. 积分绝对连续性：$f\in L(E)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$E_\delta\subset E$，$|E_\delta|<\delta$ s.t. $|\int_{E_\delta}f(x)dx|<\varepsilon$

28. DCT：$f_k\in L(E)(\forall k)$，若 $f_k\xrightarrow[m.]{a.e.}f$，$|f_k|\le F$，则 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx \Longrightarrow$ 极限保持，$m(E)<\infty$ 时　二者均可

有有界收敛定理.

$L^1$ 收敛：$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|dx=0 \longrightarrow$ m. 收敛 $\xrightarrow{\text{子列}}$ a.e. 收敛

29. Fubini 定理：$f\in L^+\cup L^1$，则 $\int_E\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx$

等价：

Levi $\rightarrow$ Fatou

$\int_E\varliminf_{k\to\infty}f_k=\int_E\lim_{k\to\infty}\inf_{n\ge k}f_n\overset{\text{Levi}}{=}\lim_{k\to\infty}\int_E\inf_{n\ge k}f_n\le\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k$

Fatou $\rightarrow$ Lebesgue 控制收敛定理.

设 $|f_n|\le g$，则 $2g-|f_n-f|\in\mathcal{L}^+$

有 $\varliminf_{n\to\infty}\int_E(2g-|f_n-f|)\ge\int_E\varliminf_{n\to\infty}(2g-|f_n-f|)$

即 $\varlimsup_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|dx\le 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|dx=0$.

于是 $f_n\xrightarrow{L^1}f$，$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f\,dx$.

Lebesgue 控制收敛定理 $\rightarrow$ Levi

取 $S^+\ni\varphi_{kj}\le f_k$，$g_j\overset{\text{def}}{=}\max\{\varphi_{1j},\cdots,\varphi_{jj}\}<f_j$　$g_j\nearrow f$

1. 放缩. $E=\{f(x)>\frac{1}{k}\}$. $\int_E f(x)dx>\frac{1}{k}m(E)$

2. 特征. $\int_{E_k}f=\int_{\mathbb{R}}f\chi_{E_k}$.

3. 证连续可用 DCT.

Chebyshev 不等式：$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$：$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\ge\varepsilon\, m(\{|f(x)|>\varepsilon\})\Longrightarrow L^1\rightarrow m$

Riemann-Lebesgue 引理：若 $\|g_n\|_{L^\infty[a,b]}\le 1$，则：$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx=0$　$f\in L^1[a,b] \Leftrightarrow \cdots=0$，$f\in\chi[a,c]$　$\forall c\in[a,b]$