复分析题型方法总结

tip：本笔记用于总结复分析中的题型与方法，包括近年试题与补充习题，以原来助教的讲义为主

（至2025年）

Author：张竞一. zhangjingyi@mail.ustc.edu.cn

期中部分

2026.3.28

1.2025

1) 是否存在 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的解析函数 $f(z)$ 满足 $f'(z)=\frac{1}{z}, \forall z\in\mathbb{C}^*$?

经典结论：不存在. 若存在, $\oint_{|z|=1} f'(z)dz = 0 \neq 2\pi i = \oint_{|z|=1}\frac{1}{z}$ 矛盾!

2) 是否存在 $f\in H(B(0,1))$ 满足 $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^{2025}}$ 对所有 $n=2,3,4,\cdots$ 成立?

—唯一性定理

令 $g(x)=f(x)-x^{2025}$，有 $g(\frac{1}{n})=0 \Rightarrow g(z)\equiv 0$. 与 $g(-\frac{1}{n})\neq 0$ 矛盾! 不存在.

3) 设 $f\in H(B(0,1))$ 且 $f'(z)\neq 0, \forall z\in B(0,1)=D$. 问 f 是否一定为 D 上的单叶解析函数?

令 $f(z)=e^{2\pi z}$, $f'(z)\neq 0$. 则 $f(\frac{-i}{2})=f(\frac{i}{2})=1$. 不单叶.

—只有局部单叶性结论.

定理 4.4.8 设 f 是域 D 中的全纯函数，如果对于 $z_0\in D$, $f'(z_0)\neq 0$，那么 f 在 z_0 的邻域中是单叶的.

定理 4.4.7 如果 f 是域 D 中单叶的全纯函数，那么对于 D 内每一点 z，有 $f'(z)\neq 0$.

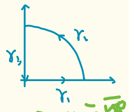
—逆命题经典反例: $f(z)=e^z$.

4) 方程 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在第 II 象限有 1 个解.

Rouche定理应用

4. 证明 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限中各有一个根.

设 $P(z)=z^4+2z^3-2z+10$.



(1) R 充分大时 $P(z)$ 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 上无零点.

1° $z\in\gamma_1$ $z=x>0$. $P(x)=(x^2-1)(x+1)^2+11$

$0\leq x<1$ 时 $P(x)\geq -1\times 4+11=7>0$

2° $z\in\gamma_2$. $|P(z)|=\boxed{|z|^4\left|1+\frac{2}{z}-\frac{2}{z^3}+\frac{10}{z^4}\right|}\to+\infty$ as $z\to\infty$

分出主要部分.

3° $z\in\gamma_3$, $z=iy$. $P(z)=y^4+10-2iy(y^2+1)\neq 0$.

(2). 当 z 沿 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 绕一圈时. $P\circ\gamma$ 的辐角增量

1° P 在 γ_1 上恒取正值. $\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z)=0$

2° 当 $z\in\gamma_2$ 时 $P(z)=z^4\cdot Q(z)$. 当 $|z|=R$ 充分大时 $|Q(z)-1|<1 \xRightarrow{\text{Rouché}} \Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,Q(z)=0$

$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z)=4\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,z+\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,Q(z)=2\pi$

3° 当 $z\in\gamma_3$ 时 $\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}P(z)=\mathrm{Arg}P(0)-\mathrm{Arg}P(iR)=-\mathrm{Arg}(R^4+10-2iR(R^2+1))\to 0$ as $R\to\infty$

由辐角原理可知 $P(z)$ 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 曲线内部有一零点.

又共轭性知: 第四象限中有一零点, 又 $P(z)$ 在负实轴无零点 $\Rightarrow$ 证毕

存疑

5) 是否存在 $B(0,1)$ 上的解析函数 $f(z)$ 满足: $\forall z\in B(0,1)$, $f(z)^2+2zf(z)+1\equiv 0$?

三 (8 分) 计算积分:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^n(z-2025)},\quad n\geq 0.$$

—留数算积分.

$n>0$: 其中含 $z=1$ 为极点. $I=2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,1)$. $\mathrm{Res}(f,1)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{z-2025}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(-2024)^n}=-\frac{1}{2024^n}$

$n=0$: $I=0$.（全纯函数）

$$I=\begin{cases}0 & n=0\\ -\frac{2\pi i}{2024^n} & n\geq 1\end{cases}$$

四 (12 分) 计算积分:

$$\Phi(z)=\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-2025)(\zeta-z)},\quad |z|\neq 1.$$

—Cauchy公式算积分.

$$\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$$

原式 $=\frac{1}{2025z}\cdot\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2025(2025-z)}\cdot\frac{1}{\zeta-2025}+\frac{1}{z(z-2025)}\cdot\frac{1}{\zeta-z}$

$|z|<1$ 时. $\Phi(z)=\frac{2\pi i}{2025z}+0+\frac{2\pi i}{z(z-2025)}=\cdots$

$|z|>1$ 时. $\Phi(z)=\frac{2\pi i}{2025z}+0+0=\cdots$

—关于零点个数, 基本用Rouché定理

"减主要, 留次要"

六 (5 分) 求整函数 $e^z-4z^{2025}+1$ 在 $B(0,1)$ 中的零点个数.

算Res: ① 展开, 观察 -1 次项系数

② $\frac{g}{h}$. $g(a)\neq 0$. $h(a)=0$. $h'(a)\neq 0$. 则 $\mathrm{Res}(\frac{g}{h},a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$

③ a 为 m 阶极点. 则 $\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m f)$

八 (15 分) 设 f 为 $B(0,1)$ 上的全纯函数, $f(0)=0$. 已知

$$\mathrm{Re}f(z)\leq\frac{2025}{2},\quad\forall z\in B(0,1).$$

—有"$B(0,1)$", 考虑Schwarz引理

证明:

$$|f(z)|\leq\frac{2025|z|}{1-|z|},\quad\forall z\in B(0,1).$$

$0\mapsto 0$, $2025\mapsto\infty$. 取 $\varphi=\frac{z}{z-2025}$ 则有 $g=\varphi\circ f$. $g(0)=0$ $g:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯. 由Schwarz引理. $|g(z)|\leq|z|$. $|f(z)|=\frac{2025|g|}{|1+g(z)|}\leq\frac{2025|z|}{1-|z|}$

$\left(\varphi_a=\frac{a-z}{1-\bar{a}z},\ \varphi_a=\varphi_a^{-1}\right)$

2.2024

6. (10分) 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯且 $|f(0)|=r>0$. 证明: $f(z)$ 在 $B(0,r)$ 中没有零点.

设 $g=\varphi_{f(0)}\circ f$. 则 $g:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯. 且 $g(0)=0$. 由Schwarz引理: $|g(z)|\leq|z|$

即 $\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\leq|z|$. 若 $\exists a\in B(0,r)$. $f(a)=0$. 则 $|f(0)|\leq|a|$ 即 $r\leq|a|<r$ 矛盾! 于是无零点.

1. (24分) 计算下列各题.

(1) $\int_{|z|=1}\bar{z}dz$

(3) $\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{2z+1}$

(1) 设 $z=e^{i\theta}$. 则为 $\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta=2\pi i$

(3). 设 $z=e^{i\theta}$. 则 $dz=iz\,d\theta$. $|dz|=d\theta=\frac{dz}{iz}$

则为 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz(2z+1)}=-i\int_{|z|=1}2\cdot\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z+1}\right)dz=0.$

—常见: $z=re^{i\theta}$

$dz=ire^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta.$

$|dz|=|z|\cdot d\theta=\frac{|z|dz}{iz}$

2. (14分) (1) 设 $u(x,y)=x^2-y^2-x+1$, 证明 $u(x,y)$ 为调和函数并求函数 $v(x,y)$ 使得 $u+iv$ 为全纯函数.

—C-R方程: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$

(2) 设 $u(x,y)$ 为单连通区域 D 上的调和函数, 证明: 存在 D 上的调和函数 $v(x,y)$ 使得 $u+iv$ 为全纯函数.

(1) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2$. $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-2\Rightarrow\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 则 u 为调和函数.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow v=2xy-y$$ 即可. 此时 u,v 实可微且满足C-R方程. 故 $f=u+iv$ 为全纯函数.

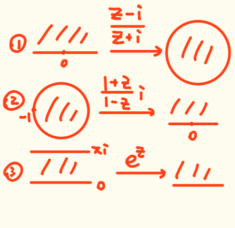
两条件! 不只有C-R!

(2). 令 $v(x,y)=\int u_x dy-u_y dx$ $v_y=\lim_{h\to 0}\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h u_x dy=u_x$ 同理 $v_x=-u_y$. 证毕

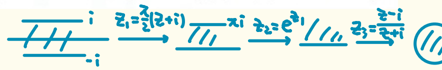
3. (12分) 将下列区域单叶全纯地映为单位圆盘.

(1) $\{z:-1<\mathrm{Im}z<1\}$; (2) $\{z:|z|<1,\mathrm{Im}z>0\}$.

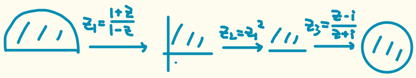
—共形映射



(1)



$f(z)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}(z+i)}-i}{e^{\frac{\pi}{2}(z+i)}+i}$

(2) 

7. (10分) (1) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯且 $f(\frac{1}{n})=0$, $n=2,3,\cdots$, 证明 $f(z)$ 恒等于零;

(2) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯且 $|f(\frac{1}{n})|\le e^{-n}, n=2,3,\cdots$, 证明 $f(z)$ 恒等于零. —Taylor展开

(1). 0为零点列聚点. 由唯一性定理 $f(z)\equiv 0$.

(2). 取 $r=\frac{1}{n}$. 由连续性. $|f(0)|=\lim_{n\to\infty}|f(r)|=0$. 即 $f(0)=0$. 对 $\frac{f(z)}{z}$ 也进行此操作 $\Rightarrow f'(0)=0$. 归纳知 $f^{(m)}(0)=0 \Rightarrow f(z)\equiv 0$.

8. (10分) 证明: 一个非常值整函数 f 不可能同时满足以下两个条件

(i) $f(z)=f(z+1), \forall z\in\mathbb{C}$.

(ii) $f(z)=f(z+i), \forall z\in\mathbb{C}$.

若同时满足. 有 $f(z)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上取值域. 即 $\exists M>0. |f(z)|\le M$.
而有界整函数一定为常数矛盾! 证毕

3.2023

5. (10分) 设 D 为单连通区域且 $0\in D$, 证明: 存在域 D上的全纯函数 f, 满足 $e^{f(z)}=z$.

$f(z)$ 为 well-defined, 因为单连通域上积分与路径无关

取 $z_0\in D$. $z_0=e^{w_0}$. 设 $f(z)=w_0+\int_{z_0}^{z}\frac{1}{t}dt$ 设 $h(z)=ze^{-f(z)} \Rightarrow h'(z)=e^{-f(z)}(1-z\cdot\frac{1}{z})=0$ 于是 $h(z)$ 为常数
又 $h(z_0)=z_0e^{-w_0}=1 \Rightarrow h(z)\equiv 1$. 于是 $\exists f(z). z=e^{f(z)}$

7. (10分) 设 $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z-1$, 其中 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为实数. 如果 $P(z)$ 的所有零点都不在单位圆盘 $\{z:|z|<1\}$中, 求 $P(1)$.

设零点为 $z_1,\cdots,z_n$. 由 Vieta 定理: $|z_1z_2\cdots z_n|=1$. 又 $|z_1|,\cdots,|z_n|\ge 1 \Rightarrow |z_1|=\cdots=|z_n|=1$. 即全部零点在 $\partial B(0,1)$ 上.
取 $z=x$. 有 $P(0)=-1$. $\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_0. P(x_0)=0$. 由上述分析知 $x_0=1$ 即 $P(1)=0$.

1. 如果 $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 是调和函数, 且 u 有上界或下界, 那么 u 恒为常数.
2. (19H 期中) 如果 $u:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 为非负调和函数, 那么 u 为常数. —对调和函数,考虑其共轭调和v.
3. (23 期中) 设 $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 为调和函数, 并且对任意 $z\in\mathbb{C}$ 成立 $u(z)\leqslant 2|\log|z||+1$, 那么 u 恒为常数.

证明. 1. 不妨设 u 有上界 M. 首先 u 在 $\mathbb{C}$ 上存在共轭调和函数 v, 所以整函数 $f=u+iv$ 以 u 为实部. 考虑 $g(z):=\frac{1}{M+1-f(z)}$, 那么 g 为整函数且 $|g(z)|\leqslant 1$. 由 Liouville 定理可得 g 为常数, 从而 u 也为常数.

2. 考虑 $\mathbb{C}$ 上的函数 $v(z)=u(e^z)$, 那么 v 是调和函数 u 和整函数 e^z 的复合, 所以 v 在 $\mathbb{C}$ 上调和 (之前的一道作业题), 且由 u 非负可得 v 非负. 从而由第 1 问可得 v 为常数, 因此 u 为常数.

3. 注意到现在只有上界估计, 没有模估计的话是很难用积分方法处理的, 不过我们还是有招. 设 v 为 u 在 $\mathbb{C}$ 上的一个共轭调和函数, 那么整函数 $f=u+iv$ 以 u 为实部. 考虑整函数 $g(z)=e^{f(z)}$, 那么

$$|g(z)|=e^{\mathrm{Re}\,f(z)}\leqslant e\,|z|^2,\ \forall |z|>1.$$

利用作业 1.2 可得 $g(z)$ 为至多二次的多项式. 但由定义可得 g 没有零点, 所以 g 只能为常数, 所以 u 也为常数.

4.2022

(b) 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 全纯, 且对任意 $n\ge 1$,

判断题

$$\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{((n+1)z-1)^2}=0$$

则 $f(z)\equiv 0$.

$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n>1\end{cases}$ $(|a|<1)$

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \Rightarrow \frac{2\pi i\cdot f'(\frac{1}{n+1})}{(n+1)^2}=0 \Rightarrow f'(\frac{1}{n+1})=0$ 对 $\forall n\ge 1$ 由唯一性定理知 $f'(z)\equiv 0$ 于是 $f(z)\equiv$ const

$\frac{C}{(n+1)^2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-\frac{1}{n+1})^2}=0 \Rightarrow C$ 不一定为0. 原命题错误

(c) 设函数 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯, 且 $f(0)=0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 中内闭一致收敛.

由 Schwarz 引理: $|f(z)|\le|z| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|f(z^n)|\le\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 又 $z\in B(0,1)$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n<+\infty \Rightarrow$ 由 Weierstrass 判别法知其一致收敛

3. (15分) 证明代数学基本定理.

—用数学基本定理的4个基础证明.

法一: Liouville 定理: 设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_n\ne 0)$ 若 $P(z)$ 无零点. 设 $f(z)=\frac{1}{P(z)}$, 则 f 为整函数
有 $z\to\infty$ 时 $P(z)\to\infty \Rightarrow \exists R>0. |z|>R$ 时 $|f(z)|<1$ 又 $f(z)$ 在紧集 $B(0,R)$ 上有界 $\Rightarrow f(z)$ 为有界整函数.
由 Liouville 定理知 $f(z)\equiv$ Const 则 $P(z)$ 恒为常数. 矛盾. 于是 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上一定有零点. 证毕

法二: 最大模原理: 设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_n\ne 0)$. 若 $P(z)$ 无零点. 设 $f(z)=\frac{1}{P(z)}$
有 $z\to\infty$ 时 $P(z)\to\infty \Rightarrow \exists R>0. |z|=R$ 时 $|P(z)|>|P(0)|$. 则此时 $|f(z)|<|f(0)|$ 与最大模原理相悖. 矛盾! 证毕

法三: 辐角原理: 设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_n\ne 0)$ $\exists R>0. |z|\ge R$ 时 $|P(z)|>0$ 于是只需考虑 $|z|<R$ 时.
有 $\lim_{z\to\infty}\frac{zP'(z)}{P(z)}=n$. $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz-n\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=R}\frac{1}{z}(z\frac{P'(z)}{P(z)}-n)dz\right|\le\max_{|z|=R}\left|z\frac{P'(z)}{P(z)}-n\right|$ 令 $R\to\infty$ 即可得: $\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz=n$
即零点个数为n. 证毕

法四: Rouché 定理: 设 $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$. 设 $R=\max\{1,\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\}$, 当 $|z|\ge R$ 时, 有 $\sum_{k=0}^{n-1}|a_kz^k|\le|z|^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\le|z|^{n-1}\cdot R\le|z|^n$
即 $|z|=R$ 时. $|P(z)-z^n|=|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k|\le|z|^n$. 由 Rouché 定理知 $P(z)$ 零点个数与 z^n 零点数相同. 为n.

5. (15分)

(a) 写出函数 $\frac{1}{1-z}$ 和函数 $\sin z$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数.

(b) 计算积分 $\int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}dz$, 其中 $|a|<1$.

—一致收敛才能交换积分和求和号

(a) $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$

(b). $\sin\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内闭一致收敛 $\Rightarrow$ 在 $|z|=1$ 上一致收敛

则 $I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^{2n+1}(z-a)}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}I_n$ 若 $a=0$. $\forall n. I_n=0$

若 $a\ne 0$. 对 $r>0$. $B(0,r)\cap B(a,r)=\phi$ $B(a,r)\subset B(0,1)$ 有 $I_n=\int_{|z|=r}\frac{1/(z-a)}{z^{2n+1}}dz+\int_{|z-a|=r}\frac{1/z^{2n+1}}{z-a}dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\frac{1}{z-a}\right)\Big|_{z=0}+\frac{2\pi i}{a^{2n+1}}=0$.

6. (15分) 设 Ω 是单连通区域, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 连续, $z_0\in\Omega$. 此处的“连续”改成“全纯”

(a) 设 $z\in\Omega$, γ_z 是 Ω 内连接 z_0 和 z 的光滑曲线, 证明: $F(z):=\int_{\gamma_z}f(\zeta)d\zeta$ 与 γ_z 的选取无关.

(b) 证明: F 在 Ω 全纯, 且 $F'(z)=f(z)$.

(c) 若 $0\notin\Omega$, 证明: 存在全纯函数 $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 满足 $e^{g(z)}=z$.

(a). 对 z_0 γ_1 γ_2 z 有 $\int_{\gamma_1-\gamma_2}f dz=0$ (全纯. Cauchy 积分定理) 则 $\int_{\gamma_1}f dz=\int_{\gamma_2}f dz$. 证毕

(b). 用定义. $\lim=\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}f(\zeta)d\zeta=f(z)$. 由 f 的连续性.

(c) 对 $z_0\in\Omega$. 设 $z_0=e^{w_0}$. 设 $g(z)=w_0+\int_{z_0}^{z}\frac{1}{t}dt$ 设 $h(z)=e^{-g(z)}\cdot z$ 有 $h'(z)=e^{-g(z)}(-zg'(z)+1)=0 \Rightarrow h(z)$ 为常数
又有 $h(z_0)=1 \Rightarrow h(z)\equiv 1 \Rightarrow e^{g(z)}=z$. 证毕

(22mid) 设 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内全纯，$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_0$ 为复系数多项式。证明：

$$|f(0)|\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta$$

反向多项式. 有 $q(z)=\overline{a_0}z^n+\dots+1$ 性质: $p(0)=q(0)$

$|q(z)|=|p(z)|$ as $|z|=1$

考虑 $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar z})}=\overline{a_0}z^n+\overline{a_1}z^{n-1}+\dots+\overline{a_{n-1}}z+1$ 则 $q(0)=1$ 则 $|z|=1$ 时 $|q(z)|=|z|^n|p(\frac{1}{\bar z})|=|p(z)|$

由平均值公式. $|f(0)|=|f(0)q(0)|=|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})q(e^{i\theta})d\theta|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta$

8. (10分) 设 $p(z)$ 为 n 次复系数多项式，对 $r>0$, 记 $M(r)=\sup_{|z|=r}|p(z)|$.
证明：
(1) $M(r)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数；
(2) $\frac{M(r)}{r^n}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数.

(1) 对 $0<r_1<r_2$. 由最大模原理. $M(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|p(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|p(z)|=M(r_2)$. 证毕

(2). 设 $q(z)=z^n p(\frac{1}{z})=a_0z^n+\dots+a_n$. $\tilde M(r)=\sup_{|z|=r}|q(z)|$

则 $\tilde M(r)=r^n\max_{|z|=r}|p(\frac{1}{z})|=r^n\max_{|z|=\frac{1}{r}}|p(z)|=r^nM(\frac{1}{r})$ 同(1)知 $\tilde M(r)$ 为 r 的增函数. 则 $\frac{M(r)}{r^n}=\tilde M(\frac{1}{r})$ 为 r 的减函数

5.2021

1. (24分) 计算下列各题
(1) $\frac{\partial}{\partial z}\ln|z|$

$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$

$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$

设 $z=x+iy$ 则 $f(z)=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 是实可微的.

$\frac{\partial}{\partial z}f(z)=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{x+yi}{2(x^2+y^2)}=\frac{z}{2z\cdot\bar z}=\frac{1}{2\bar z}$

另: $\frac{\partial}{\partial z}\ln|z|=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\ln(z\cdot\bar z)=\frac{1}{2z}$

$a_n=\frac{(f'(z))^{(n-1)}}{n!}$

$f^{(n)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{(z-z_0)^n}dz$

$\to\le\frac{M}{nR^{n-1}}\cdot R$

7. (10分) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R>0$. 若 $|z|<R$ 时, $|f'(z)|\le M$, 证明：$n\ge1$ 时，

$$a_n\le\frac{M}{nR^{n-1}}.$$

日k

做题小贴

$\frac{(f'(z))^{(n-1)}}{n!}$

$\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$

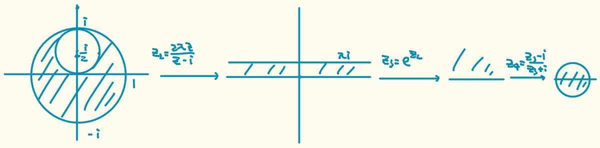
$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

有 $a_n=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ 由 Cauchy 积分公式有: $f^{(n)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f'(z)}{(z-z_0)^n}dz\le\frac{(n-1)!}{r^{n-1}}\cdot M$ 令 $r\to R$ 则 $a_n\le\frac{M}{nR^{n-1}}$

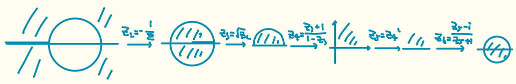
($R=\frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{na_n}}$ 即 $f'(z)$ 的收敛半径也为 R)

补充习题内容

共形映射

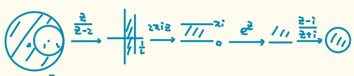


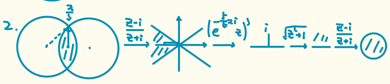
求一个共形变换，将下列区域 D 映为单位圆盘
1.D 中 z 有：$z\in\mathbf{C},|z|<1,|z-\frac{i}{2}|>\frac{1}{2}$
2.D 为单位圆盘外部，且去掉了线段 $(-\infty,-1]$



习题 2.1 求一个共形变换, 将下列区域 D 映为单位圆盘.

1. (23 期末) $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2,|z-1|>1\}$.
2. (11 期末) $D=\Omega\setminus[0,\mathrm{i}]$, 其中 $\Omega=B(\sqrt{3},2)\cap B(-\sqrt{3},2)$.

1.


2.


取 $\sqrt{-1}=i$ 的支 要说明

支点

习题 2.1 考察 $F(z)=\mathrm{Log}\,\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)}$ 的支点.

解: 支点: 任取 $\mathbb{C}$ 中简单闭曲线 C

$$\Delta_C F(z)=2\Delta_C\,\mathrm{Log}\,z+\Delta_C\,\mathrm{Log}(z+1)-3\Delta_C\,\mathrm{Log}(z-1)-\Delta_C\,\mathrm{Log}(z+2)$$
$$=i\,[2\Delta_C\,\mathrm{Arg}\,z+\Delta_C\,\mathrm{Arg}(z+1)-3\Delta_C\,\mathrm{Arg}(z-1)-\Delta_C\,\mathrm{Arg}(z+2)]$$

故 $z=-2,-1,0,1$ 为支点.

考察 ∞ 远点，设 C 包含 $-2,-1,0,1$.

则

$$\Delta_C F(z)=i\,(2\cdot2\pi+2\pi-3\cdot2\pi-2\pi)$$
$$=-2\pi i\neq0\quad 故\ \infty\ 是支点.$$

综上，支点为 $z=-2,-1,0,1,\infty$.

若 C_1 仅包含 $-1,-2$

$-2\quad-1\quad0\quad1$

$\mathbb{C}\setminus\{[-2,-1]\cup[0,\infty)\}$

$$\Delta_{C_1}F(z)=i\,(2\cdot0+2\pi-3\cdot0-2\pi)=0.$$

故 $F(z)$ 沿着曲线 C_1 的改变量为 0

从而 F 在 $D=\mathbb{C}\setminus[-2,-1]\cup[0,\infty)$ 内部可取出单值分支.

若 C_2 仅包含 $-1,0,1$,

$-2\quad-1\quad1$

$\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-2]\cup[-1,1]\}$

$$\Delta_{C_2}F(z)=i\,(2\cdot2\pi+2\pi-3\cdot2\pi-0)=0.$$

故 $F(z)$ 沿着曲线 C_2 的改变量为 0

从而 F 在 $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,-2]\cup[-1,1]$ 内部可取出单值分支.

习题 2.2 设 $F(z)=\sqrt[3]{z^2(1-z)}$, $D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$. 证明：$F$ 可以在 D 内取出全纯的单值分支. 如果 f 是 F 在 $(0,1)$ 上岸取正值的单值分支，计算 $f(-2)$ 和 $f'(-2)$.

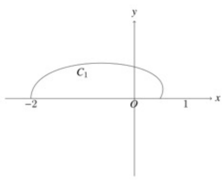
对原函数求导后再代值.

证明： 任取 D 中简单闭曲线 C，有

$$\Delta_C\,\mathrm{Arg}\,F(z)=\frac{2}{3}\Delta_C\,\mathrm{Arg}\,z+\frac{1}{3}\Delta_C\,\mathrm{Arg}(1-z)=2\pi.$$

由定义可得 $|f(z)|=|z|^{\frac{2}{3}}|1-z|^{\frac{1}{3}}$，所以 $|f(-2)|=\sqrt[3]{12}$. 我们选取从 $\frac{1}{2}$ 的上岸到 -2 的简单曲线 C_1，如图所示，有

$$\Delta_{C_1}\,\mathrm{Arg}\,F(z)=\frac{2}{3}\Delta_{C_1}\,\mathrm{Arg}\,z+\frac{1}{3}\Delta_{C_1}\,\mathrm{Arg}(1-z)=\frac{2\pi}{3}.$$



由于 f 在 $(0,1)$ 上岸取正值，辐角为零，故 $\arg f(-2)=\frac{2\pi}{3}$, 可得 $f(-2)=\sqrt[3]{12}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
又由定义可得 $f(z)^3=z^2(1-z)$，两边求导，

$$3f(z)^2f'(z)=2z-3z^2.$$

代入 $z=-2$ 以及 $f(-2)$，

$$f'(-2)=\frac{16}{3\times12^{\frac{2}{3}}}e^{-\frac{4}{3}i}.$$

习题 1.2 设 $f\in H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$. 如果 f 在 $\partial B(0,1)$ 的某段闭圆弧 γ 上恒为零, 证明: f 在 $B(0,1)$ 内恒为零.

类似于 $\boxed{}$ $f(z)^{\frac{3}{m}}$ 那一题的思路. 进行旋转, 取遍圆周.

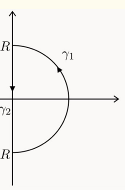
证明. 设 γ 的参数表示为 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, 其中 $-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi$. 记 $\theta_0=\beta-\alpha$, 并考虑正整数 $N=\lceil\frac{2\pi}{\theta_0}\rceil$, 以及函数

$$g(z)=\prod_{k=0}^{N}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0}z).$$

那么 $g\in H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$. 由于 f 在 γ 上恒为零, 并且对任意 $|z|=1$, 存在整数 $0\leqslant k\leqslant N$ 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_0}z\in\gamma$, 所以 g 在 $\partial B(0,1)$ 上恒为零. 由最大模原理即可得 g 在 $B(0,1)$ 内恒为零. 对任意正整数 n, 由 $g(\frac{1}{n})=0$ 可得存在 $z_n\in\mathbb{C}$ 满足 $|z_n|=\frac{1}{n}$, 使得 $f(z_n)=0$. 而 $\{z_n\}$ 收敛于 0, 由唯一性定理可得 f 恒为零.

Rouché 定理失效. 考虑幅角原理

习题 1.7 (19H 期中) 求多项式 $p(z)=z^7+z^5+9z^4+8z^3+7z+8$ 在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>0\}$ 内根的个数.



证明. 这时候看不出"主项", 那就用辐角原理吧. 采用与上题同样的围道, $N(R)$ 定义如前. 首先

$$\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,p(z)=\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,z^7+\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z^5+9z^4+8z^3+7z+8}{z^7}\right)=7\pi+O(R^{-2}).$$

另一方面, 代入 $z=\mathrm{i}y$ 可得 $p(\mathrm{i}y)=9y^4+8+\mathrm{i}(-y^7+y^5-8y^3+7y)$, 此时函数值的实部总大于零

注意到 $\lim_{R\to+\infty}\frac{p(\pm\mathrm{i}R)}{|p(\pm\mathrm{i}R)|}=\mp\mathrm{i}$, 结合图示可得 $\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,p(z)=\pi$. 综上所述, 由辐角原理可得

i 为 $+\infty$

$$\lim_{R\to+\infty}N(R)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,p(z)+\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,p(z)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4.$$

所以 $p(z)$ 在右半平面内有四个零点.

$g=\varphi_{f(0)}\circ f\quad g(0)=0.\ |g(z)|\le|z|$

习题 2.7 (23 保研优营) 设 $f: B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数. 如果 $r := |f(0)|$ 不为零, 证明 f 在 $B(0,r)$ 上恒不为零. $a \triangleq f(0)$

取 $g = \varphi_a \circ f: B(0,1) \to B(0,1)$. $g(0)=0$. 则由 Schwarz 引理 $|g(z)| \leq |z|$.

由 $f(z) = \frac{a-g(z)}{1-\bar{a}g(z)} \Rightarrow |f(z)-a| = \left|\frac{(1-r^2)g(z)}{1-\bar{a}g(z)}\right| \leq \frac{(1-|a|^2)|z|}{1-|a|\cdot|z|} \Rightarrow |z|<r$ 时 $|f(z)-a|<|a| \Rightarrow |f(z)| \geq |a|-|f(z)-a| > 0$.

习题 2.4 (复可微的判定) 讨论下列函数的复可微性. —复可微: ① 实可微 + C-R 方程 ② $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

1. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$.

证明. 1. 首先, 若记 $z = x + iy$, 则 $f(z) = x^2$ 是实可微的. 直接计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 = \frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z.$$

所以 f 的复可微点集为整个虚轴.

作业 1.2 (教材 3.5.2) 设 f 为整函数, 如果当 $z \to \infty$ 时, $f(z) = O(|z|^\alpha), \alpha \geqslant 0$. 证明: f 是次数不超过 $\lfloor \alpha \rfloor$ 的多项式.

证明. 记 $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$, 我们只需证 $f^{(n)}(z)$ 恒为零. 任意取定 $z \in \mathbb{C}$. 由条件可得存在 $M > 0$ 和充分大的 $R > 0$, 对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ 满足 $|\zeta - z| \geqslant R$, 都有 $|f(\zeta)| \leqslant M|\zeta|^\alpha$. 由 Cauchy 积分公式可得

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{M|\zeta|^\alpha}{R^{n+1}}|d\zeta| \leqslant \frac{Mn!(R+|z|)^\alpha}{R^n}.$$

注意到 $\alpha < n$, 上式令 $R \to \infty$ 即可得 $f^{(n)}(z) = 0$, 即证. $|f(z)| \leq M. \Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}$ $z \in B(a,R)$

习题 2.14 (16H 期中) 设 f, g 在单位闭圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ 上全纯, 并且在 $|z| = 1$ 上满足

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

1. 证明: 对任意非负实数 λ, $f - \lambda g$ 和 f 在单位圆周内的零点个数相同.
2. 证明: f 和 g 在单位圆周内的零点个数相同.

证明. 1. 我们记 γ 为逆时针定向的单位圆周. 由已知可得当 $|z| = 1$ 时, $f(z)$ 和 $g(z)$ 总不同向, 所以此时 $f(z) - \lambda g(z)$ 总不为零, 那么

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f - \lambda g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f + \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\left(1 - \lambda\frac{g}{f}\right).$$

根据辐角原理, 我们只需证 $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\left(1 - \lambda\frac{g}{f}\right) = 0$. 而由条件可得 $|z| = 1$ 时 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 不可能为正实数, 从而 $1 - \lambda\frac{g(z)}{f(z)}$ 的取值不可能为小于 1 的实数. 如果曲线 $\theta \mapsto 1 - \lambda\frac{g(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}$ 绕原点转的圈数不为零, 那么必然会与负实轴相交, 矛盾! 由此即证.

2. 上一题中取 $\lambda = 1$, 可得 $f - g$ 和 f 在单位圆周内的零点个数相同. 类似可得 $g - f$ 和 g 在单位圆周内的零点个数相同, 由此即证.

作业 1.11 (习题 2.2.3) 设 $z = x + iy$, 证明 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 但 f 在 $z = 0$ 处不可微.

证明. 计算可得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z=0} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z=0} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\sqrt{0 \cdot |\Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0.$$

所以 f 在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程. 但是当 $z = x + iy$ 满足 $x = y$ 时, 有

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy} = \frac{1}{1+i}\frac{|x|}{x}.$$

上式在 $x \to 0$ 时的极限不存在, 所以 f 在 $z = 0$ 处不是复可微的.

注 这是一个相当重要的反例. 这告诉我们必须一点处实可微和 Cauchy-Riemann 方程同时成立才能推出复可微, 缺一不可. 去年期中有一题, 很多同学因为忽视了这一点导致被判错, 我把这题列在下面.

习题 1.1 (去年期中) 设 D 为区域, $f \in C(D)$ 恒非零. 如果 $f^2 \in H(D)$, 那么 $f \in H(D)$.

证明. 当时很多同学只验证了 f 满足 Cauchy-Riemann 方程就断言 f 全纯, 这当然是不对的. 本题应当按照定义验证 f 处处复可微. 任给 $z_0 \in D$, 则

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0}\frac{1}{f(z) + f(z_0)}.$$

注意到 f 处处非零, 且 $f^2 \in H(D)$, 所以由上式可得

$$\lim_{z \to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2f(z_0)}\frac{d}{dz}(f(z)^2)\bigg|_{z=z_0}.$$

习题 1.2 (21 期末) 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面, 考虑函数族 —Schwarz 引理变形.

$$\mathscr{F} = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} : f \text{ 全纯}, |f(z)| < 2021, f(i) = 0\}.$$

计算 $\sup\{|f(2i)| : f \in \mathscr{F}\}$. $B(0,1) \to$ 上半平面 $\mathbb{H}$

取 $g(z) = \frac{1}{2021}f(i\frac{1+z}{1-z})$ 则 $g: B(0,1) \to B(0,1)$. $g \in H(B(0,1))$. $g(0)=0$. 故由 Schwarz 引理 $|g(z)| \leq |z|$

则 $|f(2i)| = 2021|g(\frac{1}{3})| \leq \frac{2021}{3}$ 等号成立当且仅当 $g(z) = e^{i\theta}z \Rightarrow f(z) = 2021e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$

题目14. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是区域 D 中的解析函数, 且在 D 中满足 $f(z) \cdot g(z) \equiv 0$, 证明: $f(z) \equiv 0$ 或 $g(z) \equiv 0$。 —证 $f \equiv 0$. 用 Taylor 展开. $f^{(n)}(0) \equiv 0$ $\forall n$.

解答. 若存在 $g(z_0) \neq 0$, 则 $f(z_0) = 0$。而

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)} + f^{(n)}g,$$

故由数学归纳法, $f^{(n)}(z_0) \equiv 0$, $n \to 1, 2, 3, \ldots$。 不能直接说整体上成立

由于 $f(x)$ 在 z_0 点解析, 那么在 z_0 某邻域 $|x - z_0| < r$ 中,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv 0.$$

故由解析函数唯一性, $f(x) \equiv 0$。

期末部分

2026.3.29

1.2025

1. (15分) 设 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(2z-1)}$. 分别求 $f(z)$ 在 $\frac{1}{2} < |z| < 1$ 和 $1 < |z| < \infty$ 中的 Laurent 展开式. —对 Laurent 展开. 找 $|z|<1$ 展开即可

$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1}$ $\frac{1}{2}<|z|<1$ 时 $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z(1-\frac{1}{2z})} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2z})^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} z^{-n}$

$|z|>1$ 时 $f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{2z})} = \frac{1}{z}(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{1-n})z^{-n}$

2. (15分) 设 $f(z) = \dfrac{\cot z}{z^2}$. —奇点: 可去. m阶极点. 本性奇点

(1) 求 $f(z)$ 的所有奇点, 并指出其类型 (包含 ∞ 点).

(2) 求 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的留数.

$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 \sin z}$ (1). 奇点为 $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$, ∞. ① 对 $z=0$ 为 $z^2\sin z$ 的三阶零点. $\cos 0 = 1$. 故有 $z=0$ 为三阶极点

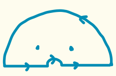
(2). 0 为 3 阶极点. ② 对 $z=k\pi$ $k\neq 0$ 为 $z^2\sin z$ 的 1 阶零点. $\cos k\pi \neq 0$. 故有 $z=k\pi$ 为 1 阶极点

$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{z\cos z}{\sin z})$ ③ 对 $z=\infty$. 取 $w=\frac{1}{z}$. $f(w) = \frac{w^2\cos\frac{1}{w}}{\sin\frac{1}{w}}$ 有无穷多奇点 $n\pi \Rightarrow z=n\pi$ 为奇点. 则 $z=\infty$ 为非孤立奇点

$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2\sin z + 2z\cos z}{\sin^3 z} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2z}{3\sin z\cos z} = -\frac{1}{3}$

3. (20分) 计算下列积分. —留数定理求积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

(1). 转化为 $\frac{z^2+1}{z^4+1}$. 取围道: 

两极点: 有 $\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{\gamma_\varepsilon+\gamma_R} \cdots dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)) + \operatorname{Res}(f, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)))$ 1阶

$\gamma_\varepsilon: |I_\varepsilon| = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varepsilon^2 e^{2i\theta}+1}{\varepsilon^4 e^{4i\theta}+1}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon \to 0$. $\operatorname{Res}(f, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)) = \frac{\frac{1}{2}(1+i)^2+1}{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$

$\gamma_R: |I_R| = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2 e^{2i\theta}+1}{R^4 e^{4i\theta}+1}iRe^{i\theta}d\theta\right| = O(\frac{1}{R}) \to 0$. $\operatorname{Res}(f, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)) = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$

则 $2\int_{\varepsilon}^{R} f dz = 2\pi i \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}\pi$ 令 $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. 有 $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

8. (10分) 设 D_1, D_2 为非全平面的单连通区域, $a \in D_1, b \in D_2$. 设 $f: D_1 \to D_2$ 为单叶全纯函数且 $f(D_1) = D_2$, $f(a) = b$. 若全纯映射 $g: D_1 \to D_2$ 满足 $g(a) = b$, 证明: $|g'(a)| \leq |f'(a)|$. —Riemann 映射定理.

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f} & D_2 \\ & & \downarrow \varphi \\ & & B(0,1) \end{array}$$

由 Riemann 映射定理. $\exists \varphi$. 为共形映射. $\varphi: D_2 \to B(0,1)$, $\varphi(b) = 0$.

由 f 单叶 $\to f^{-1}$ 单叶. 令 $F = \varphi\circ g\circ f^{-1}\circ\varphi^{-1}$ 则 $F \in H(B(0,1))$. $F: B(0,1) \to B(0,1)$. $F(0) = 0$.

由 Schwarz 引理 $|F'(0)| \leq 1$ $F'(0) = \varphi'(b)g'(a)f^{-1\prime}(b)\varphi^{-1\prime}(0)$. 又 $f'(a)\cdot f^{-1\prime}(b) = 1$, $\varphi'(b)\cdot\varphi^{-1\prime}(0) = 1$ $\Rightarrow |g'(a)| \leq |f'(a)|$

Schwarz 对称原理 ① $H(D)\cap C(\bar{D})$ ② $f(D\cap\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

5. (10分) 设 f 为整函数, 且满足 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. 证明: f 为偶函数.

$\mathbb{H}$ 为上半平面. $f|_{\mathbb{H}}$ 全纯连续至边界. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. 由 Schwarz 对称原理. $f|_{\mathbb{H}}$ 开拓至 $\mathbb{C}$ 上的 F.

$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$. 由唯一性定理. $F = f$. $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. 令 $g = f(iz)$. 同理. $g(\bar{z}) = \overline{g(z)} \Rightarrow f(-\bar{z}) = \overline{f(z)}$

故 f 为偶函数

6. (10分) 设 f, g 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 且当 z 不是 f 或 g 的极点时, $|f(z)| < |g(z)|$. 证明: 存在常数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = \alpha g(z)$.

记 $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. 记 K 为 f, g 的极点集合. $\forall z \in \mathbb{C}\setminus K$. $|h(z)| < 1$.

由 Riemann 可去奇点定理知 $\forall z_0 \in K$. h 在 z_0 处全纯或以 z_0 为可去奇点. 则 h 为整函数.

由 Liouville 定理知 $h \equiv \alpha \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$. $f(z) = \alpha g(z)$.

z_0 为 g m 阶零点. $z \to z_0$ 时 $|f(z)| < |g(z)|$. 所以至少为 f 的 m 阶零点

z_0 为 f n 阶极点. $z \to z_0$ 时 $|f(z)| < |g(z)|$. 所以至少为 g 的 n 阶极点

其余情况显然.

2.2024

3. 证明下列命题:

(1) f 为 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数，当 $|z|$ 充分大时有 $|f(z)| = O(|z|^N)$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$。证明：f 为有理函数。

(2) (24 Final) f 是整函数，且存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，当 $|z|$ 充分大时恒有 $|f(z)| \geq |z|^N$。证明：f 是次数不低于 N 的多项式。

(1). $\exists R>0, M>0$. s.t. $|f(z)|\le M|z|^N$ 对 $\forall |z|>R$ 成立. 则 f 的极点在 $\overline{B(0,R)}$ 中

由孤立性知 f 只有有限个极点. 记为 $z_1,\dots,z_n$. 重数为 $k_1,\dots,k_n$.

考虑 $g(z)=f(z)\cdot\prod_{i=1}^n(z-z_i)^{k_i}$ 有 $g\in H(\mathbb{C})$. 则 $|g(z)|=O(|z|^{N+k_1+\dots+k_n})$

由导数估计知 $g(z)$ 为多项式. 故 $f(z)=g(z)\prod_{i=1}^n(z-z_i)^{k_i}$ 为有理函数

$\Downarrow$

$g=O(z^\alpha)$ $\alpha\ge0$ as $z\to\infty$. 证 g 为次数不超过 α 的多项式

: 记 $n=\lfloor\alpha\rfloor+1$. $\exists M>0, R>0$. 对 $\forall$ 满足 $|\zeta-z|\ge R$ 的 ζ 有 $|g(\zeta)|\le M|\zeta|^\alpha$.

故 $|g^{(n)}(z)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\le\frac{Mn!(R+|z|)^\alpha}{R^n}\to0$. 即 $g^{(n)}(z)\equiv0$. 证毕

(2). 设 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ $\exists R>0$. $|z|>R$ 时 $|g(z)|\le|z|^{-N}$. 于是 $g(z)$ 的极点 $z_1,\dots,z_m$ 在 $|z|<R$ 内. 设阶数为 $k_1,\dots,k_m$.

取 $h(z)=g(z)\prod_{i=1}^m(z-z_i)^{k_i}$ 则 $|h(z)|\le|z|^{k_1+\dots+k_m-N}$. 设 $\tilde N=\sum_{i=1}^m k_i-N$, 由 Cauchy 估计: $|h^{(\tilde N+1)}(z)|\le\frac{(\tilde N+1)!\,R^{\tilde N}}{R^{\tilde N+1}}\to0$.

则 $h(z)$ 为 $\tilde N$ 次多项式 $\to g(z)$ 为有理函数 $\to f(z)$ 为有理函数 $\left.\begin{matrix}\\ f(z)\text{为整函数}\end{matrix}\right\}$ f 为多项式. 又 $|z|>R$ 时 $|f(z)|>|z|^N\Rightarrow f(z)$ 次数大于 N. 证毕

6. (10分) 证明：幂级数 $\sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$ 的收敛圆周上每一点都是全纯开拓意义下的奇点.

$\exists N>0$, $n>N$ 时 $a_n>0$. 则收敛半径 R 为奇点.

收敛圆周为 $\partial B(0,1)$. 由于 $a_n=1>0$. 则 $z=1$ 是一个奇点. 取 $\forall k,l\in\mathbb{N}$. 设 $g(z)=f(e^{\frac{l}{2^k}2\pi i}z)=\sum_{n=0}^{k-1}e^{\frac{l}{2^k}2\pi i\cdot2^n}z^{2^n}+\sum_{n=k}^\infty z^{2^n}$

构造无限项与原来一致的函数

于是 $z=1$ 也是 $g(z)$ 的奇点. 则 $e^{\frac{l}{2^k}2\pi i}$ 是 $f(z)$ 的奇点. 若 $\exists z_0\in\partial B(0,1)$ 是正则点. 则 $\exists r>0$. s.t. $B(z_0,r)\cap\partial B(0,1)$ 中点均为正则点.

由于 $e^{\frac{l}{2^k}2\pi i}$ 是稠密的. $\exists k,l$ s.t. $e^{\frac{l}{2^k}2\pi i}\in B(z_0,r)\cap\partial B(0,1)$ 于是矛盾! 证毕.

8. (10分) 设 D 为平面区域，f 为 D 上的全纯函数, z_0 为 f 的 m 阶零点 $(m\geq1)$. 证明：存在 z_0 的邻域 $U\subset D$ 及 U 上的单叶全纯函数 g 使得当 $z\in U$ 时，$f(z)=g(z)^m$.

某邻域内单叶: 此处导数值恒非0.

取 f 的 Taylor 级数: $f=\sum_{k=m}^\infty a_k(z-z_0)^k$. 设 $h(z)=\sum_{k=0}^\infty a_{k+m}(z-z_0)^k$ 则 $f(z)=(z-z_0)^m h(z)$

有 $h(z_0)=a_m\ne0$. 于是 $\exists r_0>0$ $h(z)\ne0$ in $B(z_0,r_0)$ 则 $\exists F\in H(B(z_0,r_0))$, $F^m(z)=h(z)$. 则 $f(z)=[(z-z_0)F(z)]^m$

取 $g(z)=(z-z_0)F(z)$. 有 $g'(z)=F(z)+(z-z_0)F'(z)$. $g'(z_0)=F(z_0)=h(z_0)^{\frac1m}\ne0\Rightarrow\exists U\subset D$ 为 z_0 邻域 s.t. g 为单叶全纯函数且满足 $f(z)=g^m(z)$

9. (10分) 证明：不存在全纯函数 $f:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ 满足对任意 $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|f(z)|\geq\frac{1}{\sqrt{|z|}}$. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 恒非0. 于是 $g=\frac1f$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上全纯.

取 $g=\frac1f$ 则 $|g(z)|\le\sqrt{|z|}$ 0为可去奇点. 于是 g 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上整函数.

$\forall z\in\mathbb{C}$. $R>|z|$. 由 Cauchy 估计: $|g'(z)|\le\frac{\sqrt R}{R}\to0$ as $R\to\infty$. 于是 $g(z)$ 为常数. f 常数. 矛盾

Riemann可去奇点定理

$|g''(z)|\le\frac{2!(R^{\frac32}+R^{\frac12})}{R^2}\to0$.

习题 2.1 (21H 期末) 设 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯, 并且满足

$$|f(z)|\leqslant\sqrt{|z|}+\frac{1}{\sqrt{|z|}},\ \forall z\neq0.$$

证明: f 是常数.

$f(z)=\frac{\alpha}{z}+\beta$

$\Rightarrow\alpha=0$.

想到用整函数

记 $g(z)=zf(z)$. $g\in H(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. $\forall z\ne0$ 有 $|g(z)|\le\sqrt{|z|^3}+\sqrt{|z|}$ 则 g 在 $z=0$ 附近有界

则 $z=0$ 为 g 可去奇点. 则 g 为整函数. 由 Cauchy 估计: $|g''(z)|\le\frac{2!(\sqrt{R^3}+\sqrt R)}{R^2}\to0$ as $R\to\infty$.

故 $g(z)=\alpha+\beta z$ 为线性函数. 则 $f(z)=\frac{\alpha}{z}+\beta$. 又在0附近 $\frac{|\alpha|}{|z|}\le\frac{1}{\sqrt{|z|}}\Rightarrow|\alpha|\le\sqrt{|z|}\to0\Rightarrow\alpha=0$. f 为常数

习题 2.2 (23Yau) 设 f 为整函数, 并且存在 $C>0$ 使得 $|f(z)|\leqslant C\sqrt{|z|}|\cos z|$ 对任意 $z\in\mathbb{C}$ 成立.
证明: f 恒为常数.

设 $g(z)=\frac{f(z)}{\cos z}$, 则 $\frac\pi2+k\pi$ 为 $g(z)$ 的孤立奇点集. 又在奇点附近有 $|g(z)|\le C\sqrt{|z|}$ 是有界的: 是可去奇点.

于是 $g(z)$ 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的整函数. 由导数估计: $|g'(z)|\le\frac{C\sqrt R}{R}\to0$ as $R\to\infty$ 于是 g 是常数. 于是 f 是常数 又 $|f(0)|=0\Rightarrow f\equiv0$ 成立.

习题 2.3 (16 期末) 设 f 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上全纯. 如果 $f\in L^2(B(0,1))$, 证明 $z=0$ 是 f 的可去奇点. 如果要求 $f\in L^p(B(0,1))$, 什么样的 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 能保证结论仍然成立?

—证为可去奇点: ① $\lim_{z\to z_0}f(z)=M$ 有界 ② Laurent展开中 $a_{-n}=0$ $\forall n\ge1$

设 f 在 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上的 Laurent 展开为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^\infty a_nz^n$. 则 $|f(z)|^2=\sum_{n,m=-\infty}^\infty a_n\bar a_m z^n\bar z^m$

对 $\forall\varepsilon>0$. 在圆环 $A_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\mid\varepsilon<|z|<\frac12\}$ 上积分可得 $\int_{A_\varepsilon}|f|^2dxdy=\int_\varepsilon^{\frac12}r^{n+m+1}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n,m=-\infty}^\infty a_n\bar a_m e^{i(n-m)\theta}d\theta\right)dr\overset{\text{一致收敛}}{=\!=}\int_\varepsilon^{\frac12}\sum_{n=-\infty}^\infty2\pi|a_n|^2r^{2n+1}dr=\sum_{n\ne-1}\frac{\pi|a_n|^2}{n+1}\left((\tfrac12)^{2n+2}-\varepsilon^{2n+2}\right)+2\pi|a_{-1}|^2\ln\frac{1}{2\varepsilon}$

又因 $\int_{A_\varepsilon}|f|^2\le\int_{B(0,1)}|f|^2<\infty\Rightarrow a_{-n}=0$ $\forall n\ge1$, 则 $z=0$ 为可去奇点

3.2023

三 (8 分) 证明：$\forall\theta\in(0,2\pi)$,

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\log\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

—分实虚部.

$\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n\theta}{n}=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n}$ $z=e^{i\theta}$

$\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n}\right)'=\sum_{n=0}^\infty z^n=\frac{1}{1-z}$ 于是取 $\mathrm{Arg}\,z=\arg z$ 的分支, 有 $\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n}=-\mathrm{Log}(1-z)$

又 $\log(1-e^{i\theta})=\log(1-\cos\theta-i\sin\theta)=\log2\sin\frac\theta2+i\arctan\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$ 于是 $\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n\theta}{n}=-\log(2\sin\frac\theta2)$

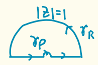
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+a^2}dt,\quad a>0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin(x))^2}{x^2}dx.$$

对三角函数. 化为 e^{iz}

$\sin nx/\cos nx\Rightarrow e^{inz}$

2. 直化为 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$. 取围道:



则 $\int_{\gamma_\rho+\gamma_R}f(z)dz+\int_\rho^R\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx+\int_{-R}^{-\rho}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,ai)$

由 Jordan引理. 因为 $\frac{1}{z^2+a^2}$ 在上半平面连续. $z\to\infty$ 时 $\to0$. 于是 $\int_{\gamma_R}f(z)dz=0$, 又 $|\int_{\gamma_\rho}f(z)dz|\le\int_0^\pi\frac{\rho d\theta}{a^2-\rho^2}\to0$ as $\rho\to0$.

$\mathrm{Res}(f,ai)=\lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{z+ai}=-\frac{e^{-a}}{2a}i$ 则有 $\int_0^\infty\frac{2\cos x}{x^2+a^2}dx=\frac\pi ae^{-a}$ 于是 $\int_0^\infty\frac{\cos t}{t^2+a^2}dt=\frac{\pi}{2a}e^{-a}$

3. $\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos2x}{2x^2}dx=\int_0^\infty\frac{1-\cos2x}{x^2}dx$ 设 $f(z)=\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ 围道同上. 则 $\int_{\gamma_\rho+\gamma_R}f(z)dz+\left(\int_\rho^R+\int_{-R}^{-\rho}\right)\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx=0$

$|\int_{\gamma_R}f(z)dz|\le\int_0^\pi\frac{1+e^{-2R\sin\theta}}{R^2}Rd\theta\le\frac2R\cdot\pi\to0$ as $R\to\infty$

$\int_0^\infty\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx+\int_0^\infty\frac{1-e^{-2ix}}{x^2}dx=2\int_0^\infty\frac{1-\cos2x}{x^2}dx=2\pi$ 于是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\pi$

$\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=\int_{\gamma_\rho}\sum_{n=1}^\infty-\frac{(2iz)^n}{n!z^2}dz=2\pi$ ← 积分方法之一——Taylor展开

4. (20 H) 设 $D=B(0,1)\setminus\{0\}$，$G=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$。证明：不存在从 D 到 G 的双全纯映射。
注：思考题：不存在从 $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ 到 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的双全纯映射。

→构造出有界值域, 用Liouville.

过难, 放弃

易知 $\{z\,|\,|z|>1\}\xleftrightarrow[\text{双全纯映射}]{w=\frac1z}\{z\,|\,0<|z|<1\}$ 若 $\exists$ 双全纯 f. s.t. $\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\{z\,|\,0<|z|<1\}$

则0的邻域内 f 有界 $\Rightarrow$ 0为可去奇点 $\Rightarrow f$ 为有界整函数 $\Rightarrow f$ 常数. 矛盾!

4.2022.

四 （15 分）设 $D=\{z:|z|<2\}$, $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯且满足

(1) 当 $|z|=1$ 时, $|f(z)|$ 为常数;

(2) 当 $|z|<1$时, $f(z)\neq0$.

证明 f 为常值函数.

$g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在 $|z|<1$ 上全纯. 由最大模原理: $|f(z)|\le C$. $|\frac{1}{f(z)}|\le\frac1C\Rightarrow|f(z)|=C.\Rightarrow f(z)=C$.

可由C-R方程推出.

重要方法.

六 （10 分）设 $p(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 在单位圆盘中是单叶的，证明：$|a_n|\leq\frac1n$.

注意到系数为1

单叶一定导数非0

$p'(z)=1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$, 在 $B(0,1)$ 上无根 $\Rightarrow1\le|z_1\cdots z_{n-1}|=|\frac{1}{na_n}|\Rightarrow|a_n|\le\frac1n$

习题 2.8 (22 期末) 证明或否定: 对每个正整数 n, 存在整函数 f_n, 满足

$$\max_{1\leqslant|z|\leqslant2}|\mathrm{Re}\,f_n(z)-\log|z||<\frac1n.$$

由平均值公式. $f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n(re^{i\theta})d\theta$ $\forall r>0$

取 $r=1,2\Rightarrow\mathrm{Re}f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f_n(e^{i\theta})d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac1nd\theta=\frac1n$ 令n充分大矛盾!

$\mathrm{Re}f_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f_n(2e^{i\theta})d\theta>\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln2-\frac1n)d\theta=\ln2-\frac1n$.

5.2021

七 (10分) 设 $f(z)$ 在单位圆盘 D 上全纯，在 $\overline{D}$ 上连续，且在 ∂D 上 $|f(z)| \equiv 1$. 求证 $f(z)$ 为一有理函数.

2. (1). (本题严谨来说不是全纯开拓, 而是亚纯开拓). 定义 $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ 的函数

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & |z|\le 1 \\ \dfrac{1}{\overline{f(\frac{1}{\bar z})}}, & |z|>1 \end{cases}$$

由 f 在 $B(0,1)$ 中全纯可得 F 在 $B(0,1)$ 中全纯, 在 $|z|>1$ 上亚纯. 然后, 任取 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 有

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\|z|>1}} F(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\|z|>1}} \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\bar z})}}=\frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\bar z_0})}}=\frac{1}{\overline{f(z_0)}}=f(z_0)=F(z_0)$$

(最后一步由 $|f(z_0)|=1$ 得到). 所以 F 为连续函数. 由 Painleve 原理可得 F 为 $\mathbb{C}_\infty$ 上的亚纯函数. 即有理函数.

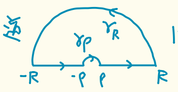
(为什么可以用 Painleve? 因为 $f(z)$ 的零点有限, 故 $F(z)$ 在 $|z|>1$ 中的极点也有限. 从而 $\exists r>1$, s.t. F 在 $\{1<|z|<r\}$ 上全纯. 在 $B(0,r)$ 上对 F 用 Painleve 即可). (从证明过程可以看出, 原函数 f 不需要全纯, 亚纯就足够了).

补充习题

习题 3.1 (20H 期末) 计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$.

由 $\sin x$ 想到用虚部. 则分子用 $iz-e^{iz}$. 但此时 $z=0$ 为奇点. 分子用 $1+iz-e^{iz}$ 令 $z=0$ 为 f 一阶极点

闭围道



$|f(z)| \le \dfrac{1+|z|+1}{|z|^3}$, 由于全纯, 由 Cauchy 定理: $\displaystyle\int_{-R}^{-\rho}+\int_\rho^R+\int_{\gamma_\rho+\gamma_R} f(z)\,dz=0$.

$\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{2+R}{R^3}\cdot\pi R \to 0$ as $R\to\infty$.

注意到 $\dfrac{1+iz-e^{iz}}{z^2}\to\dfrac{1}{2}$ as $z\to 0$. 故做此操作.

$\displaystyle\left|\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz+\frac{1}{2}\pi i\right|=\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{zf(z)-\frac{1}{2}}{z}\,dz\right| \le \pi\rho\cdot\frac{1}{\rho}\sup_{|z|=\rho}\left|zf(z)-\frac{1}{2}\right| \to 0$ as $\rho\to 0^+$　则 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\pi i}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

题 15 (5.2.8). 设 f 在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上全纯. 证明: 若 $\Re f(z)>0$ 对所有 $z\in B(0,R)\backslash\{0\}$ 成立, 则 0 是 f 的可去奇点.

$g(z)$ 在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上全纯.

设 $g(z)=\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$ 则 0 是 g 的孤立奇点. 又 $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ ∴ $|g(z)|<1$ 于是 0 为 g 可去奇点. 则 $\exists A$, $\lim\limits_{z\to 0} g(z)=A$

则有 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\dfrac{1+A}{1-A}$ 则 0 为 f 可去奇点.

1. (**推广的 Liouville 定理**) 设 D 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域. 证明: 若 f 是整函数, 并且 $f(\mathbb{C})\subset D$, 则 f 是常值函数.

$\varphi\circ f:\mathbb{C}\to B(0,1)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & D \arrow[d, "\varphi\text{共形}"] \\ & B(0,1) \end{tikzcd}$$

于是 $\varphi\circ f$ 是全纯有界的. 由 Liouville 定理: $\varphi\circ f\equiv \mathrm{const} \Rightarrow f\equiv \mathrm{const}$