来源：2020复分析H（李思敏老师班）

2024.12.13 晚20:20

注：本笔记中作业部分未全部按布置内容，只选择了较为内容复习所用

第一章. 复数与复变函数

1. 设$|a|<1$，$|z|<1$，证明$\left|\frac{z-a}{1-\bar a z}\right|<1$

证明：$|z-a|^2=(z-a)(\bar z-\bar a)=|z|^2+|a|^2-(a\bar z+\bar a z)$

$|1-\bar a z|^2=1+|a|^2|z|^2-(a\bar z+\bar a z)$

则$|z-a|^2-|1-\bar a z|^2=|z|^2(1-|a|^2)+|a|^2-1=(|z|^2-1)(1-|a|^2)<0$，证毕

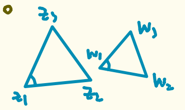
2. (1) z_1,z_2垂直$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar z_2)=0$

(2) z_1,z_2平行$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1\bar z_2)=0$

(1) z_1,z_2垂直$\Leftrightarrow \arg\frac{z_1}{z_2}=\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=it\ (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\Leftrightarrow z_1\bar z_2=it|z_2|^2$

(2) z_1,z_2平行$\Leftrightarrow \arg\frac{z_1}{z_2}=0$或$\pi\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=t\ (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\Leftrightarrow z_1\bar z_2=t|z_2|^2$，证毕

3. (1) $\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$同向相似，证明$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0$



相似$\Leftrightarrow\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\Rightarrow |\cdot|=\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2-z_1 & w_2-w_1 & 0\\ z_3-z_1 & w_3-w_1 & 0\end{vmatrix}=0$

(2) z_1,z_2,z_3共线，证明$\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1\\ z_2 & \bar z_2 & 1\\ z_3 & \bar z_3 & 1\end{vmatrix}=0$

则z_2-z_1与z_3-z_1平行$\Rightarrow \mathrm{Im}\underbrace{(z_3-z_1)(\bar z_2-\bar z_1)}_{w}=0$，$|\cdot|=\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1\\ z_2-z_1 & \bar z_2-\bar z_1 & 0\\ z_3-z_1 & \bar z_3-\bar z_1 & 0\end{vmatrix}=\bar w-w=-2i\,\mathrm{Im}\,w=0$

1.2 定义：$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$　$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$　$B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}$ $r>0$，$a\in\mathbb{C}$　$B(\infty,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}$

1.5 $E\subset\mathbb{C}$为紧致集．若E的任意开覆盖存在有限子覆盖　事实上，$E\subset\mathbb{C}$为紧致集$\Leftrightarrow E$为有界闭集

1.6 区域是连通开集

单连通区域：D中任何简单闭曲线的内部在D中

单连通　二连通　三连通

单连通区域的边界：

∂D 简单闭曲线　∂D 不是简单闭曲线

聚点：若对$\forall r>0$，$B(a,r)$中除a外总有E中的点，称a为E的聚点

1.7 $E\subset\mathbb{C}$是紧致的，$f:E\to\mathbb{C}$连续，则 (1) f在E上有界 (2) $|f|$在E中有最大最小值 (3) f在E上一致连续

第二章. 全纯函数

2.1 f在z_0处可导$\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta z\to0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)\Leftrightarrow f(z_0+\Delta z)=f(z_0)+f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|)$　$\Delta z\to0$

2.2 $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$，$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

定理：f在z_0处可微$\Leftrightarrow f$在z_0处实可微且$\frac{\partial f}{\partial\bar z}(z_0)=0$

定理：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z_0=x_0+iy_0$处可微$\Leftrightarrow u(x,y)$，$v(x,y)$在(x_0,y_0)处可微且在(x_0,y_0)处满足$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ $\boxed{\text{(C-R方程)}}$.

有$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

1. (1) $f(z)=z^n$　(2) $f(z)=|z|^2$

(1) $f'(z)=nz^{n-1}$　(2) $f(z)=z\cdot\bar z$，$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=z$ 于是f在$z\neq0$时不可微

2. (1) $\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}=\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$　(2) $h=g(w)$，$w=f(z)$ 复链式求导？ $\to g(w,\bar w)$　$\to f(z,\bar z)$

(2) $\frac{\partial}{\partial z}(g\circ f)=\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial\bar w}\cdot\frac{\partial\bar f}{\partial z}$

$\frac{\partial}{\partial\bar z}(g\circ f)=\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial f}{\partial\bar z}+\frac{\partial g}{\partial\bar w}\cdot\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}$

3. 设$f:D\to\mathbb{C}$为全纯函数，且$|f|$为常数．$\Rightarrow f$为常数．

证明：对$f=u+iv$，有$u^2+v^2=C\Rightarrow\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\2uu_y+2vv_y=0\end{cases}\xRightarrow{\text{C-R方程}}\begin{cases}u_x=u_y=0\\v_x=v_y=0\end{cases}\Rightarrow u,v$为常数$\Rightarrow f$为常数

2025.2.25

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$

$\bar{z}\cdot z = |z|^2$. $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$. $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

$|z+w| \leq |w| + |z|$

定理一：$E\subset \mathbb{C}$为紧致集$\Longleftrightarrow E$为有界闭集

定理二：$E\subset \mathbb{C}$为紧致集，$F\subset\mathbb{C}$为闭集，若$E\cap F=\phi$，则$d(E,F)=\inf\{|z-w| \mid z\in E, w\in F\}>0$

对$\forall a\in E$，$a\in F^c$（开集），令$\varepsilon_a=\frac{1}{2}d(\{a\},F)>0$，则$\{B(a,\varepsilon_a), a\in E\}$为E的开覆盖，

则有有限子覆盖$\{B(a_i,\varepsilon_{a_i}), 1\leq i\leq n\}$令$\delta=\min\{\varepsilon_{a_i} \mid 1\leq i\leq n\}$

对$\forall z\in E, w\in F$，$\exists 1\leq i\leq n$，s.t. $|z-a_i|<\varepsilon_{a_i}$，$|z-w|\geq|w-a_i|-|a_i-z|\geq 2\varepsilon_{a_i}-\varepsilon_{a_i}=\varepsilon_{a_i}\geq\delta>0$，证毕

定义：称$E_1,E_2\subset\mathbb{C}$是隔离的，若$\bar{E_1}\cap E_2=E_1\cap\bar{E_2}=\phi$

称$E\subset\mathbb{C}$是连通的，若E不能表示为两个非空隔离子集的并

称$E\subset\mathbb{C}$是道路连通的，若对$\forall z_1,z_2\in E$，$\exists\gamma$为连续映射，s.t. $\gamma(0)=z_1$，$\gamma(1)=z_2$.

定理：若$E\subset\mathbb{C}$是道路连通，则E连通

是开集并且连通，则道路连通

设E道路连通而不连通，则存在非空子集E_1,E_2，$E_1\cap\bar{E_2}=\bar{E_1}\cap E_2=\phi$且$E=E_1\cup E_2$

取定$z_1\in E_1$，$z_2\in E_2$，存在$\gamma:[0,1]\to E$，$\gamma(0)=z_1$，$\gamma(1)=z_2$

令$A=\{t\in[0,1] \mid \gamma(s)\in E_1, 0\leq s\leq t\}$ 由$0\in A$知$A\neq\phi$

令$t^*=\sup A$，$\gamma(t^*)\in E=E_1\cup E_2$

设$\gamma(t^*)\in E_1$，则$\gamma(t^*)\in\bar{E_2}^c$（开集）$\exists\varepsilon>0$，$B(\gamma(t^*),\varepsilon)\subset\bar{E_2}^c$，则$\exists\delta>0$，$t^*+\delta\in A$与$t^*=\sup A$矛盾！

$\gamma(t^*)\in E_2$同理矛盾，于是道路连通一定连通

定义：连通开集称为区域，区域一定是道路连通的.

定理：一条简单闭曲线把复平面分为两个区域，一个有界，称为γ内部（$\operatorname{Int}(\gamma)$），一个无界，称其外部

$H(D)=\{f:D\to\mathbb{C}\mid f\text{在}D\text{上全纯}\}$

定理：设 $f=u+iv\in H(D)$，$u,v\in C^2(D)$，则 u,v 为调和函数，即 $\Delta u=\Delta v=0$.

证明：$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0$. $\Delta v=0$ 同理.

注意：$u+iv$ 全纯则 v 为 u 的共轭调和函数，但 u 不一定是 v 的共轭调和函数！

定理：若 $u\in C^2(D)$，$\Delta u=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}$

4. D 为区域，$f:D\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全纯，证明 $\ln|f(z)|$ 调和

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln|f(z)|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ln|f(z)|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ln(f\cdot\bar f)=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\bar f+f\cdot\frac{\partial \bar f}{\partial z}}{|f|^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f}$$

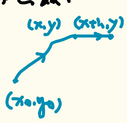
则 $\dfrac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\ln|f(z)|=\cdots=0$

5. $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. $u(z)=\ln|z|$. $u(z)$ 是调和的，但不存在 $u(z)$ 的共轭调和函数.

定理：设 u 为单连通区域 D 上的调和函数，则 u 存在共轭调和函数

要证 $\exists v$. s.t. $v_x=-u_y$，$v_y=u_x$

取定 $(x_0,y_0)\in D$，$\forall(x,y)\in D$，令 $v(x,y)=\int_L -u_y\,dx+u_x\,dy$



有 $\oint -u_y\,dx+u_x\,dy=\iint_\Omega(u_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy=0\Rightarrow v(x,y)$ 为 well-defined

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to0}\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h -u_y\,dx=-u_y\quad\text{同理 } v_y=u_x$$

证明：若 $\exists v$. s.t. $f(z)=u+iv=\log|z|+iv$ 在 D 上全纯.

令 $g(z)=\log(z)+i\arg(z)$ $z\in\Omega=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 可证明 $g(z)$ 在 D 上全纯

则 $f(z)-g(z)$ 在 Ω 上全纯且 $\mathrm{Re}(f-g)\equiv0\Rightarrow f(z)-g(z)=C$ 为常数.

则 $f(z)=\log|z|+i\arg z+C$ $z\in\Omega$.

$f(-1)=\lim\limits_{y\to0^+}f(-1+iy)=i\pi+C$ 而 $f(-1)=\lim\limits_{y\to0^-}f(-1+iy)=-i\pi+C$

矛盾!

作业3：

2. 设 $f\in H(D)$，并且满足下列条件之一：

(1) $\mathrm{Re}\,f(z)$ 是常数；

(2) $\mathrm{Im}\,f(z)$ 是常数；

(3) $|f(z)|$ 是常数；

(4) $\arg f(z)$ 是常数；

(5) $\mathrm{Re}\,f(z)=(\mathrm{Im}\,f(z))^2, z\in D$，

那么 f 是一常数.

设 $f=u+iv$ 有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 成立.

(1). $u\equiv C\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow v\equiv C'$. (2) 同理

(3). $u^2+v^2=c$ $c\in\mathbb{R}$.

$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$ 四方程四未知数可解得 $u\equiv c_1$. $v\equiv c_2$.

(4). 即 $\dfrac{v}{u}$ 是常数，设 $v=\lambda u\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial u}{\partial y}$. $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}$. λ 是实数 $\Rightarrow$ 一定有 $u\equiv c_1$. $v\equiv c_2$

(5). $u=v^2$. $\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=2v\dfrac{\partial v}{\partial x}$. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2v\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 于是一定有 $v\equiv0$ 或 $v\equiv C$ 成立，无论何情况，一定都有 u,v 均为常数

4. 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$，证明 Cauchy–Riemann 方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta},\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}.\end{cases}$$

设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta$ 有四个等式. 可得结果.

5. 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 证明：

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right).$$

$(e^{i\theta})'=ie^{i\theta}$ 可直接求导

即 $z=re^{i\theta}$. $\bar z=re^{-i\theta}$. 有 $\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot e^{i\theta}+\frac{\partial f}{\partial\bar z}\cdot e^{-i\theta}\\ \frac{\partial f}{\partial\theta}&=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot ire^{i\theta}-ir\frac{\partial f}{\partial\bar z}e^{-i\theta}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{1}{2}e^{-i\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial\bar z}&=\frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$

9. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f=u+\mathrm{i}v\in C^1(D)$. 证明：

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|^2.$$

特别地，当 $f\in H(D)$ 时，有

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=|f'|^2.$$

给出上面等式的几何意义.

$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial\bar z}&=\frac{\partial u}{\partial\bar z}+i\frac{\partial v}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{aligned}\right.\Rightarrow$ 代入即可.

$f\in H(D)$ 时 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

有 $f'=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow f'^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2i\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 代入发现相等.

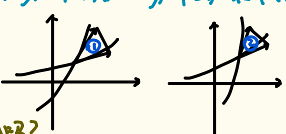
13. 设 u 是域 D 上的调和函数，φ 是 $u(D)$ 上的实函数. 证明：$\varphi\circ u$ 是 D 上的调和函数当且仅当 φ 是线性函数.

证调和. $\Delta f=0$.

$\Delta(\varphi(u))=\dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi'(u)u_x)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi'(u)u_y)=\varphi''(u)(u_x^2+u_y^2)+\varphi'(u)\Delta u=\varphi''(u)(u_x^2+u_y^2)=0\Leftrightarrow\varphi''=0$ 即 φ 为线性函数

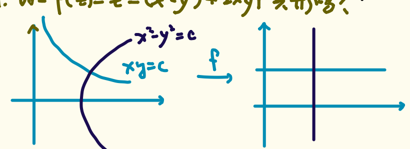
2.3

$f\in H(D)$，则 f 在 z_0 处是保角的.



若①与②相似，称 f 在 z_0 处共形. 注：这不是普遍成立的.

1. $w=f(z)=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$ 共形吗?



共形)

面积的膨胀率：$Jf=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2$

$f'(z)=u_x+iv_x$

2.4

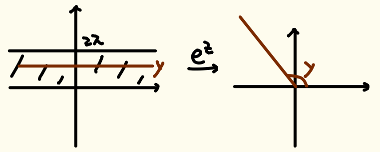
1. $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上是全纯的.

(i) $(e^z)'=e^z$

(ii) $e^{iy}=\cos y+i\sin y$

(iii) $\forall z\in\mathbb{C}$. $e^z\neq 0$. $|e^z|=e^x>0$

(iv) e^z 以 $2\pi i$ 为周期



$\{0<y<2\pi\}\xrightarrow[\text{单叶}]{e^z}\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$

定义: $f: D\to\mathbb{C}$ 是全纯的. 若 $D\subset\Omega$ 且 $f|_D$ 是单射. 则称 f 在 D 上是单叶的. D 称为 f 的一个单叶性域

2. 若 $e^w=z$. $w=\mathrm{Ln}\,z$ $\quad \mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$

证明单叶性域: 取 $f(z_1)=f(z_2)$, 找到 z_1 与 z_2 的关系. 从而由条件不可能满足此关系 ⇒ 矛盾!

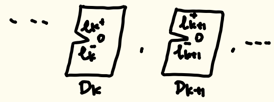
定理: 若 $D\subset\mathbb{C}$ 为单连通区域且 $0\notin D$. 则存在全纯函数 $f: D\to\mathbb{C}$ 满足 $e^{f(z)}=z$ 即 D 上有 $\mathrm{Ln}\,z$ 的单值分支

(需要说明全纯)

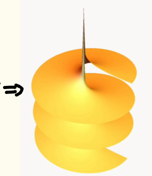
多值函数决定的 Riemann 面

eg. $\mathrm{Ln}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ 为多值函数

单值分支 $w_k:\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ $(k\in\mathbb{Z})$



$\cdots$ D_k, D_{k+1}, $\cdots$ 将 l_k^+ 与 l_{k+1}^- 粘合 $(k\in\mathbb{Z})$ 得到曲面为 S ⇒



则 $\mathrm{Ln}\,z: S\to\mathbb{C}$. $\mathrm{Ln}\,z|_{D_k}=w_k$ 为单值解析函数

定义: 多值函数的支点: 当 z 沿着包围 z_0 的简单闭曲线一周时, 多值函数的值回不到起始值, 称 z_0 为一支点

3. 三角函数

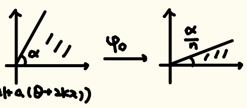
定义: $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$. 注: $\sin z$ 与 $\cos z$ 不是有界的

4. 幂函数 $\quad w=z^\mu$ $\mu\in\mathbb{C}$

(1) $\mu=n$

(2) $\mu=\frac{1}{n}\Rightarrow w=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}=\varphi_k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$

称 $k=0$ 时的 $w=\varphi_0$ 为 $z^{\frac{1}{n}}$ 的主支, 记为 $\sqrt[n]{z}$



(3) $\mu=a+bi\Rightarrow w=e^{\mu\,\mathrm{Ln}\,z}=e^{a\ln|z|-b(\alpha+2k\pi)}\cdot e^{i(b\ln|z|+a(\theta+2k\pi))}$

⇒ ① $b=0$. $a=n\in\mathbb{Z}$ 单值

② $b=0$ $a=\frac{p}{q}$ $q>0$. q-值

③ $b=0$ $a\notin\mathbb{Q}$ 无穷值

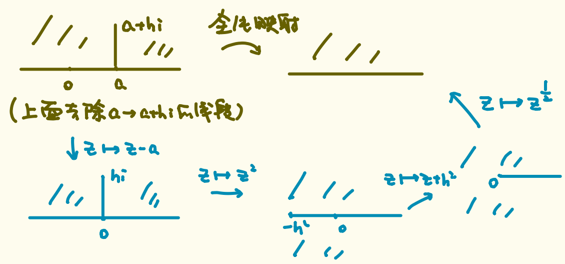
④ $b\neq 0$ 无穷值

注: 一般情况下 $(e^{z_1})^{z_2}\neq e^{z_1z_2}$, 左边一般为多值函数

约定 $\sqrt[n]{z}:\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)\to\mathbb{C}$

$\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Log}(z)+i\theta)}$ $(0\le\theta<2\pi,\ \theta\in\mathrm{Arg}(z))$

1.



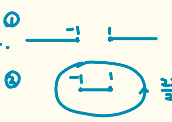
(5) 多值函数 $w=\sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1}\cdots(z-a_m)^{\beta_m}}$

$w=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\beta_i(\ln|z-a_i|+\mathrm{Arg}(z-a_i))}$ $\quad$ 于是 a_i 为支点 ⟺ β_i 不是 n 的倍数

∞ 为支点 ⟺ $\sum_{i=1}^{m}\beta_i$ 不是 n 的倍数

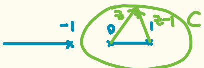
2. $f(z)=\sqrt{z^2-1}$

1, -1 都是支点. ① ② $\frac{2\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}=2\pi$ ✓



3. $f(z)=\mathrm{Ln}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$. 证明在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1)\cup[0,1]$ 上有单值分支

$f(z)=\mathrm{Log}(z+1)+\mathrm{Log}(z-1)-\mathrm{Log}\,z$

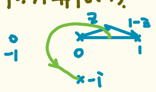


均多值. 则 $-1, 0, 1$ 均为支点. 在此割线下. 只可能有同时绕 $0, 1$ 的简单闭曲线 C 使 $f(z)$ 无单值分支

绕 C 一周时 $\mathrm{Log}(z-1)$ 增加了 $2\pi i$. $\mathrm{Log}\,z$ 也增加 $2\pi i$. 又由于二者相减. 则总体看来 $f(z)$ 的值不变

4. 设 $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot\frac{1}{1+z}$ 以 f 在 $[0,1]$ 上岸取正值的单值全纯分支为 f_0. 计算 $f_0(-i)$

$f(z)=\frac{1}{1+z}e^{\frac{3}{2}\log|1-z|-\frac{1}{2}\log|z|+(\frac{3}{2}\mathrm{Arg}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\,z)i}$



绕 $z=0$ 一周时 辐角增加 $-\frac{1}{2}\times 2\pi=-\pi$ $\quad$ 0 为支点

绕 $z=1$ 一周时 辐角增加 $\frac{3}{2}\times 2\pi=3\pi$ $\quad$ 1 为支点

绕 $z=\infty$ 一周时 辐角增加 $\frac{3}{2}\times 2\pi-\frac{1}{2}\times 2\pi=2\pi$, ∞ 非支点

f 在 $D=\mathbb{C}\setminus\{-1\}\cup[0,1]$ 上有单值分支

可取 $\arg z=0$. $\arg(1-z)=0$.

当 z 沿 l 连续到 $-i$ 时 z 辐角增加 $\frac{3\pi}{2}$, $1-z$ $\cdots$ $\frac{\pi}{4}$

$f_0(-i)=\frac{1}{1-i}e^{\frac{3}{2}\log|1-i|-\frac{1}{2}\log|i|+i(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2})}=2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi}{8}i}$

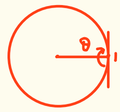
作业4:

3. 设 f 在 $B(0,1)\cup\{1\}$ 上全纯, 并且

$$f\big(B(0,1)\big)\subset B(0,1),\ f(1)=1,$$

证明 $f'(1)\geqslant 0$.

(**提示**: 在 $f'(1)\neq 0$ 的情形下, 证明 $\arg f'(1)=0$.)



θ范围$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$由此得到

在1处必会有 $f(z)=1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)$ 又 $f\in B(0,1)$.

$1>f(z)^2>1+2\mathrm{Re}[f'(1)(z-1)]+o(|z-1|)$, 设 $z-1=re^{i\theta}$. 则 $2\mathrm{Re}[f'(1)re^{i\theta}]+o(r)<0 \xRightarrow{r\to 0} \mathrm{Re}\, f'(1)e^{i\theta}\le 0$.

为了构造Re(z)

设 $\arg f'(1)=\varphi$. 则 $\cos(\varphi+\theta)\le 0$. $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\Rightarrow\varphi=0$. 于是 $\arg f'(1)=0\Rightarrow f'(1)\ge 0$.

15. 称 $\varphi(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 为 **Rokovsky** 函数. 证明下面四个域都是 φ 的单叶性域:

(1) 上半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$;
(2) 下半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z<0\}$;
(3) 无心单位圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$;
(4) 单位圆盘的外部 $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$.

由于直接计算十分复杂, 首先看φ(z)的性质. 有: $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ 当且仅当 $z_1z_2=1$ $\Leftrightarrow$ $|z_1z_2|=1$, $\mathrm{Im}z_1\cdot\mathrm{Im}z_2<0$. (若>0, 虚部一定不为0)

(1),(2)中一定有 $\mathrm{Im}z_1\cdot\mathrm{Im}z_2>0$. (3)(4)中一定有 $|z_1z_2|\neq 1$. 于是均为单叶性域.

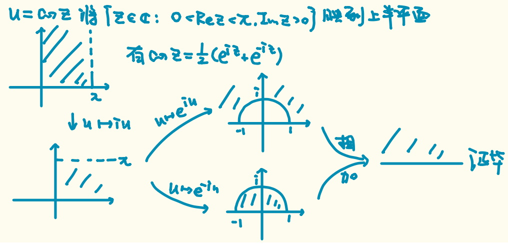
19. 证明: $w=\sin z$ 将半条形域

$$\left\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2},\mathrm{Im}\,z>0\right\}$$

一一地映为上半平面.

即 $u=\cos z$ 将 $\{z\in\mathbb{C}: 0<\mathrm{Re}z<\pi, \mathrm{Im}z>0\}$ 映到上半平面

有 $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$



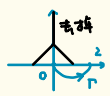
证毕

26. 设 D 是 z 平面上去掉线段 $[-1,\mathrm{i}],[1,\mathrm{i}]$ 和射线 $z=\mathrm{i}t$ ($1\leqslant t<\infty$) 后所得的域, 证明函数 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能在 D 上分出单值全纯分支. 设 f 是满足 $f(0)=0$ 的那个分支, 试计算 $f(2)$ 的值.

Attention: $\mathrm{Ln}(1-z^2)$ 的实部为 $\ln|1-z^2|$

不能先求为 $\ln|1-z|+\ln|1+z|$

$f(z)=\mathrm{Log}(1+z)+\mathrm{Log}(1-z)$ 有支点为 $-1,1,\infty$ 于是D中不存在简单闭曲线γ使 $-1,1$ 在其内部, 可分出单值全纯分支



有 $f(z)=\ln|1-z^2|+i(\arg(1+z)+\arg(1-z)+2k\pi)\Rightarrow f(0)=2k\pi i=0$ 则 $k=0$.

在Γ通过后, $1+z$ 增加辐角为0, 于是有 $f(2)=\ln 3+i(0+\pi)=\ln 3+\pi i$

$1-z$ 增加辐角为π

2.5 分式线性变换

定义: $L(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ $ad-bc\neq 0$ 称为分式线性变换

$c\neq 0$: 除去 $z=-\frac{d}{c}$, $L(z)$全纯, 规定 $L(-\frac{d}{c})=\infty$, $L(\infty)=\frac{a}{c}$

$c=0, d\neq 0$: $L(z)=Az+B$ 为整函数, 规定 $L(\infty)=\infty$

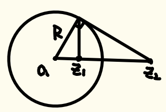
$L(z)$的反函数, $z=L^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$

$\Big\}$ $L(z):\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ 一一对应

$c=0$时 $L(z)=Az+B$ $(A=re^{i\theta})$ 可以分解为 $z_1=e^{i\theta}z$ (旋转) $z_2=rz_1$ (伸缩) $z_3=z_2+B$ (平移)

$c\neq 0$时 $L(z)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$

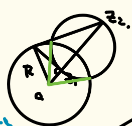
$w=\frac{1}{z}$ (反演) 分解为 $z_1=\frac{1}{\bar{z}}$ (对称) $w=\bar{z_1}$ (对称)



定义: 设γ为 $|z-a|=R$. 若 $z_2-a=\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}$ 则称 z_1,z_2 关于γ对称. 圆心a与∞对称

易知 $|z_1|=\lambda|z_2|$ 时 $|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$

命题: 过圆周γ的两对称点 z_1,z_2 的任意圆周与γ正交



过a作 z_1z_2 所在圆 γ' 的切线, 切点为 z'.

由切割线定理知 $|z'-a|^2=|z_1-a||z_2-a|=R^2\Rightarrow z'\in\gamma$, 证毕

则 $|(z-z_1)-k^2(z-z_2)|=k|z_1-z_2|$

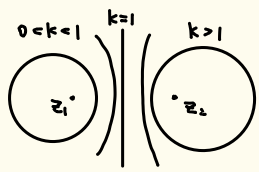
$\Rightarrow \left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k}{1-k^2}|z_1-z_2|$

圆周的表示:

(1) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ $(z_1,z_2\in\mathbb{C})$

(i) $k\neq 1$时, $|z-z_1|=k|z-z_2|$ 圆心为 $a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$ 且 z_1,z_2 为γ的对称点

(ii) $k=1$ 时, 直线, 也可视为 $\mathbb{C}_\infty$ 中的圆周



(2) $\gamma:|z-a|=R$, z_1,z_2 为γ对称点, 则有 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{|z_1-a|}{R}=k$ (γ')

定理(Apollonius圆): $\mathbb{C}_\infty$ 中的任意圆周可以表示为 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ $(k>0)$ 其中 z_1,z_2 为圆周的对称点

定理: 分式线性变换将圆周映为圆周, 将对称点映为对称点

$\gamma:\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 将 $z=f^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$ 代入, 即可

命题: $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=z$ 最多有两个解, 除非 $f=id$

给定 z_2,z_3,z_4, 将 z_2,z_3,z_4 映为 $0,1,\infty$ 的分式线性变换为 $L^*(z)=\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$

定义: z_1,z_2,z_3,z_4 的交比为 $(z_1,z_2,z_3,z_4)=L^*(z_1)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$, 如 $(z,0,1,\infty)=z$

定理: 分式线性变换保交比不变.即$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(L(z_1),L(z_2),L(z_3),L(z_4))$

设$w_i=L(z_i)$ 有 $L^*\circ L^{-1}$ 将w_2,w_3,w_4映为$0,1,\infty$ $\quad$ $z_2,z_3,z_4\xrightarrow{L^*}0,1,\infty$, $z_2,z_3,z_4\xrightarrow{L}w_2,w_3,w_4$

则$(w_1,\cdots,w_4)=L^*\circ L^{-1}(w_1)=L^*(z_1)=(z_1,\cdots,z_4)$

$w=L(z)$ (1) $|z|<1$映到$|w|<1$ $\quad L(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

(2) 将$\operatorname{Im}z>0$映为$|w|<1$ $\quad L(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$

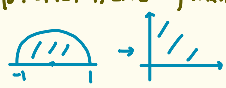
将实轴映到$|w|=1$, 设$\operatorname{Im}\alpha>0$, $L(\alpha)=0\overset{\text{对称点}}{\Longrightarrow}L(\bar{\alpha})=\infty$ $\quad L(z)=\lambda\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ $\quad 1=L(1)=|\lambda|\cdot1=|\lambda|$ 则$\lambda=e^{i\theta}$

(3) 将$\operatorname{Im}z>0$映为$\operatorname{Im}w>0$

将实轴映到实轴,由于保交比不变, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$\bar{w}=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $\quad w-\bar{w}=\dfrac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}$ $(z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z)$ 由$\operatorname{Im}w>0\Rightarrow ad-bc>0$. 于是$L(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$且$ad-bc>0$

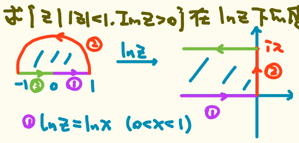
1. 将$\{z\mid |z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$映为第一象限的共形映射.



$-1,0,1$ 映为$0,1,\infty$的分式线性变换为$f(z)=\dfrac{z+1}{1-z}$, 则$(-1,1)\mapsto$正半实轴

又$|z|=1$与$(-1,1)$正交$\Rightarrow f(\gamma)$与正实轴正交,又$f(i)=i\Rightarrow f(\gamma)$为正虚轴

2. 求$\{z\mid |z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$在$\ln z$下的像

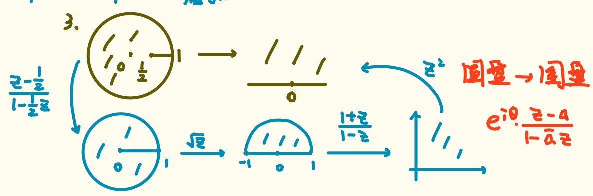


① $\ln z=\ln x\quad(0<x<1)$

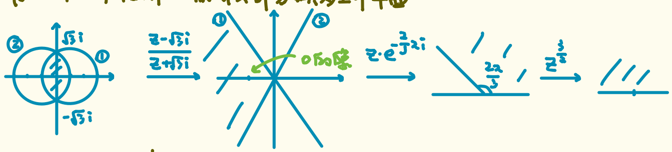
② $\ln z=\ln|z|+i\theta=i\theta\quad(0<\theta<\pi)$

③ $\ln z=\ln|x|+i\pi\quad(-1<x<0)$

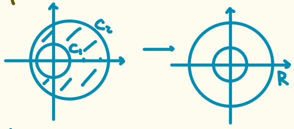
3.



4. 将$|z-1|<2$和$|z+1|<2$的公共部分映为上半平面



5. 将$|z|=1$与$|z-1|=\frac{5}{2}$所围成的区域映为$1<|w|<R$并求R



设z_1,z_2为C_1,C_2的对称点$\Rightarrow z_1,z_2,0,1$共线.$\Rightarrow z_1,z_2\in\mathbb{R}$

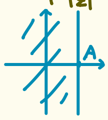
$\begin{cases}z_1z_2=1\\(z_1-1)(z_2-1)=\frac{25}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=-\frac{1}{4}\\z_2=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}z_1=-4\\z_2=-\frac{1}{4}\end{cases}$

令$f(z)=\lambda\dfrac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$ $\quad 1=|f(1)|=|\frac{\lambda}{4}|$ $\quad\lambda=4e^{i\theta}\Rightarrow f(z)=e^{i\theta}\dfrac{4z+1}{z+4}$ $\quad R=|f(\frac{3}{2})|=2$

6. $f\in H(B(0,1))$ $f(0)=0$. $\exists A>0$. $\operatorname{Re}f(z)\le A$ $\forall z\in B(0,1)$, 证明$|f(z)|\le\dfrac{2A|z|}{1-|z|}$ $\forall z\in B(0,1)$

遇到单位圆且首先想Schwarz引理
(条件: $B(0,1)\to B(0,1)$)

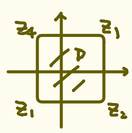
构造$\varphi:\Omega\to B(0,1)$, 期望: 对称点 $\begin{smallmatrix}0\\2A\end{smallmatrix}$ → 新对称点 $\begin{smallmatrix}0\\\infty\end{smallmatrix}$



$\varphi(z)=\dfrac{z}{z-2A}$ 即可. 则$g=\varphi\circ f:B(0,1)\to B(0,1)$ 且$g(0)=0$.

则由Schwarz引理: $|g(z)|\le|z|$ 即$\dfrac{|f(z)|}{|f(z)-2A|}\le|z|\Rightarrow|f(z)|\le\dfrac{2A|z|}{1-|z|}$

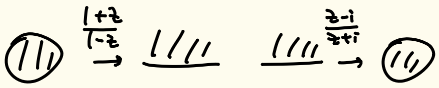
7. $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$. $M=\sup\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|$ $\quad m=\sup\limits_{z\in[z_1,z_2]}|f(z)|$ 证明$|f(0)|\le m^{\frac{1}{4}}M^{\frac{3}{4}}$



令$F(z)=f(z)f(iz)\cdot f(-z)\cdot f(-iz)$ 则$F\in H(D)\cap C(\bar{D})$.

对$\forall z\in\partial D$. z,iz,i^2z,i^3z至少有一个在线段$[z_1,z_2]$中$\Rightarrow\max\limits_{z\in\partial D}|F(z)|\le mM^3$

由最大模原理可知: $|F(0)|=|f(0)|^4\le mM^3\Rightarrow|f(0)|\le m^{\frac{1}{4}}M^{\frac{3}{4}}$ 证毕



第三章 Cauchy积分理论

3.1 积分不依赖于曲线的积分表示

命题: 设$f=u+iv$在γ上连续,则$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma(udx+vdy)$ $\quad\Big(f(z)dz=(u+iv)(dx+idy)=udx-vdy+i(udx+vdy)\Big)$

1. $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{(z-a)^n}$ $n\in\mathbb{Z}$ $\gamma:|z-a|=r$

γ的参数方程: $z=a+re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le2\pi)$. 原式$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{r^ne^{in\theta}}d\theta=ir^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i & n=1\\0 & n\neq1\end{cases}$

注: $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)|z_k-z_{k-1}|\longrightarrow\int_\gamma f(z)|dz|$. $|dz|=ds$弧长微元. $\int_\gamma f(z)|dz|=\int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$

γ的弧长 $=\int_\gamma |dz| = \int_a^b |z'(t)|\,dt$

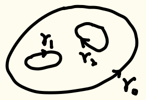
$\int_\gamma f(z)\,d\bar z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\overline{z_k - z_{k-1}}) = \int_a^b f(z(t))\cdot\overline{z'(t)}\,dt$

命题: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz|$

3.2 Cauchy-Goursat定理: $D\subset\mathbb{C}$. D单连通!!! $f\in H(D)$, 设 $\gamma\subset D$ 且γ内部在D中, 则 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

定理: 设D是可求长闭曲线γ的内部, 有 $f\in H(D)\cap C(\overline D)$ 时 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

定理: D的边界由 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 组成



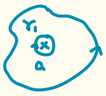
$\gamma=\gamma_0\cup\gamma_1^-\cup\cdots\cup\gamma_n^-$. $f\in H(D)\cap C(\overline D)$ 则 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

2. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为区域 $f:D\to\mathbb{C}$ 连续且有原函数 $F(z)$. 则对D中任意分段光滑的曲线 $\gamma: z=z(t)\ a\le t\le b$, 有 $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z(b))-F(z(a))$

证明: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b (F(z(t)))'\,dt = F(z(t))\Big|_a^b$ 证毕

3. $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ $a\notin\gamma$

① $\overset{\times}{a}$  γ $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=0$ (因为 $\frac{1}{z-a}$ 在此时全纯)

②  γ 有 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i$

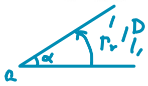
4. $\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$ $(|a|\ne r)$

$|z|=r$ 时 $|dz| = r\,d\theta = \frac{r}{iz}dz$ $(dz = ire^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta)$

原积分: $I = \int_{|z|=r}\frac{\frac{r}{iz}dz}{(z-a)(\bar z-\bar a)} = \int_{|z|=r}\frac{-i\cdot\frac{r}{r^2-|a|^2}}{z-a}dz + \int_{|z|=r}\frac{-i\frac{\bar a r}{r^2-|a|^2}}{r^2-\bar a z}dz = \frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}$

12. 设 $D=\{z\in\mathbb{C}:\theta_0<\arg(z-a)<\theta_0+\alpha\}$ $(0<\alpha\le 2\pi)$, f 在 $\overline D\setminus\{a\}$ 上连续. 证明:

(1) 如果 $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in\overline D\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=A$, 那么



$$\lim_{r\to0}\int_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline D}} f(z)\,dz = i\alpha A;$$

设 $\varphi(z)=(z-a)f(z)-A$, 则 $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=0$. $f(z)=\frac{A}{z-a}+\frac{\varphi(z)}{z-a}$

$\int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\frac{A}{re^{i\theta}}re^{i\theta}\cdot i\,d\theta = i\alpha A$ 不要忘记.

$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\varphi(z)}{z-a}dz\right| \le \int_{\Gamma_r}\left|\frac{\varphi(z)}{z-a}\right||dz| \le \sup\limits_{z\in\Gamma_r}|\varphi(z)|\cdot\frac{\alpha r}{r}\to 0$ $(r\to0)$

$|\varphi(z)|\le\sup\limits_{z\in\Gamma_r}|\varphi(z)|$ $\frac{1}{|z-a|}=\frac{1}{r}$

$\int_{\Gamma_r}|dz| = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}|dz| = \alpha$

作业5:

5. 计算积分 $\int_{|z|=r} z^n\bar z^k\,dz$, 其中, n,k 为整数.

设 $z=re^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi]$

$\int_{|z|=r} z^n\bar z^k\,dz = \int_0^{2\pi} ir^{n+k+1}e^{i(n-k+1)\theta}\,d\theta = \begin{cases}-r^{2k}\cdot2\pi & n=k-1\\ 0 & n\ne k-1\end{cases}$

9. 设 γ 是正向可求长简单闭曲线, 证明: γ 内部的面积为

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar z\,dz.$$

由Green公式, 面积可表示为 $S=\int_\gamma x\,dy-y\,dx$

代入 $x=\frac12(z+\bar z)$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar z)$

$S=\frac12\int_\gamma (z+\bar z)dy+i(z-\bar z)dx = \frac12\int_\gamma z(dy+idx)+\bar z(dy-idx)$

$=\frac{1}{2i}\int_\gamma -z(dx-idy)+\bar z(dx+idy) = \frac{1}{2i}\int_\gamma(\bar z\,dz - z\,d\bar z)$

由z在γ内是全纯的, 则 $\int_\gamma z\,d\bar z=0$.

于是有 $S=\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar z\,dz$ 成立

11. 设 f 在 z_0 处连续, 证明:

(1) $\lim\limits_{r\to0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta = f(z_0)$;

(2) $\lim\limits_{r\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$.

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $|r|<\delta$ 时 $|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|<\varepsilon$, $\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0))\,d\theta\right|<\varepsilon\Rightarrow$ 证毕

(2). 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $|r|<\delta$ 时 $|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|<\varepsilon$

$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$ 由(1)知为 $f(z_0)$

13. 设 D 是域, $f\in C^1(D)$. 证明: f 在 D 上全纯的充分必要条件是对任意 $a\in D$, 均有

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = 0.$$

$\Rightarrow$) 对 $\forall a\in D$. 由D开集, $\exists r>0$. $B(a,r)\subset D$. 于是 $\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz=0$.

$\Leftarrow$) 设 $f=u+iv$. 则 $\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-a|=r}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{|z-a|=r}(u\,dy+v\,dx) = \iint_{B(a,r)}(-u_y-v_x)+(u_x-v_y)i\,dx\,dy$ (Green公式)

于是 $\lim\limits_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(a,r)}(-u_y-v_x)+i(u_x-v_y)\,dx\,dy=0 \Rightarrow u_y=-v_x$. $u_x=v_y$ 于是f满足C-R方程, 在D上全纯, 证毕

3.3 全纯函数的原函数

不是所有全纯函数都有原函数.

如 $f(z)=\frac{1}{z}$ $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 若有原函数, 则 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=0$ 与 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i$ 矛盾.

构造原函数的方法: 变上限积分

定理: 设 $f:D\to\mathbb{C}$ 连续, 若对 D 中任意闭曲线 γ, $\int_\gamma f(z)dz=0$, 则 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数, 其中 $z_0\in D$

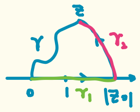
推论: 若 D 单连通, $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯, 则 f 有原函数

注: 若 D 多连通, $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ 可能是一个多值函数

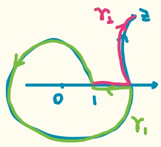
1. 对于 $f(z)=\frac{1}{z}$ $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_0=1$

① $\int_\gamma \frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz+\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz=\int_1^{|z|}\frac{1}{z}dz+\int_0^{\arg z}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}}id\theta$

$=\log|z|+i\arg z$



② $\int_{\gamma'}\frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz+\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz=\log|z|+i(\arg z+2\pi)$



$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i\cdot f(z_0)$$

定理: D 单连通且 $0\notin D$, 则 D 中存在 $\operatorname{Log} z$ 的单值分支 $F(z)$

推广: D 单连通且 $0\notin D$, $f\neq 0$ 为 D 上全纯函数, 则 D 中存在 $\operatorname{Log} f(z)$ 的单值分支

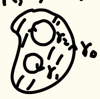
3.4 Cauchy 积分公式

定理: $D=\operatorname{int}\gamma$, $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$ 对 $\forall z\in D$, $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ ↗ $\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$

定理: $D=\operatorname{int}\gamma$, $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$, 则 f 有任意阶导数且 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ $n=0,1,2,\cdots$, $\forall z\in D$

定理: γ 是若干条闭曲线, $D=\operatorname{int}\gamma$, 上述定理仍成立

推论: 全纯函数有任意阶导数, 全纯函数的导函数也是全纯的

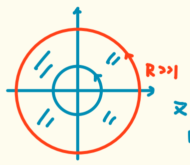


2. $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z^2+16)}$

解一: $I=\int_{|z|=2}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2+16}\right)dz=0$ ($n=2$; 全纯)

解二: $f(z)=\frac{1}{z^2+16}\Rightarrow I=\frac{2\pi i}{1!}f'(0)=0$

3. $I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}$



$\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}-I=2\pi i\left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\Big|_{z=-4}=-\frac{32}{1323}\pi i$

又 $\left|\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}\right|=O\left(\frac{1}{R^4}\right)\to 0$ $(R\to+\infty)$ 于是 $I=\frac{32}{1323}\pi i$

3.5 Application

定理一 (Cauchy 不等式): 设 f 在 $B(a,R)$ 上全纯, 且对 $\forall z\in B(a,R)$, $|f(z)|\le M$, 则 $|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!M}{R^n}$

$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{n!M}{r^n}$ 令 $r\to R$ 即可

定理二 (Liouville): 有界整函数必为常数 (整函数在复平面上处处解析)

对 $\forall a\in\mathbb{C}$, $R>0$. 由定理一知 $|f'(a)|\le\frac{M}{R}$ 令 $R\to\infty\Rightarrow f'(a)\equiv 0\Rightarrow f'\equiv 0\Rightarrow f$ 为常数

定理三 (代数学基本定理): 任意非常数的复系数多项式 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点

证明: 若无零点, $f(z)=\frac{1}{P(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 由 $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty\Rightarrow\exists R>0$, s.t. $|z|>R$ 时 $|f(z)|\le 1$

f 在 $|z|\le R$ 上连续, 则 $\exists M>0$, s.t. $|f(z)|\le M$ 则 f 有界整函数 $\Rightarrow f\equiv\text{const}$. 矛盾!

定理四 (Morera): f 为 D 上连续函数, 沿 D 中任意可求长闭曲线积分为 0, 则 f 在 D 上全纯

4. f 在 $r<|z|<\infty$ 上全纯, $\lim_{z\to\infty}zf(z)=A$, 证明 $\int_{|z|=R}f(z)dz=2\pi iA$

证明: 记 $zf(z)-A=\varphi(z)$, $\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=0$. $f(z)=\frac{A}{z}+\frac{\varphi(z)}{z}$

$\forall R>r$. $\int_{|z|=R}f(z)dz=2\pi iA+\int_{|z|=R}\frac{\varphi(z)}{z}dz\overset{\forall R'>R}{=\!=}2\pi iA+\to 0=2\pi iA$

5. D 为凸域, f 在 D 上全纯, $\forall z\in D$, $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 证明 f 为单叶函数 → $\forall z_1\neq z_2$, $f(z_1)\neq f(z_2)$

证明: $\forall z_1,z_2\in D$, $z_1\neq z_2$, γ: $z=z(t)=tz_2+(1-t)z_1$, $0\le t\le 1$ 常用的

$f(z_2)-f(z_1)=\int_\gamma f'(z)dz=\int_0^1 f'(z(t))z'(t)dt=(z_2-z_1)\int_0^1 f'(z(t))dt\neq 0$

$\operatorname{Re}\int_0^1 f'(z(t))dt=\int_0^1\operatorname{Re}f'(z(t))dt>0$

1. 设 f 为整函数, 且 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z>0\}$, 证明 f 为常值函数.

$g(z)=\frac{1}{f(z)-(-i)}=\frac{1}{f(z)+i}$ 有 $|g(z)|<1$ 且 $g(z)$ 为整函数 $\Rightarrow g\equiv$ 常数 $\Rightarrow f$ 为常数.

2. 设 f 为整函数, $f(z+i)=f(z)$, $f(z+1)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 则 $f(z)$ 为常数.

取 $[0,1]\times[0,1]$, 由 f 为整函数 $\Rightarrow f$ 在其中有最大值, 且全平面上最大值由周期性知在此取得, 于是为常数.

推论：设 $u(x,y)$ 为 $B(a,R)$ 中调和函数，则 $u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$

$B(a,R)$ 为单连通域 $\Rightarrow$ ∃共轭调和 v，令 $f=u+iv$，f 满足上面等式，取 Re 即可

Schwarz 积分公式：设 $f=u+iv$ 在 $B(0,R)$ 中全纯，在 $\overline{B(0,R)}$ 上连续，则对 $\forall z\in B(0,R)$，有 $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}u(Re^{i\theta})d\theta+iv(0)$

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\overset{\zeta=Re^{i\theta}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-z}d\theta$ …①

考虑 z 关于 $\partial B(0,R)$ 的对称点：$0=\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\frac{R^2}{\bar z}}d\zeta=\int_{|\zeta|=R}\frac{\bar z f(\zeta)}{\zeta(\bar z-\bar\zeta)}\underbrace{d\zeta}_{\zeta i d\theta}\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{\bar z f(\zeta)}{\bar\zeta-\bar z}=0$ 取共轭：$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{z\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}=0$ …②

①+② 即可

作业 6：

2. 设 f 是整函数，如果当 $z\to\infty$ 时，$f(z)=O(|z|^{\alpha}),\alpha\geq 0$，证明 f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式.

只需证 $f^{(n)}(z)\equiv 0$　$n=[\alpha]+1$ ⟶ 略

3.6 最大模原理与 Schwarz 引理

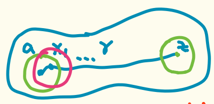
定理（平均值公式）设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，则对 $\forall\, 0<r<R$，有 $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$

$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta\xlongequal{\zeta=a+re^{i\theta}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$

定理：设 f 为域 D 上的非常值全纯函数，则 $|f(z)|$ 在 D 上取不到最大值.

证一：设 $M=\sup_{z\in D}|f(z)|$ 记 $\Omega_1=\{z\in D\mid f(z)=M\}$，$\Omega_2=\{z\in D\mid f(z)<M\}$　$D=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$

claim：Ω_1 为开集，由于 D 为单连通域 $\Rightarrow\Omega_1,\Omega_2$ 有1个为空集 $\Rightarrow$ 若 $\Omega_2=\phi$，f 为常数矛盾！$\Rightarrow\Omega_1$ 为空集　则 $D=\Omega_2$



证二：claim：若 $\exists\, a\in D$，$|f(a)|=M$，$\exists\,\delta>0$ 且 $B(a,\delta)\subset D$，则 $|f(z)|=M$　$z\in B(a,\delta)$

由平均值公式：$M=|f(a)|=|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|d\theta\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(M-|f(a+re^{i\theta})|)d\theta\leq 0$ 且 $M\geq|f(a+re^{i\theta})|$ 且关于 θ 连续 $\Rightarrow M\equiv f(a+re^{i\theta})$　滚圆法

取简单闭曲线 γ 连接 a 与 z，设 $\rho=d(\gamma,\partial D)>0$，在 γ 上取 $z_1,\cdots z_n=z$ s.t. $|z_{k+1}-z_k|<\rho$ 有 $|f(z_1)|=M,\cdots|f(z_n)|=M\Rightarrow\forall z\in D$，$|f(z)|=M$，$f(z)$ 为常数，矛盾！

定理：$D\subset\mathbb{C}$ 为有界域，$f\in H(D)\cap C(\bar D)$，f 非常值，则 f 的最大模在 ∂D 上取到.

一定有界域，若无界：$f(z)=e^{e^z}$　$z\in D=\{z\mid|\mathrm{Im}z|<\frac{\pi}{2}\}$　当 $z\in\partial D$　$z=x\pm i\frac{\pi}{2}$　$e^z=\pm ie^x\Rightarrow|e^{e^z}|=|e^{\pm ie^x}|=1$

当 $z=x\in\mathbb{R}$，则 $|e^{e^x}|\to+\infty$ as $x\to+\infty$

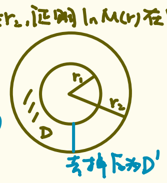
1. 用最大模原理证明代数学基本定理

$p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_n\neq 0)$ 若 $p(z)\neq 0$　$\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow\frac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$\lim_{z\to\infty}|p(z)|=+\infty\Rightarrow\exists R>0$，$\forall|z|=R$，$|p(z)|>|p(0)|\Rightarrow\frac{1}{|p(z)|}<\frac{1}{|p(0)|}$ 与在 ∂D 上取最大值矛盾！

2.（Hadamard 三圆定理）$f\in H(D)\cap C(\bar D)$　$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$　$r_1\leq r\leq r_2$，证明 $\ln M(r)$ 在 $[r_1,r_2]$ 上是 $\ln r$ 的凸函数

即 $\ln M(r)\leq\frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_1)+\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_2)$



设 $s=\frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}$，$1-s=\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}$　只需证 $\ln M(r)\leq s\ln M(r_1)+(1-s)\ln M(r_2)$

取 $\alpha\in\mathbb{R}$ s.t. $r_1^{\alpha}M(r_1)=r_2^{\alpha}M(r_2)$

若对 $\forall r\in(r_1,r_2)$ 有 $M(r)r^{\alpha}\leq M(r_1)r_1^{\alpha}\Rightarrow\ln M(r)+\alpha\ln r\leq\ln M(r_1)+\alpha\ln r_1\Rightarrow\ln M(r)\leq s\ln M(r_1)+(1-s)\ln M(r_2)$

考虑 $F(z)=|z|^{\alpha}|f(z)|$，则 $\max_{|z|=r_1}F(z)=\max_{|z|=r_2}F(z)\triangleq A$，下证 $\max_{z\in\bar D}F(z)=A$

若不然，$\exists z_0\in D$ s.t. $F(z_0)=\sup\{F(z):z\in D\}>A$，在 D' 中 $z^{\alpha}f(z)$ 有单值分支，z_0 处取最大值，矛盾！证毕

3. $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯，非常值，无零点，$\Rightarrow|f(z)|$ 在 D 中取不到最小值

证：$\frac{1}{f(z)}$ 在 D 中全纯，非常值，由最大模原理可知.

定理（Schwarz 引理）$f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯且 $f(0)=0$，则 (i) $|f(z)|\leq|z|$（这里 $|z|<1$） (ii) $|f'(0)|\leq 1$ (iii) 若 $\exists z_0\neq 0\in D$，$|f(z_0)|=|z_0|$ 或 $|f'(z_0)|=1$，则 $\exists\theta\in\mathbb{R}$，$f(z)=e^{i\theta}z$

$f(0)=0\Rightarrow f(z)=a_1z+\cdots=z(a_1+a_2z+\cdots)=z\,g(z)$，$g(z)$ 全纯且 $g(0)=a_1=f'(0)$

由最大模原理，当 $|z|=r$ $(0<r<1)$　$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}\leq\frac{1}{r}\Rightarrow|z|<r$ 时 $|g(z)|\leq\frac{1}{r}$，令 $r\to 1$ 即有 $|f(z)|\leq|z|$，$|f'(0)|\leq 1$

若 $\exists z_0\in B(0,1)$ $z_0\neq 0$，$|f(z_0)|=|z_0|\Rightarrow|g(z_0)|=1\Rightarrow g(z)\equiv c$，$|c|=1$　记 $c=e^{i\theta}$，则 $f(z)=e^{i\theta}z$（$|f'(z_0)|=1$ 同理）

定义：$D\subset\mathbb{C}$ 为区域，若 $f:D\to D$ 单叶全纯，$f(D)=D$，则称 f 为 D 上的一个全纯自同构，D 中全纯自同构的全体构成全纯自同构群，记为 $\mathrm{Aut}(D)$

设 $|a|<1$，记 $\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\bar az}$　$B(0,1)\to B(0,1)$　$\varphi_a(0)=a$，$\varphi_a(a)=0$，$\varphi_a\circ\varphi_a(z)=z\Rightarrow\varphi_a^{-1}=\varphi_a$ 于是 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$

定理：$\mathrm{Aut}(B(0,1))=\{f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar az}\mid\theta\in\mathbb{R},|a|<1\}$

定理（Schwarz-Pick）设 $f(z):B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，$\exists a\in B(0,1)$，$f(a)=b$，则

(i) $\forall z\in B(0,1)$　$|\varphi_b\circ f(z)|\leq|\varphi_a(z)|$

(ii) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{1}{1-|z|^2}$

(iii) 若 $\exists z_0\in B(0,1)$，(i)，(ii) 中取等，则 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$

证明：令 $g=\varphi_b\circ f\circ\varphi_a^{-1}$（事实上 $\varphi_a^{-1}=\varphi_a$），则 $g(0)=0$.

(1) 由 S-引理，$|g(z)|<|z|$，令 $z=\varphi_a(w)$，则 $|\varphi_b\circ f(w)|\leq|\varphi_a(w)|$

(2). 由 S-引理，$|g'(0)|\leq 1$　$g'(0)=\varphi_b'(b)\cdot f'(a)\cdot\varphi_a'(0)$，有 $\varphi_a'(z)=\frac{|a|^2-1}{(1-\bar az)^2}$，于是 $g'(0)=\frac{|a|^2-1}{|b|^2-1}$　由于 $z=a$，$f(z)=b$ 任取，于是 $f'(z)\leq\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$

(3). 等号成立，$g(z)=e^{i\theta}z\Rightarrow f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$

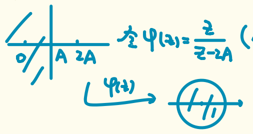
4. $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$　$M=\max_{|z|=R}|f(z)|$　证明：

若 $z_0\neq 0$ 是 $f(z)$ 的零点，则 $|f(0)|\leq\frac{M}{R}|z_0|$

最大模 $\Rightarrow f(B(0,R))\subset B(0,M)$　令 $g(z)=\frac{1}{M}f(zR)$：$B(0,1)\to B(0,1)$　$g(\frac{z_0}{R})=0$　$g\circ\varphi_{\frac{z_0}{R}}(0)=0$

S-引理 $\Rightarrow|g\circ\varphi_{\frac{z_0}{R}}(z)|\leq|z|$　令 $z=\varphi_{\frac{z_0}{R}}(w)\Rightarrow|g(w)|\leq|\varphi_{\frac{z_0}{R}}(w)|$　令 $w=0\Rightarrow|\frac{1}{M}f(0)|\leq\frac{|z_0|}{R}$　证毕

5. $f\in H(B(0,1))$. $f(0)=0$. 并且 $\exists A>0$. $\mathrm{Re}f(z)<A$. 证明 $|f(z)|\le\frac{2A|z|}{1-|z|}$ $\forall |z|<1$



令 $\varphi(z)=\frac{z}{z-2A}$ $(0\mapsto 0,\ 2A\mapsto\infty)$ 则 $g=\varphi\circ f$ 为 $B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯. 且 $g(0)=0$.

于是 $|g(z)|\le|z|$. $f(z)=\frac{2Ag(z)}{g(z)-1}$ 则 $|f(z)|=\frac{2A|g(z)|}{|g(z)-1|}\le\frac{2A|z|}{1-|g(z)|}\le\frac{2A|z|}{1-|z|}$

6. 设 f 全纯. $B(0,1)\to B(0,1)$ 有两不动点. 证明 f 为恒等映射.

证明: 设 $f(a)=a$. $f(b)=b$. $a\ne b$. 令 $g(z)=\varphi_a\circ f\circ\varphi_a^{-1}$. 则 $g(0)=0$.

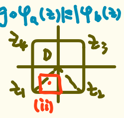
令 $z=\varphi_a(b)$. 则 $g(\varphi_a(b))=\varphi_a\circ f(b)=\varphi_a(b)$. 由 Schwarz 引理: g 为旋转. 又因还有一个不动点. 则 $g(z)\equiv z$

7. 设 f 全纯. $B(0,1)\to B(0,1)$. $a\ne b$. $f(a)=f(b)=0$. 证明 $|f(z)|\le\varphi_a(z)\cdot\varphi_b(z)$

有 $f\circ\varphi_a(0)=0$. $\Rightarrow\exists g$. $B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯, 且 $f\circ\varphi_a(z)=z\cdot g(z)\Rightarrow f=\varphi_a\cdot g\cdot\varphi_a$

有 $\varphi_a(b)\ne 0$. $g\circ\varphi_a(b)=0$. 设 $h=g\circ\varphi_a\circ\varphi_b^{-1}$. $h(0)=0\Rightarrow|g\circ\varphi_a(z)|\le|\varphi_b(z)|\Rightarrow|f|=|\varphi_a|\cdot|g\circ\varphi_a(z)|\le|\varphi_a|\cdot|\varphi_b|$

8. $f\in H(D)\cap C(\bar D)$. $M=\max\limits_{z\in\bar D}|f(z)|$. $m=\max\limits_{z\in\overline{z_1z_2}}|f(z)|\le M$.



证明 $|f(0)|\le m^{\frac14}M^{\frac34}$

构造 $F(z)=f(z)f(iz)f(i^2z)f(i^3z)\Rightarrow F(0)\le mM^3$. 证毕

(ii). 在 $\triangle Oz_1z_2$ 内也有 $f(z)\le m^{\frac14}M^{\frac34}$ 由图中正方形. 显然

9. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为有界区域. $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯. 若对任意收敛于 ∂D 的点列 $z_n\in D$.

都有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|f(z_n)|\le M$. 证明对 $\forall z\in D$. $|f(z)|\le M$

证明: 设 $A=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$. 则 $\exists z_n\in D$. s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}|f(z_n)|=A$.

$\{z_n\}$ 有界 $\Rightarrow\{z_n\}$ 有收敛子列 $\{z_{n_k}\}\to z_0\in\bar D$

① $z_0\in D$. $|f(z_0)|=\lim\limits_{k\to\infty}|f(z_{n_k})|=A\xRightarrow{\text{最大模}}f\equiv A$ 结论成立

② $z_0\in\partial D$. $A=\lim\limits_{k\to\infty}|f(z_{n_k})|\le M$. 于是对 $\forall z_n\in D$. $|f(z)|\le A\le M$

第四章. 全纯函数的Taylor展开及其应用

4.1.

Weierstrass 定理: $f_n:D\to\mathbb{C}$ 全纯, f_n 在 D 中内闭一致收敛于 f. 则有

(i) f 在 D 上全纯

(ii) $f_n^{(k)}(z)\xrightarrow{\text{内闭}}f^{(k)}(z)$ on D.

定理: $D\subset\mathbb{C}$ 为区域. $f_n:D\to\mathbb{C}$ 连续, γ 为 D 中可求长曲线, 若 $f_n\to f$ on γ. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=\int_\gamma\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$

定理: $D\subset\mathbb{C}$ 为区域. $F(z,s):D\times[0,1]\to\mathbb{C}$ 满足 (i) $\forall s\in[0,1]$. $F(z,s)$ 关于 $z\in D$ 全纯, (ii) F 连续. 则 $f(z)=\int_0^1F(z,s)ds$ 在 D 上全纯

$z_n\in\mathbb{C}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛

易见:

(1) Cauchy 准则: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 K 上一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$. $\exists N$, $n>N$ 时 $|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon$ 对 $\forall z\in K$. $\forall p\in\mathbb{N}_+$

(2) Weierstrass 判别法: 若 $|f_n(z)|<a_n$. $\forall z\in K$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 K 上一致收敛

(3) 连续性: f_n 连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 K 上一致收敛于 $f(z)$. 则 $f(z)$ 在 K 上连续、

(4) 可积性: f_n 连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)\xrightarrow{u}f(z)$ on γ. 则 $\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)dz=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz$

(5). 可导性: $f_n:D\to\mathbb{C}$ 全纯. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$, 则 (i) $f(z)$ 在 D 中全纯

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. $k\ge1$

1. $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$

$|n^z|=|e^{z\ln n}|=|e^{x\ln n}\cdot e^{iy\ln n}|=n^x$

$\mathrm{Re}\,z=x\ge x_0>1$. $|\frac{1}{n^z}|\le\frac{1}{n^{x_0}}$ 且 $\sum\frac{1}{n^{x_0}}<+\infty$

由 W-定理知其在 $\mathrm{Re}\,z>1$ 上全纯

2. 求收敛区域. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$

(1) $z=x+iy$. $y=0$ 时 收敛. $y>0$ 时. $\frac{\cos nz}{n^2}=\frac{1}{2n^2}(e^{in(x+iy)}+e^{-in(x+iy)})$

第一项: $\left|\frac{e^{in(x+iy)}}{2n^2}\right|=\frac{1}{2n^2e^{ny}}$ 收敛. 第二项: $\left|\frac{e^{-in(x+iy)}}{2n^2}\right|=\frac{e^{ny}}{2n^2}$ 发散. 于是级数发散

$y<0$ 同理. 于是收敛区域为 $\mathbb{R}$.

(2). $|z|<1$ 时. $\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right|<\left|\frac{z^n}{1-\frac12}\right|=2|z|^n$ $(n>>1)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z|^n<+\infty\Rightarrow$ 收敛

$|z|\ge1$ 时. $\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right|\ge\frac{|z|^n}{1+|z|^n}\ge\frac{|z|^n}{2|z|^n}=\frac12$ 于是发散. (通项不趋于0)

3. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为区域. $F(z,s):D\times[0,1]\to\mathbb{C}$. 满足

(1) $\forall s\in[0,1]$. $F(z,s)$ 全纯. (2) F 连续.

证明: $f(z)=\int_0^1F(z,s)ds$ 为 D 上全纯函数.

证: 对 $\forall z_0\in D$. 取 $\varepsilon>0$. $\overline{B(z_0,\varepsilon)}\subset D$. 下证 f 在 $\Omega=B(z_0,\varepsilon)$ 上全纯.

设 $f_n(z)=\frac1n\sum\limits_{k=1}^{n}F(z,\frac kn)$, 则 $f_n(z)$ 在 D 上全纯, 且 $f_n(z)\to f(z)$ on D.

F 在 $\bar\Omega\times[0,1]$ 上一致连续 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, 当 $|S_1-S_2|<\delta$ 时 $|F(z,S_1)-F(z,S_2)|<\varepsilon$ $\forall z\in\bar\Omega$

当 $n>\frac1\delta$ 时. $\forall z\in\bar\Omega$. $|f_n(z)-f(z)|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn}(F(z,\frac kn)-F(z,s))ds\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn}|F(z,\frac kn)-F(z,s)|ds<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$. 则 $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$ on $\bar\Omega$ 于是 $f(z)$ 在 Ω 上全纯. 在 D 上全纯. 证毕

4.2 幂级数

定理 1: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 为幂级数. 记 $R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ $(0\le R\le+\infty)$ 则 (1) 当 $|z|<R$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛

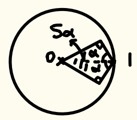
(2) 当 $|z|>R$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 发散

定理 2 (Abel): 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z_0\ne0$ 处收敛. 则它在 $\Omega:\{z\,|\,|z|<|z_0|\}$ 上内闭绝对一致收敛

定理 3: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 为 $\{z\,|\,|z|<R\}$ 中的全纯函数.

称为非切向极限.

定理 4 (Abel 第二定理) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 的 $R=1$. 且在 $z=1$ 时收敛于 S. ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$) 则 $\lim\limits_{\substack{z\to1\\z\in S_\alpha}}f(z)=S$ $(\forall 0<\alpha<\frac\pi2)$



逆命题不成立: 如 $\frac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n$. $\lim\limits_{z\to1}\frac{1}{1+z}=\frac12$ 存在. 但级数发散

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 何处收敛？等于？

① $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$. $z=1$时发散

$z\neq 1$时 $z=e^{i\theta}$ $\theta\in(0,2\pi)$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 收敛

则在 $|z|\leq 1$ 且 $z\neq 1$ 时收敛

② $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$

$\Rightarrow f(z)=-\ln(1-z)$ $D:|z|<1$ (取 $\log 1=0$ 的分支)

$|z|=1$ 且 $z\neq 1$ 时：$=-\ln(1-e^{i\theta})=-\ln|1-e^{i\theta}|-i\arg(1-e^{i\theta})=-\ln(2\sin\frac{\theta}{2})+i\frac{\pi-\theta}{2}$

可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log(2\sin\frac{\theta}{2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$

3. 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<+\infty$.

证：设 $|f(z)|\leq M$. $\forall 0<r<1$. 有 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}|\overline{a_n}\bar{z}^n|$ 在 $|z|=r$ 上一致收敛

$M^2\cdot 2\pi r\geq\int_{|z|=r}|f(z)|^2|dz|=\int_{|z|=r}\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|\cdot\overline{f(z)}dz=\int_{|z|=r}\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n\overline{f(z)}||dz|\overset{①}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r}a_nz^n\overline{f(z)}|dz|=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r}\sum_{m=0}^{\infty}a_nz^n\cdot\overline{a_m}\bar{z}^m|dz|\overset{②同理}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{|z|=r}a_n\overline{a_m}z^n\bar{z}^m|dz|$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{|z|=r}a_n\overline{a_m}r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}\cdot rd\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\cdot r^{2n+1}\cdot 2\pi\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\cdot r^{2n}\leq M^2$. $\forall k>0$. $\sum_{n=0}^{k}|a_n|^2r^{2n}\leq M^2$ 令 $r\to 1^-$ 则 $\sum_{n=0}^{k}|a_n|^2\leq M^2$. 令 $k\to\infty$ 即可.

只有 $n=m$ 否则为0.

①：$|a_{n+1}z^{n+1}\overline{f(z)}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\overline{f(z)}|\leq M(|a_{n+1}z^{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}z^{n+p}|)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\overline{f(z)}$ 在 $|z|=r$ 上一致收敛

作业7：

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 是复数项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}=q$. 证明：

(1) 若 $q<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛；

(2) 若 $q>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 发散.

(1). $\exists\sigma$. $q<\sigma<1$. $\exists N$, $n>N$, $|z_n|<\sigma^n\Rightarrow\sum_{k=m}^{n}|z_k|<\sum_{k=m}^{n}\sigma^k<\frac{\sigma^m}{1-\sigma}$ 取 $m\to\infty$ 有 $\to 0$. 于是绝对收敛

(2) 只需证 $z_n\not\to 0$. $\exists$ 子列 $\{z_{n_k}\}$ 有 $|z_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}>1\Rightarrow|z_{n_k}|>1$ 证毕

Runge 逼近定理

问题：$[a,b]$ 上的连续函数能被多项式一致逼近. $\mathbb{C}$ 的紧致集 K 上的全纯函数能否被多项式一致逼近？

答：不可以. 如：$f(z)=\frac{1}{z}$ $K=\{z||z|=1\}$

若 $\exists P_n(z)\to f(z)$ on K 则 $2\pi i=\int_{|z|=1}fdz=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{|z|=1}P_n(z)dz=0$ 矛盾！

定理(Runge)：(i) 设 $K\in\mathbb{C}$ 紧致，f 在 K 上全纯，则存在有理函数 $f_n\to f$ on K 且 f_n 的奇点在 K^c 中.

(ii) 进一步，若 K^c 连通，存在多项式 $f_n\to f$ on K.

4.3 全纯函数的Taylor展开

定理1：设 $f\in H(B(z_0,R))$，则 f 可在 $B(z_0,R)$ 上展开为幂级数. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ $\forall z\in B(z_0,R)$

定理2：f 在域 D 上全纯 $\Leftrightarrow$ f 在 D 中每点的某个邻域中可展开为幂级数

定义：设 f 在 z_0 处全纯且不恒为0. 若 $f(z_0)=0$. $f'(z_0)=0\cdots f^{(m-1)}(z_0)=0$ 但 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. 称 z_0 为 f 的 m 阶零点

(若对 $\forall k\geq 0$. $f^{(k)}(z_0)=0$. $\xRightarrow{解析}$ $f\equiv 0$ (在 z_0 附近))

命题：z_0 为 f 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow$ 附近 $f(z)=(z-z_0)^mg(z)$ 且 $g(z)$ 在 z_0 处全纯, $g(z_0)\neq 0$

此处列一定是收敛的！！！

定理4(零点的孤立性)：若 f 在域 D 全纯且不恒为0. 则 f 零点是孤立的

定理5(唯一性定理)：设 f_1, f_2 在 D 上全纯，若存在 D 中点列 $\{z_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a\in D$. 且 $f_1(z_n)=f_2(z_n)$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$. 则 $f_1\equiv f_2$

注：(1) f 的零点在 D 中无聚点但在 ∂D 上有聚点

如 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. $z_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n\geq 1)$. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

(2) 实连续函数的零点可能不孤立. $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$

1. $f(x)\in H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$ 且 $|f(z)|=1$. $\forall z\in\partial B(0,1)$. 求 f.

由最大模原理. $|f(z)|\leq 1$. $\forall|z|<1$. (1) 若 $f(z)\neq 0$. 有 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在 $B(0,1)$ 上全纯

$|g(z)|=1$ on $|z|=1$. $|z|<1$ 时 $|g(z)|\leq 1\Rightarrow|f(z)|=1$. 于是 $f(z)=e^{i\theta}$ $(\exists\theta\in\mathbb{R})$

(2) 由零点孤立性. f 在 $|z|<1$ 中只有有限个零点.

为 $a_1,\cdots,a_n$. 重数为 $k_1,\cdots,k_n$. 令 $g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}\right)^{k_j}}$ ← 为了 $|g(z)|=1$

则 $|g(z)|=1$ on $|z|=1$. 由(1), $|g(z)|=1$

$\Rightarrow f(z)=e^{i\theta}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}\right)^{k_j}$

作业9：

5. 是否存在 $f\in H(B(0,1))$，使得下述条件之一成立：

(1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$, $n=2,3,4\cdots$;

(2) $f\left(\frac{1}{2n}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=1$, $n=1,2,3,\cdots$;

(3) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n=2,3,4,\cdots$;

(4) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$, $n=2,3,4,\cdots$.

5. (1) $f(z)=\frac{1}{z+1}$ (3) $f(z)=z^2$

(2) 不存在. $\{\frac{1}{2n}\}$ 为 $f(z)$ 零点集 $\Rightarrow f\equiv 0$

(4) 不存在. $f(z)-z^3$ 的零点集为 $\{\frac{1}{n}\}\Rightarrow f(z)=z^3$ 与 $f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}$ 矛盾！

(2) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$ $|z|<1$ $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ $|z|<1$

(4) $(1+z)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$ $|z|<1$

2. 设 $f\in H(B(0,1))$. 证明：存在 $z_0\in\partial B(0,1)$ 和收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 存在.

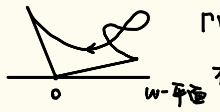
证明：反证. 若对 $\forall z_0\in\partial B(0,1)$, $\forall z_n\in\partial B(0,1)$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=+\infty$.

若结论不成立, $\exists z_0, \exists z_n, z_n\to z_0$. s.t. $\{f(z_n)\}$ 有界

4.4 辐角原理与Rouché（儒歇）定理

定理1：设 $f\in H(D)$, γ 为简单闭曲线, $\mathrm{int}\,\gamma\subset D$. 设 f 在 γ 上没有零点, 在 γ 内有零点 $a_1,\cdots,a_k$, 阶数分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 则 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$

几何意义：Γ 为 w-平面中的曲线（不过原点）$w=w(t)$ $a\le t\le b$. $w(t)$ 的辐角记为 $\theta(t)$. $\theta(t)$ 关于 t 连续

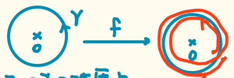


Γ 的辐角增量为 $\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\, w=\theta(b)-\theta(a)$

有 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\, w$ 为环绕指数. 于是有 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\, f(z)$

定理2（辐角原理）$f\in H(D)$, γ 为 D 中可求长闭曲线, $\mathrm{int}\,\gamma\subset D$. 若 f 在 γ 上无零点, 则 f 在 γ 内部的零点个数 $=f\circ\gamma$ 的环绕数.

1. $f(z)=z^2$ $\gamma:|z|=1$



$z=0$ 为2阶零点　　环绕数为2

2. $f(z)=(z^2+1)(z-1)^5$ $\gamma:|z|=3$

零点为 $i,-i$（1阶）, 1（5阶）于是绕 γ 一周时 $f(z)$ 绕原点7圈.

定理3（Rouché）设 $f,g\in H(D)$, γ 为 D 中简单闭曲线. $\mathrm{int}\,\gamma\subset D$, 如果对 $\forall z\in\gamma$, 有 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ 则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 γ 内部零点个数相同.

严格小于.

3. 求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆环 $\{z\mid 1<|z|<2\}$ 中根个数

减去要留小实.

① $|z|<1$ $|\underbrace{z^4-6z+3}_{g}-(\underbrace{-6z}_{f})|=|z^4+3|\le 4<|\underbrace{-6z}_{f}|$ $(|z|=1)$

$f(z)=-6z$ 在 $|z|<1$ 中只有一个零点. 由Rouché定理. $z^4-6z+3=0$ 在 $|z|<1$ 只有一个零点.

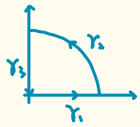
② $|z|<2$ $|z^4-6z+3-z^4|=|-6z+3|\le 15<|z^4|$ $(|z|=2)$

$f(z)=z^4$ 在 $|z|<2$ 中只有一个零点. 由Rouché定理. $z^4-6z+3=0$ 在 $|z|<2$ 有4个零点.

对 $|z|=1$. 无根. 于是在此圆环上有3个零点

4. 证明 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限中各有一个根.

设 $P(z)=z^4+2z^3-2z+10$.



(1) R 充分大时 $P(z)$ 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 上无零点.

1° $z\in\gamma_1$ $z=x>0$. $P(x)=(x^2-1)(x+1)^2+11$

$0\le x<1$ 时 $P(x)\ge -1\times 4+11=7>0$

2° $z\in\gamma_2$. $P(z)=|z|^4\left|1+\frac{2}{z}-\frac{2}{z^3}+\frac{10}{z^4}\right|\to+\infty$ as $z\to\infty$

3° $z\in\gamma_3$, $z=iy$. $P(z)=y^4+10-2iy(y^2+1)\ne 0$.

(2). 当 z 沿 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 绕一圈时. $P\circ\gamma$ 的辐角增量

1° P 在 γ_1 上恒取正值. $\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,P(z)=0$

2° 当 $z\in\gamma_2$ 时 $P(z)=z^4\cdot Q(z)$. 当 $|z|=R$ 充分大时 $|Q(z)-1|<1 \xRightarrow{\text{Rouché}} \Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,Q(z)=0$

$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,P(z)=4\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,z+\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,Q(z)=2\pi$

3° 当 $z\in\gamma_3$ 时 $\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}\,P(z)=\mathrm{Arg}\,P(0)-\mathrm{Arg}\,P(iR)=-\mathrm{Arg}(R^4+10-2iR(R^2+1))\to 0$ as $R\to\infty$

由辐角原理可知 $P(z)$ 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 曲线内部有一零点.

又共轭全对称：第四象限中有一零点, 又 $P(z)$ 在负实轴无零点 $\Rightarrow$ 证毕

定理4：设 $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯, $z_0\in D$. $w_0=f(z_0)$ 若 z_0 为 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零点 $(m\ge 1)$ 则 $\exists\rho_0>0$. 对 $0<\rho<\rho_0$. $\exists\delta=\delta(\rho)>0$. 对 $\forall a\in B(w_0,\delta)$, $f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中有 m 个零点

推论：设 $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯, $z_0\in D$. $w_0=f(z_0)$ 则对充分小的 $\rho>0$. $\exists\delta>0$. $f(B(z_0,\rho))\supset B(w_0,\delta)$

定义：$D\subset\mathbb{C}$ 为区域. $f:D\to\mathbb{C}$ 为开映射. 若对 D 中任意开集 U, $f(U)$ 为开集

定理：若 $f:\overset{\text{区域}}{D}\to\mathbb{C}$ 全纯非常值, 则 (i) f 为开映射 (ii) $f(D)$ 为区域

定理：若 $f:D\to\mathbb{C}$ 单叶全纯, 则对 $\forall z\in D$. $f'(z)\ne 0$.（反过来不成立, 如 $f(z)=e^z$）

定理：若 $f:D\to\mathbb{C}$ 全纯, $z_0\in D$. $f'(z_0)\ne 0$. 则 f 在 z_0 某邻域中单叶

定理：设 $f:D\to\mathbb{C}$ 单叶全纯, 则其反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$. 全纯且 $f^{-1\prime}(w)=\frac{1}{f'(z)}$ $(f(z)=w)$

定理（Hurwitz）：设 $\{f_n\}$ 为一列全纯函数. f_n 在 D 中内闭一致收敛于不恒为0的函数 f, 设 γ 为 D 中简单可求长闭曲线, $\mathrm{int}\,\gamma\subset D$. 且 γ 不过 f 的零点.

则 $\exists N$, $n\ge N$ 时 f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相等.

定理：设 $f_n:D\to\mathbb{C}$ 单叶全纯. 在 D 中内闭一致收敛于 f. 若 f 非常数, 则 f 为 D 中单叶全纯函数

全纯函数部分系结

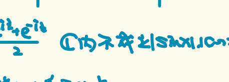
1. 求导法则：对 $\zeta=f(z)$. 有 $\frac{d(g(f(z)))}{dz}=\frac{dg(\zeta)}{d\zeta}\cdot\frac{df(z)}{dz}$

2. 可微 $\Longrightarrow$ 满足C-R方程, 即对 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$. 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

逆命题在偏导连续时成立

tip: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

3. e^z 中以 $2\pi i$ 为周期.



$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$　$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$　$\mathbb{C}$ 内不存在 $|\sin x|, |\cos x|\le 1$

4. 支点：绕一圈后函数值变化的点

5. $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 对全纯函数, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)=0$.

6. 单连通域上的调和函数有共轭调和函数,

全纯函数的Re与Im均为调和函数

第五章 全纯函数的Laurent展开及其应用

§5.1 全纯函数的Laurent展开

定理：设 $D=\{z \mid 0\le r<|z-z_0|<R<+\infty\}$，$f\in H(D)$，则 $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \ \forall z\in D$. 其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (r<\rho<R)$

例：$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 求 $f(z)$ 在 $1<|z|<2$ 与 $2<|z|<+\infty$ 上的Laurent展开式.

(1) $1<|z|<2$. $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}=-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$

(2) $|z|>2$ 时. $f(z)=\underbrace{\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}_{\text{保证模小于1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$

(3) $|z|<1$ 时 $f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$

§5.2 孤立奇点

定义：若 f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中全纯，在 z_0 处无定义，则称 z_0 为 f 的孤立奇点

(i) $\lim_{z\to z_0}f(z)=a\in\mathbb{C}$ 则称 z_0 为 f 的可去奇点

(ii) $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$，则称 z_0 为 f 的极点

(iii) 否则称为 f 的本性奇点

定理(Riemann可去定理)：z_0 为 f 可去奇点 $\Longleftrightarrow$ f 在 z_0 附近有界

若补充定义 $f(z_0)=\lim_{z\to z_0}f(z)$，则 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 中全纯.

定理：若 z_0 为 f 极点，则 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的零点.

证：$\Rightarrow$) $\exists\ \varepsilon>0$ $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时 $f(z)\ne0$. $\Rightarrow\frac{1}{f(z)}$ 在 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 中全纯. 且 $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f}=0\Rightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f}$ 可去奇点 补充定义后 $\frac{1}{f}(z_0)=0$.

$\Leftarrow$) $\lim_{z\to z_0}f=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{1/f}=\infty$.

定义：若 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点，称 z_0 为 f 的 m 阶极点 ☆

定理：z_0 为 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow$ f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中的Laurent展开式满足 $a_{-m}\ne0$. 且 $n>m$ 时 $a_{-n}=0$.

总结：设 f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中的Laurent展开式为 $f=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

(i) z_0 为可去奇点 $\Leftrightarrow$ $a_{-n}=0\ \forall n\ge1$

(ii) z_0 为 m 阶极点 $\Leftrightarrow$ $a_{-m}\ne0$ $a_{-n}=0\ \forall n>m$

(iii) z_0 为本性奇点 $\Leftrightarrow$ 存在无穷多个 $n\ge1$. $a_{-n}\ne0$.

定理：设 z_0 为 f 的本性奇点，则对 $\forall A\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. $\exists\ z_n\to z_0$. $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A$

定义：若 f 在 $|z|>R$ 上全纯，称 ∞ 为 f 的孤立奇点.

∞ 为整函数、有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的孤立奇点，∞ 为 $\frac{1}{\sin z}$、$\frac{1}{e^z+1}$ 的非孤立奇点.

令 $g(z)=f(\frac{1}{z})$. 若 0 为 $g(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的……、……、……

设 $f(z)$ 在 $|z|>R$ 中有L-展开式. $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ 则 $g(z)=f(\frac{1}{z})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^{-n}$

$\lim_{z\to\infty}f(z)$ 存在有限 $\to$ (i) ∞ 为 f 可去奇点 $\Leftrightarrow$ $a_n=0\ \forall n\ge1$ $\Leftrightarrow$ $f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\cdots$

$\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$ $\to$ (ii) ∞ 为 f m 阶极点 $\Leftrightarrow$ $a_m\ne0$. $a_n=0$ if $n>m$. $\Leftrightarrow$ $f(z)=a_mz^m+\cdots+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots$

$\lim_{z\to\infty}f(z)$ 不存在 $\to$ (iii) ∞ 为 f 本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 无穷多 $n\ge1$. $a_n\ne0$.

例：讨论下面函数的奇点(含∞)

(i) $\frac{1}{(z-1)^k}+\sin z\ (k>0)$ 　1为 k 阶极点. ∞ 为本性奇点

(ii) $\frac{\sin z-z}{z^3}$ 　$z=0$ 为可去奇点. ∞ 为本性奇点

(iii) $\frac{1}{e^z+1}$ 　$z_k=(2k+1)\pi i$ 为1阶奇点 $(k\in\mathbb{Z})$. ∞ 为非孤立奇点

(iv) $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z-1}$ 　$z=1$ 为本性奇点. $z=2k\pi i$ 为1阶奇点. ∞ 为非孤立奇点

∞ 时不全纯.

§5.3 整函数与亚纯函数

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯，则称 f 为整函数，则 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\ \forall z\in\mathbb{C}$

定理：设 f 为整函数 (i) 若 ∞ 为 f 可去奇点，则 f 为常数

(ii) 若 ∞ 为 f 极点，则 f 为多项式

定义：称非常数或多项式的整函数称为超越整函数 (如 e^z, $\sin z$)

定义：若 f 在 $\mathbb{C}$ 上只有孤立奇点且均为极点，则称 f 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数

有理函数为亚纯函数(极点有限个)

$f(z)=\frac{1}{\sin z}$ 为亚纯函数(极点无穷多个). $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 不是亚纯函数

设 $f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_nz^n+\cdots+a_0}{b_mz^m+\cdots+b_0}\ (a_n\ne0,\ b_m\ne0)$. $\lim_{z\to\infty}f(z)=\begin{cases}\infty & n>m\\ a_n/b_m & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$ 则 ∞ 为 f 可去奇点或极点

定理：若 ∞ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f 的可去奇点或极点，则 $f(z)$ 为有理函数.

定理: $Aut(\mathbb{C})=\{f(z)=az+b \quad a\neq 0\}$, $Aut(\mathbb{C}_\infty)=\{f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \mid a.b.c.d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0\}$

§5.4 残数(留数)定理

定义: 设$f(z)$在$0<|z-a|<r$上全纯. 设$f(z)$的L-展开为$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$. 称$c_{-1}$为$f$在$a$点的留数, 记为$Res(f,a)$或$\underset{z=a}{Res}f$

设$\gamma: |z-a|=\rho, 0<\rho<r$. 则$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \Rightarrow c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$

定理(留数定理): 设有界区域D的边界γ是由若干条曲线组成的, 若f在D中除去孤立奇点$z_1,\cdots,z_n$外是全纯的, 在$\bar{D}$中除去$z_1,\cdots,z_n$外连续.

则有$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}Res(f,z_j)$

留数为Laurent展开中$\frac{1}{z}$的系数

命题: 若a为f的m阶极点, 则$Res(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m f(z))$

命题: 设$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, g.h全纯, $g(a)\neq 0$, $h(a)=0$, $h'(a)\neq 0$. 则$Res(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$

例: 求$f(z)=\frac{e^z}{z(z^2+1)^2}$在$z=-i$处的留数

$Res(f,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z(z-i)^2}\right)=\frac{e}{4}$

求$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\sin z}dz$

$e^z|_{z=0}=1$ $\sin z|_{z=0}=0$ $\cos z|_{z=0}=1$ 于是$Res(f,0)=\frac{1}{1}=1$ 则$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\sin z}dz=2\pi i$

另: 0为一阶极点. $Res(f,0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=1$ 于是$I=2\pi i\cdot 1=2\pi i$

求$\int_{|z|=1}e^{z+\frac{1}{z}}dz$

$I=2\pi i\cdot Res(f,0)$. $e^{z+\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots)$

于是$\frac{1}{z}$的系数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!n!}$

求$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-e^z)^5}dz=2\pi i\cdot Res(f,0)$

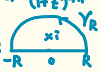
$\frac{z^2\sin^2 z}{(1-e^z)^5}=\frac{z^2(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)^2}{(-z-\frac{z^2}{2!}-\cdots)^5}=-\frac{(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^2}{z(1+\frac{z}{2}+\cdots)^5}$ 于是$\frac{1}{z}$系数为$-\frac{(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^2}{(1+\frac{z}{2}+\cdots)^5}\Big|_{z=0}=-1$ 于是$I=-2\pi i$

§5.5 用留数定理计算积分

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

例: 1. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ $n\geq 0$.

① 复化: 令$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ $\quad\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}+\int_{\gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}=2\pi i\cdot Res(f,i)$

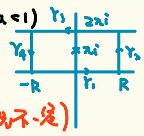
② 选择围道: 

有$\int_{\gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}=O(\frac{1}{R^{2n+1}})\xrightarrow{R\to\infty}0$ 于是$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots dx=\frac{(2n)!\pi}{2^n(n!)^2}$

③ 用留数定理: $Res(f,i)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)=\frac{(2n)!}{2i\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2}$

若$f(x)$为偶函数, $\int_0^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ (大多情况可选上半圆围道)

例: 证明$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$ $(0<a<1)$

$1+e^x=0\Rightarrow x=(2k+1)\pi i$ $k\in\mathbb{Z}$ 取: 

复化: 令$f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$ (不一定是$x\to z$, 情况不一定)

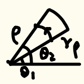
$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\int_{\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}f(z)dz=2\pi i\cdot Res(f,\pi i)=2\pi i\cdot\frac{1}{0!}\lim_{z\to\pi i}z\frac{e^{az}}{1+e^z}=-2\pi i\cdot e^{i\pi a}$

$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz\right|\leq\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right|dy\leq\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{e^R-1}dR\leq\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{\frac{1}{2}e^R}dR=2\int_0^{2\pi}e^{(a-1)R}dR\xrightarrow{R\to+\infty}0$

$\left|\int_{\gamma_4}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz\right|\leq\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right|dy\leq\int_0^{2\pi}\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}dR\leq\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{-aR}dR\xrightarrow{R\to\infty}0$

$\int_{\gamma_3}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=\int_R^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx=\int_{-R}^{R}-e^{2\pi ai}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 于是$(1-e^{2\pi ai})I=-2\pi i\cdot e^{a\pi i}$ 则$I=\frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos ax\,dx$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin ax\,dx$ $(a>0)$

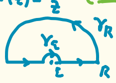
引理: ① 若f连续且$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=A$ 则$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=Ai(\theta_2-\theta_1)$ 

② 若f连续且$\lim_{z\to\infty}(z-a)f(z)=A$ 则$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=Ai(\theta_2-\theta_1)$

Jordan引理: 设$f(z)$在$R_0\leq|z|<\infty$, $Im z>0$上连续且$\lim_{z\to\infty}f(z)=0$. 设$\alpha>0$. 则$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}e^{i\alpha z}f(z)dz=0$.

例: 证明$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (Dirichlet积分)

复化为$F(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ (直接换x为z不好计算) ←对$\int_0^{+\infty}\sin ax\cdot f(x)dx$类, 构造$e^{i\alpha z}f(z)$类复化

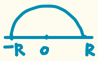
围道: 

$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_\varepsilon+\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$

$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\int_0^{\pi}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon e^{i\theta}\cdot i\,d\theta\to-\pi i$ $(\varepsilon\to 0)$ 由Jordan引理: $\int_{\gamma_R}F(z)dz\to 0$.

$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx$ 即$\int_{\varepsilon}^{R}2i\frac{\sin x}{x}dx\to\pi i$ 于是$R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, 可得$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

例: 求$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx$ (Laplace积分)

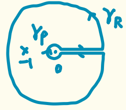
复化为$F(z)=\frac{e^{iaz}}{1+z^2}$ 

有$\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{1+x^2}dx+\underbrace{\int_{\gamma_R}\frac{e^{iaz}}{1+z^2}dz}_{\xrightarrow{Jordan}0}=2\pi i\cdot Res(F,i)=\pi e^{-a}$ 则$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax+i\sin ax}{1+x^2}dx=\pi e^{-a}$

(ii) $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 使用对数函数

例: $I=\int_0^{1}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx$ $m\in\mathbb{Z}^+$, $p\notin\mathbb{Z}$, $0<p<m$.

令 $F(z)=\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}=\frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m}$



在正实轴上沿：$F(z)=\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}$

$\because$ 下沿：$F(z)=\frac{e^{(p-1)(\log|z|+2\pi i)}}{(1+x)^m}=\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}e^{2p\pi i}$

于是 $\int_\rho^R \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx+\int_R^\rho \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}e^{2p\pi i}dx+\int_{\gamma_\rho+\gamma_R} F(z)dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,-1)$

$\left|\int_{\gamma_R}F(z)dz\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}|dz|=2\pi\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}\cdot R\to 0\ (R\to\infty)$

$\left|\int_{\gamma_\rho}F(z)dz\right|\le\int_{\gamma_\rho}\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}|dz|=2\pi\frac{\rho^p}{(1-\rho)^m}\to 0\ (\rho\to 0)$

下求 $\mathrm{Res}(F,-1)$：$m=1$ 时 $\mathrm{Res}(F,-1)=\mathrm{Res}(\frac{z^{p-1}}{1+z},-1)=(-1)^{p-1}$

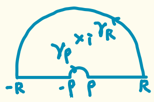
$m>1$ 时 $\mathrm{Res}(F,-1)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}(z^{p-1})=\frac{-1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p)$

代入得：$m=1$ 时 $\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad 0<p<1$

$m>1$ 时 $\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{1}{(m-1)!}(1-p)\cdots(m-1-p)\quad m\ge 2$

例：$I=\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$

令 $F(z)=\frac{\log z}{(1+z^2)^2}$



且 $\left|\int_{\gamma_R}F(z)dz\right|\le\int_0^\pi\frac{|\log R+i\theta|}{(R^2-1)^2}Rd\theta\le\frac{\log R+\pi}{(R^2-1)^2}\pi R\to 0\ (R\to\infty)$

$\left|\int_{\gamma_\rho}F(z)dz\right|\le\int_0^\pi\frac{|\log\rho+i\theta|}{(1-\rho^2)^2}\rho d\theta\le\frac{\log\rho+\pi}{|1-\rho^2|^2}\pi\rho\to 0\ (\rho\to 0)$

则 $\int_{-R}^{-\rho}\frac{\log|x|+i\pi}{(1+x^2)^2}dx+\int_\rho^R\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx+\int_{\gamma_\rho+\gamma_R}F(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(F,i)$

又 $\mathrm{Res}(F,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{\log z}{(z+i)^2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}$，代入有 $2\int_\rho^R\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx+i\pi\int_\rho^R\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi^2}{4}i-\frac{\pi}{2}$ $(\rho\to 0,R\to\infty)$ 对比实虚部，有 $\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\pi}{4}$

(iii) $\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$，$R(\cdot,\cdot)$ 为有理函数

令 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ $dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$ 于是可化为关于 z 的函数

例：$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}$

解 令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(i+2)z^2+6iz+i-2}.$$

右端积分中的被积函数有两个 1 阶极点

$$a_1=-\frac{1+2i}{5},\quad a_2=-1-2i,$$

但只有 a_1 在单位圆内，被积函数在 a_1 处的残数为 $\frac{1}{4i}$，因而

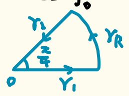
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}=4\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\pi.$$

(iv) 特殊积分

例：$I_1=\int_0^\infty\cos(x^2)dx\quad I_2=\int_0^\infty\sin x^2dx$

常用 $\sin\theta>\frac{2}{\pi}\theta$ $(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$

取 $F(z)=e^{iz^2}$



则 $\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{\gamma_R+\gamma_2}e^{iz^2}dz=0.$

$\left|\int_{\gamma_R}e^{iz^2}dz\right|\le\int_{\gamma_R}\left|e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}\right||dz|=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\cdot\frac{4}{\pi}\theta}Rd\theta=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\to 0\ \text{as } R\to\infty$

$z\in\gamma_2$ 时 $z=re^{\frac{\pi}{4}i}\ 0\le r\le R$. $\int_{\gamma_2}e^{iz^2}dz=\int_R^0 e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}dr=\int_0^R-e^{\frac{\pi}{4}i}e^{-r^2}dr\to -e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-r^2}dr=-e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

于是 $\int_0^\infty e^{ix^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$ 则 $I_1=I_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

例：Poisson 积分，$I=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx\ (a>0)$

§5.7 亚纯函数与极点，整函数与零点

定理 (Mittag-Leffler)：设 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数，$a_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 之不相同的极点，且 $|a_n|\le|a_{n+1}|$，$\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$，则 $f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^\infty(\varphi_n(z)-P_n(z))$

其中 $\varphi_n(z)$ 是 $f(z)$ 在 a_n 处的主要部分，$P_n(z)$ 为多项式，$h(z)$ 为整函数。

第六章 全纯开拓

定义：设 $f:G\to\mathbb{C}$ 全纯，若 $\exists D\supsetneq G$ 以及全纯函数 $F:D\to\mathbb{C}$，且 $F(z)=f(z)\ z\in G$，称 F 为 f 在域 D 上的全纯开拓

例：$f(z)=\sum_{n=0}^\infty z^n\ |z|<1$，$F(z)=\frac{1}{1-z}\ z\ne 1$ 为 f 的全纯开拓。

定理 5.3.3 若 $z=\infty$ 是亚纯函数 f 的可去奇点或极点，则 f 一定是有理函数.

证有理函数.

注：(i) 由唯一性定理，全纯开拓是唯一的

(ii) 不是所有函数都有全纯开拓，如 $\sum_{n=0}^\infty z^{n!}$

(iii) 全纯开拓的方法：$\begin{cases}\text{Schwarz 对称原理}\\ \text{幂级数开拓}\end{cases}$

§6.1 Schwarz 对称原理

定理 (Painlevé 原理)：设 D 为区域，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 D 中可求长曲线，若 f 在 D 上连续，在 $D/\bigcup_{i=1}^n\gamma_i$ 上全纯，则 f 在 D 上全纯。

定理 (Schwarz 对称原理)：设域 D 关于实轴对称，若 f 满足 (i) f 在 $D\cap\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}z>0\}$ 上全纯，(ii) f 在 $D\cap\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}z\ge 0\}$ 上连续，(iii) $f(D\cap\mathbb{R})=\mathbb{R}$（实轴映到实轴），则 $F(z)=\begin{cases}f(z) & z\in D\cap\{\mathrm{Im}z\ge 0\}\\ \overline{f(\bar z)} & z\in D\cap\{\mathrm{Im}z<0\}\end{cases}$

时 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的全纯开拓。

定理 (推广的 Schwarz 对称原理)：γ 为 $\mathbb{C}$ 中圆周或直线，

f 在 D^+ 中全纯且连续到边界，若 $f(\gamma)$ 为 $\mathbb{C}$ 中圆周或直线，则 f 可以延拓为 $D^+\cup\gamma\cup D^-$ 上的全纯函数

如 $\gamma:|z|=1\to\Gamma$：实轴，$F(z)=\overline{f(\frac{1}{\bar z})}$

例：设 f 在上半平面全纯且连续到实轴，且 $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$，若 f 有界，则 f 为常值函数

由对称原理，f 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上全纯函数，且当 $\mathrm{Im}\,z<0$ 时，$|F(z)|=|\overline{f(\bar{z})}|<M$ 于是 F 为有界整函数，由 Liouville 定理，F 为常数 $\Rightarrow f$ 为常数

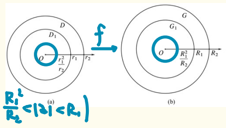
例：设 $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ 全纯且 $f(z)=f(\frac{1}{z})$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，若 $f\{z\,|\,|z|=1\}\subset\mathbb{R}$ 证明当 $x\in\mathbb{R}$，$x\neq0$ 时 $f(x)\subset\mathbb{R}$

证明：$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 关于 $|z|=1$ 对称，由对称原理，$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ 可视为 $f:\{z\,|\,|z|>1\}\to\mathbb{C}$ 的全纯开拓。

于是 $|z|<1$ 时，$f(z)=\overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$，当 $z=x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq0$ 时，$f(x)=\overline{f(\frac{1}{x})}=\overline{f(x)}\Rightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

例：$D=\{z\,|\,r_1<|z|<r_2\}$ 与 $G=\{z\,|\,R_1<|z|<R_2\}$ 双全纯等价 $\Longleftrightarrow \frac{r_2}{r_1}=\frac{R_2}{R_1}$ 且双全纯映射 $f:D\to G$ 满足 $f(z)=e^{i\theta}\frac{R_1}{r_1}z$ 或 $f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{r_1R_2}{z}$

证明：$\Leftarrow$) 显然成立



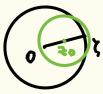
$\Rightarrow$) 设 $f:D\to G$ 双全纯，由边界对应定理，f 将 ∂D 映为 ∂G

① 设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|w|=R_1$，令 $D_1=\{z\,|\,\frac{r_1^2}{r_2}<|z|<r_1\}$，$G_1=\{z\,|\,\frac{R_1^2}{R_2}<|z|<R_1\}$

由 S-反原理：f 全纯开拓到 $D\cup D_1\cup\{|z|=r_1\}$，依次下去，f 可延拓为 $|z|<r_2$ 到 $|z|<R_2$ 的双全纯映射 且 $f(0)=0\Rightarrow f(z)=e^{i\theta}\frac{R_1}{r_1}z$

② 设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|w|=R_2$，令 $g(z)=\frac{R_1R_2}{f(z)}$，其双全纯且将 $|z|=r_1$ 映为 $|w|=R_1$ 于是 $g(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{R_1}{r_1}z\Rightarrow f(z)=e^{-i\theta}\frac{r_1R_2}{z}$

§6.2 幂级数的全纯开拓



设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ $|z|<R$ 设 $\zeta\in\partial B(0,R)$，在 $\overline{0\zeta}$ 取点 $z_0\neq0$，f 在 z_0 处 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 收敛半径为 ρ，则 $\rho<R-|z_0|$

(i) 若 $\rho>R-|z_0|$，则称 ζ 为正则点（f 可延拓）

(ii) 若对 $\forall z_0\in\overline{0\zeta}$，$\rho=R-|z_0|$，则 ζ 为奇点（f 不可延拓）

与原奇点是两概念，毫无关联

例：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，收敛半径 $R=1$，取 $z_0\in B(0,1)$，$z_0\neq0$，则 $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ 于是展开为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$，收敛半径：$\rho=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}}}=|1-z_0|\geq1-|z_0|$

$f(z)=\frac{1}{1-z}$

当 $z_0\in(0,1)$ 时，$\zeta=1$ 是奇点，$\zeta\neq1$ 时 $\rho=|1-z_0|>1-|z_0|\Rightarrow\zeta$ 为正则点

定理：幂级数的收敛圆周上必有奇点　　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|=1$ 处处收敛，但至少有 $z=1$ 为奇点（奇点与收敛性无关）

命题：设幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R $(0<R<\infty)$ 若存在自然数 n_0，$n>n_0$ 时 $a_n>0$，则 R 一定为 f 的奇点。

例 6.2.5　幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n!}$ 的收敛半径显然为 1，我们证明收敛圆周 $\partial B(0,1)$ 上的每一点都是它的奇点．这时，我们称 $\partial B(0,1)$ 是 f 的**自然边界**．

证　由命题 6.2.4 知道，$z=1$ 是 f 的奇点．今取既约分数 $\frac{p}{q}$ $(q>0)$，令 $g(z)=f\left(e^{i2\pi\frac{p}{q}}z\right)$，则

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i2\pi\frac{p}{q}n!}z^{n!}=\sum_{n=0}^{q-1}e^{i2\pi\frac{p}{q}n!}z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}z^{n!}.$$

仍由命题 6.2.4 知道，$z=1$ 是 g 的奇点，因而 $z=e^{i2\pi\frac{p}{q}}$ 是 f 的奇点．现在证明 $\partial B(0,1)$ 上的每一点都是 f 的奇点．如果 $\zeta\in\partial B(0,1)$ 不是 f 的奇点，则必存在圆盘 $B(\zeta,r)$，使得 f 能全纯开拓到 $B(\zeta,r)$，故 $\partial B(0,1)\cap B(\zeta,r)$ 中的每个点都是 f 的正则点．而 $\partial B(0,1)\cap B(\zeta,r)$ 中必有形如 $e^{i2\pi\frac{p}{q}}$ 的点，这就和上面的结论相矛盾．　□

§6.3 单值性定理

定理：设 D 为单连通域，$a\in D$，若 $p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 可以沿 D 中由 a 出发的任意曲线全纯开拓，则 $\exists$ D 中全纯函数 $f(z)$ 在 a 的邻域内满足 $f(z)=p(z)$

第七章 共形映射

§7.1 正规族

定义：若 $\mathcal{F}$ 为区域 D 上的函数族，若其任意序列 $\{f_n\}\subseteq\mathcal{F}$，一定有一子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 中内闭一致收敛，则称 $\mathcal{F}$ 为正规族

定义：若 $\exists M>0$ s.t. $\forall f\in\mathcal{F}$，$\forall z\in D$，$|f(z)|\leq M$，则称 $\mathcal{F}$ 是一致有界的

$\mathcal{F}$ 为函数族

若对 $\forall$ 紧子集 $K\subset D$，$\exists M(K)>0$，$\forall f\in\mathcal{F}$，$\forall z\in K$，$|f(z)|\leq M(K)$，则称 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界（相对一致有界更弱）

定义：若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $z_1,z_2\in D$，$|z_1-z_2|<\delta$，$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ 对 $\forall f\in\mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$ 在 D 上等度连续

Arzela-Ascoli 定理：设 K 为 $\mathbb{C}$ 中紧集 $\{f_n\}$ 是在 K 中一致有界且等度连续的函数列，则一定存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 K 上一致收敛。

Montel 定理：设 $\mathcal{F}$ 是 D 中全纯函数族，则 $\mathcal{F}$ 为正规族 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界

§7.2 Riemann 映射定理

定理（Riemann）：设 $G\subset\mathbb{C}$ 为单连通域且 $G\neq\mathbb{C}$ 对 $\forall a\in G$，$\exists!$ 共形映射 $f:G\to B(0,1)$ s.t. $f(a)=0$，$f'(a)>0$。

§7.3 边界对应原理

定理：设 G 是一条简单闭曲线 γ 所围成的区域，若 $w=f(z)$ 将 G 双全纯地映为 $B(0,1)$，则 f 可扩充到 γ 上 s.t. $f\in C(\overline{G})$，γ 一一映为 $\partial B(0,1)$

定理：设 G 和 D 分别是由可求长闭曲线 γ 和 Γ 围成的区域，若 $f\in H(G)\cap C(\overline{G})$ 将 γ 一一映为 Γ，则 $f(z)$ 将 G 一一映满 D。