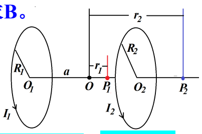
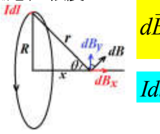
【例1】 如图, 两个共轴的载流线圈，半径分别为R_1和R_2，电流分别为I_1和I_2，电流的方向相同，两圆心O_1和O_2相距为2a，连线的中点为O，试分别求轴线上离O点为r_1处P_1点和离O点为r_2处P_2点的磁感应强度B_1和B_2。



【解】利用毕奥－萨法尔定律和叠加原理求B。

先求一个线圈在轴线上距离线圈中心为 x 处的磁感应强度



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

$$Id\vec{l}\perp\vec{r}\qquad dl=Rd\varphi\qquad r=\sqrt{x^2+R^2}\qquad \sin\theta=\frac{R}{r}$$

由对称性，y方向B抵消，B只有x分量

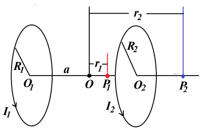
$$dB_x=dB\sin\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{r^2}\frac{R}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2d\varphi}{r^3}$$

$$B=\int dB_x=2\int_0^{\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2d\varphi}{r^3}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{r^3}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

P_1点

$$B_{1-P1}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_1R_1^2}{\left[\left(a+r_1\right)^2+R_1^2\right]^{3/2}}$$

$$B_{2-P1}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_2R_2^2}{\left[\left(a-r_1\right)^2+R_2^2\right]^{3/2}}$$



$$B_{P1}=B_{1-P1}+B_{2-P1}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_1R_1^2}{\left[\left(a+r_1\right)^2+R_1^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{I_2R_2^2}{\left[\left(a-r_1\right)^2+R_2^2\right]^{3/2}}$$

P_2点

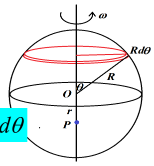
$$B_{1-P2}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_1R_1^2}{\left[\left(a+r_2\right)^2+R_1^2\right]^{3/2}}\qquad B_{2-P2}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_2R_2^2}{\left[\left(r_2-a\right)^2+R_2^2\right]^{3/2}}$$

$$B_{P2}=B_{1-P1}+B_{2-P1}=\frac{\mu_0}{2}\frac{I_1R_1^2}{\left[\left(a+r_2\right)^2+R_1^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{I_2R_2^2}{\left[\left(r_2-a\right)^2+R_2^2\right]^{3/2}}$$

【例2】电荷量Q均匀地分布在半径为R的球面上，球以匀角速度ω绕它的一个固定的直径旋转，试求：(1)轴线上离球心为r处的磁感应强度B；(2)磁矩

【解】(1)电荷运动形成电流，用毕奥－萨法尔定律和叠加原理求B

$$\sigma=\frac{Q}{S}=\frac{Q}{4\pi R^2}$$



球面上宽为 $Rd\theta$ 的环带的电量dQ为

$$dQ=\sigma dS=\sigma\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta=\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

dQ随球面旋转，形成电流dI

$$dI=\frac{dQ}{T}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

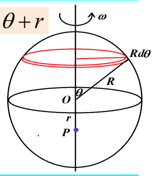
$$dI=\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta}{2\pi/\omega}=\omega\sigma R^2\sin\theta d\theta$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

半径为 a的圆电流在轴线上离圆心 x 处的 B 为

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$dI=\omega\sigma R^2\sin\theta d\theta\qquad a=R\sin\theta\qquad x=R\cos\theta+r$$



则圆电流dI在r处的dB为

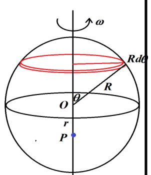
$$dB=\frac{\mu_0\omega\sigma R^4}{2}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$B=\int dB=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0\omega\sigma R^4}{2}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0Q}{6\pi R}\omega & （球内r<R）\\ \dfrac{\mu_0Q}{6\pi R}\omega\left(\dfrac{R}{r}\right)^3 & （球外r>R）\end{cases}$$

方向：沿着转轴方向

(2) 求磁矩 $\vec{m}=I\vec{S}$

dQ 随球面旋转形成圆电流 dI



$$dI=\omega\sigma R^2\sin\theta d\theta=\frac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta d\theta$$

$$S=\pi\left(R\sin\theta\right)^2$$

$$dm=dI\cdot S=\frac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta d\theta\cdot\pi\left(R\sin\theta\right)^2=\frac{1}{4}QR^2\omega\sin^3\theta d\theta$$

$$m=\int dm=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}QR^2\omega\sin^3\theta d\theta=\frac{1}{3}QR^2\omega$$

【例3】一半径为R的无限长空心圆柱面上载有电流 I, I 平行于圆柱面的轴线流动，并且均匀分布在圆柱面上。试求(1)这圆柱面内、外离轴线为r处的任一点的磁感应强度；(2)圆柱面上任一点的磁感应强度(即面电流所在处的磁感应强度)；(3)圆柱面受到的压强

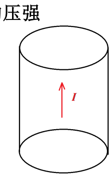
【解】(1)由安培定理求出B

做半径为 r 的圆形回路

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$$

$$r<R,\ B=0$$

$$r>R,\ B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



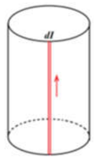
(2) 注意：圆柱面上(面电流所在处)的B不能由安培定理求出

方法1，利用与面电荷电场类似的普遍规律：

$$B=\frac{1}{2}\left(B_++B_-\right)\qquad r\to R_-,\ B_-=0\qquad r\to R_+,\ B_+=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

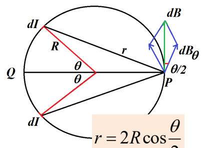
$$\Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(B_++B_-\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方法2：由叠加原理求圆柱面上的B



圆柱面的面电流密度为 $i=\frac{I}{L}=\frac{I}{2\pi R}$

在圆柱面上任取一点P，过P作圆柱的横截面，θ处的线电流为dI

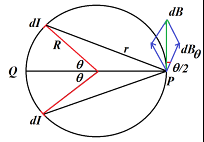


$$dI = idl = \frac{I}{2\pi R}Rd\theta = \frac{I}{2\pi}d\theta$$

无限长直导线磁场 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$　$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}I$　$r=2R\cos\frac{\theta}{2}$

线电流dI在P点产生的dB_θ为
$$dB_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r}dI = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{I}{2\pi}d\theta = \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 R\cos\frac{\theta}{2}}d\theta$$

由对称性得：$dB = 2dB_\theta\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R}d\theta$

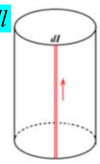


方向：沿P点切线方向

$$B=\int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R}d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

(3)求圆柱面受到的压强

取长为dl、宽为$Rd\theta$的条带　$i=\frac{I}{2\pi R}$　$dS = Rd\theta dl$



安培力 $d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B} = \vec{i}dS\times\vec{B}$

$$d\vec{F} = -\frac{I}{2\pi R}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}dS\,\vec{e}_r = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}dS\,\vec{e}_r$$

$$p = \frac{|d\vec{F}|}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$$

【例4】一回旋加速器，最大半径为R，用它来加速质量为m电量为q的质子，要把质子加速到E_K的能量，求(1)需要的磁感应强度B，(2)若D形电极间的距离为d，加速电压为U，其间电场均匀，求加速到上述能量需要的时间。

【解】(1) 回旋加速器原理：电荷在磁场下受洛伦兹力圆周运动，在中间的D形区间受电场力作用加速。

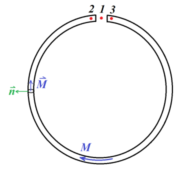
$$F_B = qvB = m\frac{v^2}{R}\qquad E_k=\frac{1}{2}mv^2\qquad B=\frac{mv}{qR}=\frac{\sqrt{2mE_k}}{qR}$$

(2) 电荷在D形电极间的匀加速运动 $a=\frac{F}{m}=\frac{qE}{m}=\frac{qU}{md}$

每次在D形电极间加速获得能量为qU，因此需要加速的次数为 $n=\frac{E_k}{qU}$　$s=nd=\frac{1}{2}at_1^2$　$t_1=\frac{\sqrt{2mE_k}}{qU}d$

圆周运动周期 $T=\frac{2\pi m}{qB}$　$t_2=(n-1)\frac{T}{2}=\frac{(n-1)\pi m}{qB}$　$t=t_1+t_2$

【例5】一铁环，均匀磁化，磁化强度为M，如图M沿环的方向，环上有一很窄的空气隙。已知环的截面积半径比环长小很多，求图中1、2、3点的磁场强度H和磁感应强度B



【解】磁化 $M\rightarrow$ 面磁化电流 i'

$$\vec{i}' = \vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$$

铁环为介质1，$M_1=M$; 真空为介质2，$M_2=0$

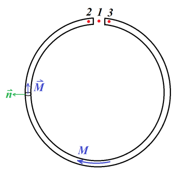
$$\vec{i}' = -\vec{n}\times\vec{M} = M\,\vec{e}_\varphi$$

磁化面电流方向为逆时针方向，类似与一个载流螺绕环，产生的B的方向与M相同

螺绕环的磁感应强度 $B=\mu_0 nI = \mu_0 i'$

$$\therefore B_2 = B_3 = \mu_0 i' = \mu_0 M$$

边值关系 $B_{2n}=B_{1n}$



$$B_{2n} = B_2 = \mu_0 M$$

$$\therefore B_1 = B_2 = B_3 = \mu_0 M$$

本构方程 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$ ⇒

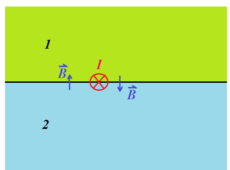
$$\vec{H}_1 = \vec{B}_1/\mu_0 - \vec{M}_1 = \vec{M}-0=\vec{M}$$

$$\vec{H}_2 = \vec{B}_2/\mu_0 - \vec{M}_2 = \vec{M}-\vec{M}=0$$

$$\vec{H}_3 = \vec{B}_3/\mu_0 - \vec{M}_3 = \vec{M}-\vec{M}=0$$

【例6】磁导率分别为μ_1、μ_2的两种均匀磁介质各充满一半空间，它们的交界面是一无限大平面，如图，一条外皮绝缘的无穷长直导线正处在交界面上，并载有电流I，方向如图垂直纸面向里。求I在1和2介质中产生的磁感应强度B_1、B_2。

【解】界面有传导电流I，由右手螺旋，B_1、B_2都与交界面垂直



边值关系 $B_{2n}=B_{1n}$

交界面两边 $\vec{B}_1=\vec{B}_2$

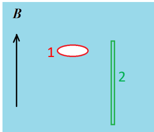
介质中的安培环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0$　$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I$

$B=\mu H$　$\pi r\frac{B_1}{\mu_1}+\pi r\frac{B_2}{\mu_2}=I$　$\xrightarrow{\vec{B}_1=\vec{B}_2}$　$B=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}$

与无介质时的B_0仅相差一个常数

【例7】一块很大的铁磁介质，相对磁导率为μ_r=200，内部有磁感应强度为 B=2.0T的磁场，方向如图。在它里面有两个小空穴，空穴1是垂直于B的薄圆盘形，空穴2是平行于B的细长针形。试分别求这两个空穴的磁场强度H。

【解】 (1)垂直于B的薄圆盘空穴, B垂直于界面



边值关系 $B_{2n}=B_{1n}$

$$B_{圆盘}=B_{介质}=2(T)$$

$$H_{圆盘}=\frac{B_{圆盘}}{\mu_0}=\frac{2}{4\pi\times10^{-7}}=1.6\times10^6\,(A/m)$$

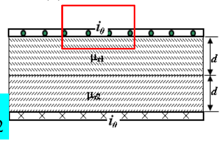
(2) 细长针形空穴 边值关系 $H_{1t}=H_{2t}\quad(i_0=0)$

H与界面切向平行

$$H_{细针}=H_{介质}=\frac{B_{介质}}{\mu_0\mu_r}=\frac{2}{200\times4\pi\times10^{-7}}=8.0\times10^3\,(A/m)$$

13

【例8】两块无限大的平板上均匀地通有电流；电流面密度为 i_0，两块板上电流相互平行，但方向相反，板之间有两层相对磁导率为μ_{r1}和μ_{r2}的磁介质，两磁介质的厚度均为d。求(1)各区域的磁感应强度；(2) 三个分界面的磁化电流面密度；(3) 单位体积的磁能。



【解】(1) 磁场沿水平方向，平行于介质界面，介质 1 和 2 的界面无 i_0

边值关系 $H_{1t}=H_{2t}$ ➡ $H_1=H_2$

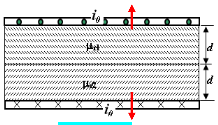
两平板外侧由于电流方向相反，B=0, H=0

做矩形回路 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$ 　 $HL+0+0=i_0L$ 　 $H=i_0$

$$B_1=\mu_0\mu_{r1}H_1=\mu_0\mu_{r1}i_0 \qquad B_2=\mu_0\mu_{r2}H_2=\mu_0\mu_{r2}i_0$$

14

(2)求三个分界面的磁化电流面密度



$$\vec{i}\,'=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1) \qquad \vec{M}=\chi_m\vec{H}$$

$$M_1=\chi_{m1}H_1=(\mu_{r1}-1)i_0$$

$$M_2=\chi_{m2}H_2=(\mu_{r2}-1)i_0$$

$\vec{n}\perp\vec{M}$

设垂直纸面向外为 e_y 方向

上表面：M1与真空分界面 $\vec{i}\,'=\vec{n}\times(0-\vec{M}_1)=(\mu_{r1}-1)i_0\,\vec{e}_y$

两介质M1、M2界面 $\vec{i}\,'=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=(\mu_{r2}-\mu_{r1})i_0\,\vec{e}_y$

下表面：M2与真空分界面 $\vec{i}\,'=-(\mu_{r2}-1)i_0\,\vec{e}_y$

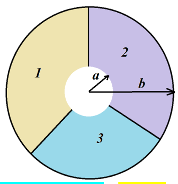
(3) 求单位体积的磁能

$$\omega=\omega_1+\omega_2=\frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_1+\frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_2=\frac{1}{2}\mu_0\mu_{r1}i_0^2+\frac{1}{2}\mu_0\mu_{r2}i_0^2$$

15

【例9】同轴电缆的内导体是半径为a的空心圆柱，外导体是半径为b的薄圆柱面，其厚度可以忽略不计。内外导体间填充有绝对磁导率分别为μ_1、μ_2、μ_3的三种磁介质，每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积，分界面正好沿半径方向。设内外圆柱面内沿轴线方向流有大小相等、方向相反的电流，内圆柱面电流密度为 i，求(1)各区域的磁感应强度和磁场强度；(2)同轴电缆单位长度存储的磁场能量 (3)同轴电缆单位长度自感。

【解】(1)介质中环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$



$r<a$ 　 $I_0=0\quad B=0$

$r>b$ 　 $I_0=I+(-I)=0\quad B=0$

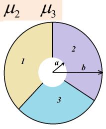
$a<r<b$ 　 $H_1\cdot\frac{2\pi r}{3}+H_2\cdot\frac{2\pi r}{3}+H_3\cdot\frac{2\pi r}{3}=\sum I_0=i2\pi a$ 　 $i=\frac{I}{L}$

$B=\mu H$ 　 $\frac{B_1}{\mu_1}\cdot\frac{2\pi r}{3}+\frac{B_2}{\mu_2}\cdot\frac{2\pi r}{3}+\frac{B_3}{\mu_3}\cdot\frac{2\pi r}{3}=i2\pi a$

16

B 垂直于两介质交界面 　 $B=B_n$ 　 $B_{1n}=B_{2n}$ ➡ $B_1=B_2=B_3$

$$B_1=B_2=B_3=\frac{3ia}{r\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)}=\frac{\mu'3ia}{r} \qquad \frac{1}{\mu'}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}$$



(2)求同轴电缆单位长度存储的磁场能量 　 $\omega_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2\mu}B^2$

$$W_m=\iiint_{V1}\omega_{m1}dV+\iiint_{V2}\omega_{m2}dV+\iiint_{V3}\omega_{m3}dV$$

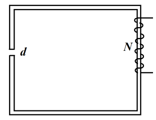
$$=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_1^2}{\mu_1}\cdot\frac{1}{3}\cdot2\pi r\cdot l\cdot dr+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_2^2}{\mu_2}\cdot\frac{1}{3}\cdot2\pi r\cdot l\cdot dr+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_3^2}{\mu_3}\cdot\frac{1}{3}\cdot2\pi r\cdot l\cdot dr=3\pi\mu' i^2a^2l\ln\frac{b}{a}$$

$\frac{W_m}{l}=3\pi\mu' i^2a^2\ln\frac{b}{a}$ 　 (3)求自感 　 $L=\frac{2W_m}{I^2}$ 　 $\frac{L}{l}=\frac{3\mu'}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

17

【例10】一铁芯长为 l，弯成方形，在一边留有宽为 d 的空气隙，铁芯的截面积为 S，磁导率为 $\mu_0\mu_r$，它的另一边用表面绝缘的导线绕有 N 匝线圈，求线圈的自感。

【解】 设线圈中通电流 I_0， 经铁芯内和空气隙作一方形回路



$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$ 　 $H_1l+H_2d=NI$

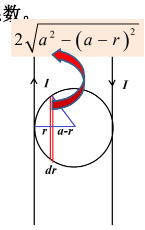
$H_1=\frac{B_1}{\mu_0\mu_r}$， $H_2=\frac{B_2}{\mu_0}$ 　 边值关系 $B_{2n}=B_{1n}$ ➡ $B_2=B_1=B$

$B\left(\frac{l}{\mu_0\mu_r}+\frac{d}{\mu_0}\right)=NI$ 　 $B=\frac{\mu_0\mu_r}{l+\mu_r d}NI$

$\Phi=NBS=\frac{\mu_0\mu_r}{l+\mu_r d}N^2IS$ 　 $L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0\mu_r}{l+\mu_r d}N^2S$

18

【例11】两根无限长直载流导线相互平行，相距为$2a$。两导线中的电流 I 彼此相反，电流强度相同。在两平行长直导线所在平面内有一半径为a的圆环，圆环刚好在两平行长直导线之间，并且彼此绝缘。求圆环与两平行长直导线之间的互感系数。



【解】长直导线电流大小相同方向相反，可视为在无穷远处连通的闭合回路

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a-r)}$$

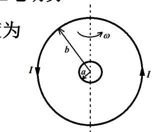
$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{2a-r}\right]$$

在圆环上取细长的面元 $dS = dr\cdot 2\sqrt{a^2-(a-r)^2}$

$$\Phi = \int BdS = 2\int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{2a-r}\right]2\sqrt{a^2-(a-r)^2}\,dr = 2\mu_0 Ia \qquad M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$

【例12】一半径为a的小线圈，电阻为R，开始时与一个半径为b（$b>>a$）的大线圈共面且同心，固定大线圈，并在其中维持恒定电流I，使小线圈绕其直径以匀角速度w转动（线圈自感可以忽略），求：(1) 两线圈的互感系数；(2)小线圈中的感应电流；(3) 维持线圈转动需要的外力矩；(4)大线圈中的感应电动势

【解】(1)线圈b在圆心(线圈a处) 产生的磁感应强度为



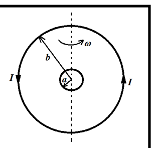
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad dl = bd\theta \qquad r = b$$

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib}{b^2}d\theta = \frac{\mu_0 I}{2b} \qquad b \gg a$$

线圈a中磁场视为等于圆心处磁场

$$\Phi_{ab} = \vec{B}\cdot\vec{S}_a = BS_a\cos\omega t = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2\cos\omega t \qquad M = \frac{\Phi}{I} \qquad M_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{I} = \frac{\mu_0}{2b}\pi a^2\cos\omega t$$

(2)求小线圈中的感应电流；



小线圈中的感应电动势为 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I\omega}{2b}\pi a^2\sin\omega t$

感应电流为 $I = \frac{\varepsilon}{R} \qquad I_a = \frac{\mu_0 I\omega}{2bR}\pi a^2\sin\omega t$

(3)求维持线圈转动需要的外力矩；

线圈a需加的外力的力矩等于它在磁场中所受的安培力的力矩

$\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B} \qquad \vec{m} = I\vec{S}$ $\quad m$为线圈a的磁矩 $\quad m_a = I_a S_a$

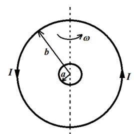
$$\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B} = -I_a S_a B\sin\omega t\,\vec{e}_z = -\left(\frac{\mu_0^2 I^2\pi^2 a^4}{4b^2 R}\right)\omega\sin^2\omega t\,\vec{e}_z$$

(4)求大线圈中的感应电动势；

线圈a中的电流所产生的磁场穿过线圈b中的磁通量为：

$$\Phi_{ba} = MI_a \qquad M = \frac{\mu_0}{2b}\pi a^2\cos\omega t \qquad I_a = \frac{\mu_0 I\omega}{2bR}\pi a^2\sin\omega t$$

$$\Phi_{ba} = MI_a = \left(\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\right)^2\frac{I}{2R}\omega\sin 2\omega t$$



$$\varepsilon_b = -\frac{d\Phi_{ba}}{dt} = -\left(\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\right)^2\frac{I}{R}\omega^2\cos 2\omega t$$

【例13】一漏电电容器的平板之间的空间填满电阻为R的物质，电容为C，极板是圆形的，半径为a，内部电场均匀，t=0时刻电容器两极板间的初始电压为0。(1)若电压以恒定速率dU/dt=k增加，那么位移电流是多少？(2)电容器的真实漏电流在什么时间等于位移电流(3)半径 r ($r<a$)处，t 时刻极板之间 B 的大小为多少？

【解】(1) $I_D = j_D S \qquad j_D = \frac{\partial D}{\partial t} \qquad D = \varepsilon E = \varepsilon\frac{U}{d} \qquad C = \frac{\varepsilon S}{d}$

$$I_D = \frac{\partial D}{\partial t}S = \varepsilon S\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon S}{d}\frac{\partial U}{\partial t} = C\frac{\partial U}{\partial t} = Ck$$

(2) $U = U_0 + \frac{dU}{dt}t = kt \qquad U_0 = 0 \qquad I_0 = \frac{U}{R} = \frac{k}{R}t$

$I_0 = I_D \Rightarrow t = \mathrm{CR}$

漏电电容器，既有传导电流，也有位移电流

(3) $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

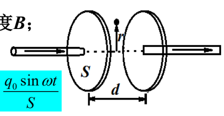
$$2\pi r\frac{B}{\mu_0} = (j_0+j_D)S = \frac{I_0+I_D}{\pi a^2}\pi r^2 = \left(Ck+\frac{k}{R}t\right)\frac{r^2}{a^2} \qquad B(t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi Ra^2}(RC+t)r$$

【例14】一平行板电容器的两极为圆形金属板，面积为S，相距为d，接于一交流电源时，板上电荷随时间变化，即$q=q_0\sin\omega t$，求：

（1）电容器中位移电流密度的大小；

（2）电容器内距轴线中心r处的磁感应强度B；

（3）单位时间流入电容器的能量。



【解】(1) $j_D = \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 \qquad D = \frac{q}{S} = \frac{q_0\sin\omega t}{S}$

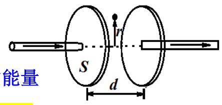
$$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q_0\sin\omega t}{S}\right) = \frac{q_0}{\mathrm{S}}\omega\cos\omega t$$

(2) $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 电容器内(无漏电电流) $I_0 = 0$

$$H2\pi r = j_D S = j_D\cdot\pi r^2 = \frac{q_0}{\mathrm{S}}\omega\cos\omega t\cdot\pi r^2$$

$$H = \frac{q_0\omega r}{2\mathrm{S}}\cos\omega t \qquad \mu_r = 1 \qquad B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0 q_0\omega r}{2\mathrm{S}}\cos\omega t$$

(3) 求单位时间流入电容器的能量



能流密度(单位时间、单位面积流出的能量

$S_{能流密度} = \frac{W}{t \cdot S_{面积}}$ $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

方向垂直指向圆柱体的侧壁

$\frac{W}{t} = S_{能流密度} \cdot S_{面积} = EH \cdot 2\pi rd$ $S_{面积} = 2\pi rd$

圆柱体侧面积

$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\varepsilon_0 S}$ $H = \frac{q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t$

$$\frac{W}{t} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{q_0 \omega r}{2S} \cos \omega t \cdot 2\pi rd = \frac{q_0^2 \omega d}{2\varepsilon_0 S} \sin 2\omega t$$

【例15】一条圆柱状导线,其截面为半径为a的圆，电阻率为ρ，通以恒定电流I。求(1)导线内部距离轴为r处的电场、磁场、及坡印亭矢量S的大小和方向。(2)长为l半径为r的导体内能量的耗散率为多少？与S的关系如何？

【解】(1) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$ E不随时间变化，无位移电流 I_D

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$ $H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$ $\vec{H} = \frac{I}{2a^2} r \vec{e}_\varphi$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \times \frac{I}{2a^2} r \vec{e}_\varphi = -\rho \frac{I^2}{2\pi a^4} r \vec{e}_r$$

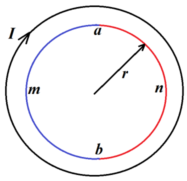
(2) $P = I^2 R$ $j = \frac{I}{S}$ $R = \rho \frac{L}{S}$

$$P = \left(\frac{I}{\pi a^2} \pi r^2\right)^2 \cdot \rho \frac{l}{\pi r^2} = \frac{I^2}{\pi a^4} r^2 \rho l = S(2\pi rl) = SA$$

$A = 2\pi rl$ 为侧面积

【例16】半径为r的金属圆环，由两个半圆弧连接而成，左边一半amb的电阻为R_1，右边一半anb的电阻为R_2。圆环放在长直螺线管内，螺线管的轴线与圆环轴线重合，螺线管的电流为I=kt(k>0)，单位长度匝数为n，求(1)ab两点的电势差$U_{ab}=U_a-U_b$；(2)导体内的感应电动势的方向(即涡旋电场的方向)是否总是由低电势指向高电势？

【解】(1) $B = \mu_0 nI = \mu_0 nkt$ 随时间变化



圆环上的感应电动势 $\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$\vec{E}_{旋}$ 逆时针方向

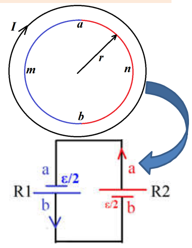
$\frac{dB}{dt} = \mu_0 nk$ $\varepsilon = \mu_0 nk\pi r^2$

$I_{感} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{\mu_0 nk\pi r^2}{R_1 + R_2}$ 感应电流 $I_{感}$与涡旋电场方向相同，也是逆时针方向

$E_{旋}$沿逆时针方向, b→n→ a是一个电动势为ε/2, 内阻为R_2的电源，a为电源正极

$$U_{ab} = U_a - U_b = \frac{\varepsilon}{2} - IR_2 = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} R_2$$
$$= \varepsilon \frac{R_1 - R_2}{2(R_1 + R_2)} = \mu_0 nk\pi r^2 \frac{R_1 - R_2}{2(R_1 + R_2)}$$

$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{\mu_0 nk\pi r^2}{R_1 + R_2}$



a→m →b也是一个电动势为ε/2的电源, 内阻为R_1，b为电源正极 ε/2

$$U_{ba} = U_b - U_a = \frac{\varepsilon}{2} - IR_1$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} R_1 = \varepsilon \frac{R_2 - R_1}{2(R_1 + R_2)} = -U_{ab}$$

两种计算结果相等

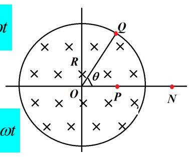
(2)导体内的感应电动势的方向(即涡旋电场的方向)是否总是由低电势指向高电势？

$R_1 > R_2 \; U_a > U_b$, $R_1 < R_2 \; U_a < U_b$

【例17】半径为R的无限长载流螺线管中电流$I=I_0 \sin(\omega t)$，单位长度内匝数为n，取一个横截面，其上有如图所示P、Q、N三点，离螺线管轴线的距离分别为0.5R、R和1.5R，求(1)三点各自的涡旋电场大小及方向；(2)在QN间加一个导线，如何连接会使得QN两点间的电势差为0；(3) PQ两点间的电势差可能的最大值为多少，如何才能实现？(导线不重叠)

【解】(1) 设回路方向为顺时针方向

$B = \mu_0 nI = \mu_0 nI_0 \sin \omega t$ $\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 nI\omega \cos \omega t$



$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $2\pi r E_{旋} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$r \le R \;\; E_{旋} = \frac{r}{2} \mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$ $E_{P旋} = \frac{R}{4} \mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$

管外B=0,

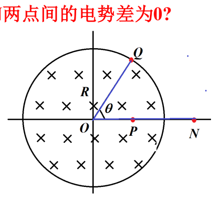
$E_{Q旋} = \frac{R}{2} \mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$

$r > R \;\; E_{旋} = \frac{1}{2r} R^2 \mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$ 方向：逆时针，沿圆周切线方向

$E_{N旋} = \frac{1}{3} R\mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$

(2)在QN间加一个导线，如何连接会使得QN两点间的电势差为0?

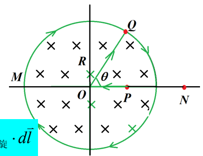
涡旋电场方向沿圆周切线，要使得QN间电势差为0, 需使导线与 $E_{旋}$ 垂直，即导线沿径向，如图中蓝线Q-O-N所示。



(3) PQ两点间的电势差可能的最大值为多少，如何才能实现？(导线不重叠)

$r \le R \;\; E_{旋} = \frac{r}{2} \mu_0 n\omega I_0 \cos \omega t$

要使得PQ间电势差最大，则需要导线沿着 $E_{旋}$方向,即导线沿圆周方向，另外螺线管内$E_{旋}$与r成正比，尽可能以最大r(r=R)绕更长的导线，如右图绿色线所示，P-O-Q-M-Q



$$V_{PQ-\max} = \varepsilon = \int_P^Q \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = \int_P^O \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} + \int_O^Q \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} + \oint_{Q-M-Q} \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l}$$
$$= 0 + 0 + \frac{1}{2} \mu_0 n\omega I_0 R \cos(\omega t) 2\pi R = \mu_0 n\omega I_0 R^2 \pi \cos(\omega t)$$

【例18】已知真空中一平面电磁波的电场强度为 $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ 式中E_0为常矢量，ω是圆频率，k为传播矢量，r为位置。(1)由麦克斯韦方程求这个电磁波的磁场强度H；(2)求能量密度的瞬时值和一个周期内的平均值

【解】 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

对平面电磁波

$\nabla=i\vec{k}$ $\nabla\times\vec{E}=i\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$\dfrac{\partial}{\partial t}=-i\omega$ $\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-i\omega\vec{H}$

$$i\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=-\mu_0\left(-i\omega\vec{H}\right)$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

(2)求能量密度的瞬时值和一个周期内的平均值

$$\omega=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

对真空中的平面电磁波，有 $\omega_e=\omega_m$

$$\omega=2\omega_e=\varepsilon_0 E^2=\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

$$\overline{\omega}=\int_0^T \varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)dt=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$