

中国科学技术大学

线性代数小论文

姓名: 张竞一

学院: 数学科学学院

学号: PB23010356

主题: 区域参数化与网格逼近系统

日期: 2024年12月15日

目录

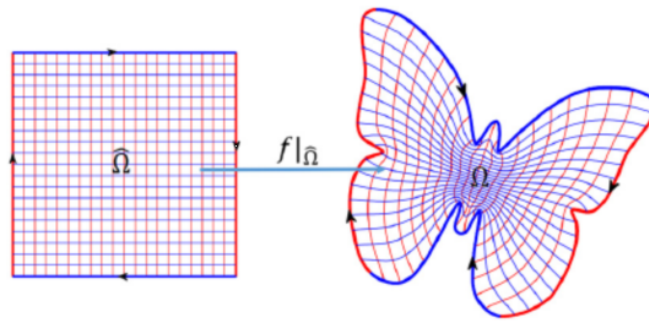
1 二维	2
2 三维细分曲面	2
2.1 细分曲面综述	2
2.1.1 细分曲面的发展概述	2
2.1.2 细分曲面的收敛性、连续性分析	3
2.1.3 细分曲面的应用	3
2.2 Doo-Sabin 细分曲面	4
2.2.1 细分规则	4
2.2.2 细分矩阵的参数化	6
2.2.3 两个实例	10

摘要

区域参数化通过映射 f_Ω 将一个单位正方形 D 映射到给定的平面单连通区域 Ω 上，需要保证 f_Ω 是一个从 D 到 Ω 的一一映射并且保证局部变形尽量小。本文在二维基础上进行三维物体的网格系统逼近，具体地谈了 Doo-Sabin 细分曲面的规则并对其进行了改进。

关键词: 参数化、逼近、三维网格

1 二维



讨论二维情况的区域参数化问题包含在三维参数化问题中，其中本文在三维 Doo-Sabin 细分曲面中提出的改进方法对应了在二维区域参数化中边界线处曲线存在尖点（不光滑点）的情况。

由于二维形式下的问题是三维问题下高度压缩至 0 的特殊情况，我们讨论更难的三维情况下的问题。

2 三维细分曲面

2.1 细分曲面综述

2.1.1 细分曲面的发展概述

细分曲面是计算机图形学中一种常用于建模和渲染的技术，它通过递归的细分过程将粗略的多边形网格转换为更加平滑、细致的曲面。自 20 世纪 80 年代以来，细分曲面在计算机图形学和动画制作中得到了广泛应用。

1974 年，Chaikin 提出的曲线细分方法正是这种角切割思想的具体实现。随后 Riesenfeld 证明了这种极限曲线就是二次 B 均匀样条曲线。1978 年 Catmull 与 Clark, Doo 与 Sabin 分别将三次和二次均匀 B 样条曲面推广到任意拓扑，提出了著名的 Catmull-Clark 细分（以下简称 C-C 细分）和 Doo-Sabin 细分算法，标志着细分曲面正式成为曲面建模的一种手段。

在最近十几年中，细分曲面方法得到了蓬勃的发展，主要成果如下：

继 C-C 细分和 Doo-Sabin 细分之后，1987 年美国华盛顿大学的 Loop 在他的硕士论文里首次将三角网格上的箱样条理论推广到任意拓扑，发明了著名的 Loop 细分模式，该方法至今仍是最常用的细分模式之一；1990 年，Dyn 等人提出了插值三角网格顶点的蝶式（Butterfly）

细分；1996年，Zorin 等人对蝶式细分加以改进，使之在奇异点处可以达到一阶连续；同年，Kobbelt 提出了插值四边形顶点的 Kobbelt 细分；1997年，Peters 与 Reif 给出了基于四边形网格的中边细分；2000年，Kobbelt 又给出了对偶的三角网格细分模式—— $\sqrt{3}$ 细分，Labsik 与 Greiner 在此基础上提出了插值 $\sqrt{3}$ 细分；2002年，Loop 给出了基于三角网格的三分细分格式；2003年 Stam 与 Loop 提出了基于三角网格和四边形网格的混合细分。此外，Qin 等将物理性质引入 C-C 曲面，提出了动态细分曲面模型，允许使用外力使之交互变形，并成功应用于医学数据可视化领域；Ying 等提出了针对非流型网格的细分算法。

2.1.2 细分曲面的收敛性、连续性分析

早在细分曲面诞生之际，Doo 与 Sabin 就创造性地结合离散 Fourier 变换和矩阵特征值理论分析了细分曲面的连续性；随后 Ball 与 Story 用类似的方法给出了 C-C 曲面 G^1 连续性的严格证明；Loop 则是利用卷积定理进行收敛性和连续性分析；Warren 把细分矩阵的系数看作两个离散序列的卷积并与一个生成函数相关联，然后用函数的观念分析细分曲面的收敛性和连续性；Qin 等利用等价节点距给出了 NURSS 的连续性证明；Peters 给出了细分曲面在奇异点处的高斯曲率和平均曲率的计算方法，并以此讨论了细分曲面二阶连续的充分必要条件；Reif 考虑到仅仅切平面连续可能出现网格局部自交的情形，提出了特征映射的概念。

至今，特征映射仍然是判定细分曲面连续性的常用准则，而且成为构造新的高阶连续的细分模式的依据。

2.1.3 细分曲面的应用

1. 计算机动画与电影制作

细分曲面在计算机动画和电影制作中得到了极为广泛的应用，尤其是在角色建模和环境建模中。通过细分技术，艺术家可以快速构建复杂的、光滑的三维模型，而无需手动处理每个细节。主要应用包括：

①角色建模：在动画制作中，尤其是对于动画电影和视频游戏中的角色，细分曲面能够提供高质量的光滑表面，使得角色皮肤、头发、衣物等部分更具真实感。例如，皮克斯和迪士尼等公司在制作角色时，都广泛使用细分曲面技术来确保人物的表面光滑且细节丰富。

②面部动画：细分曲面可以处理细腻的面部表情变化，尤其是通过与骨骼动画的结合，确保角色的面部表情平滑且自然。电影《阿凡达》中的角色动画就利用了细分曲面技术进行面部表情的精细表达。

③环境建模：细分曲面不仅限于角色建模，还被广泛应用于复杂的自然环境建模，例如地形、植被、建筑等。通过细分，环境模型可以变得更加真实，并能呈现各种复杂的细节。

2. 工业设计与产品造型

在工业设计中，细分曲面技术被用来创建复杂的、符合流线型设计的产品外形，特别是汽车、飞机、消费电子产品等需要精确曲面的设计。

①汽车设计：汽车行业利用细分曲面技术来设计车身外形，尤其是在造型复杂且要求高度光滑的外部表面。细分曲面可以帮助设计师在不影响性能的情况下，优化车身的气动外形。

②消费电子产品：细分曲面常用于设计复杂的电子产品外壳，尤其是手机、笔记本电脑等消费品。精确的曲面设计可以确保产品的美观与舒适感，同时降低生产过程中出现瑕疵的风

险。

③航空航天：在航空航天领域，细分曲面常用于设计飞机机身、翼型等精密结构。这些设计要求曲面不仅要美观，而且要具备优良的空气动力学性能，细分曲面能够帮助工程师在设计过程中处理这些复杂要求。

3. 医疗和生物建模

细分曲面被广泛应用于医学影像和生物建模中，尤其是在解剖学建模、手术规划等方面：

①三维解剖模型：医学领域需要通过细分曲面精确表示人体解剖结构，尤其是对于复杂的器官、血管、骨骼等模型。细分曲面帮助医生在三维空间中查看和操作这些模型，从而辅助诊断和治疗。

②手术模拟与规划：细分曲面也用于创建手术模拟模型，在虚拟环境中进行手术练习和规划。通过高精度的细分曲面建模，能够模拟手术过程中器官、组织的形态和反应，从而帮助外科医生进行更好的准备。

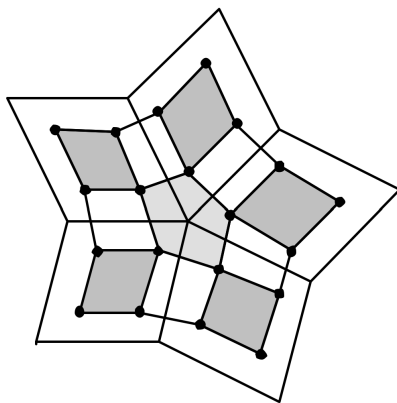
2.2 Doo-Sabin 细分曲面

Doo-Sabin 细分曲面是将二次均匀 B 样条曲面推广到任意拓扑而得到的一种对偶型细分曲面，是和 C-C 细分曲面几乎同时提出并且同样非常重要的一种基于四边形网格的逼近型细分曲面。

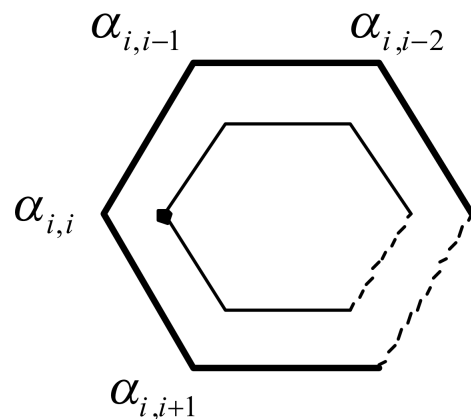
2.2.1 细分规则

Doo-Sabin 曲面细分的几何规则比较简单，每细分一次，各顶点在其相邻面中都会产生一个新顶点。拓扑规则稍微复杂，每个面的新顶点依次相连得到新 F-面；每条边的端点在其左、右邻近面的新顶点依次相连得到新 E-面；把每个顶点在其邻近面的新顶点依次相连得到新 V-面。这样，细分一次后奇异面的个数保持不变；细分二次后，任意点的 1-邻域网格面至多包含有一个奇异面。

下面是一个例子：如图 (a) 所示，图中给出了用 Doo-Sabin 模式细分一次后的网格分裂示意图，其中实心圆点为新顶点，灰色面为新 F-面，花色底纹的五边形面为新 V-面，白色的四边形面为新 E-面。



(a) Doo-Sabin 网格分裂



(b) Doo-Sabin 新顶点计算模版

设 N 边形面 \mathbf{f} 的各个顶点分别为 $\mathbf{v}_j (j = 0, 1, \dots, N-1)$, 则其顶点 \mathbf{v}_j 在面 \mathbf{f} 内的新顶点计算公式为

$$\mathbf{v}'_i = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{i,j} \mathbf{v}_j$$

其中 $\alpha_{i,j} = \begin{cases} \frac{3+2\cos(\frac{2(i-j)\pi}{N})}{4N} & \text{if } j \neq i \\ \frac{N+5}{4N} & \text{if } j = i \end{cases} j = 0, 1, \dots, N-1$, 新顶点的计算图示如图 (b)。

关于有边界的 Doo-Sabin 曲面造型, Nasri 通过延拓边界构造多边形复型的方式来逼近边界曲线。边界延拓方法如下:

(1) 对四边的边界面, 如图 (c) 所示, 将内顶点 $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ 分别关于边界点 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 对称, 得到 $\mathbf{P}_{1,3} = 2\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_{2,4} = 2\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_4$;

(2) 对四边的角点, 如图 (d) 所示, 作对称延拓同样得到 $\mathbf{P}_{2,3} = 2\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_{4,3} = 2\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_0 = 4\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 - 2\mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_3$;

(3) 对 n 边边界面, 如图 (e) 所示, 设 \mathbf{M}_0 和 \mathbf{M}_{m-1} 是边界顶点 ($m = n - 2$), $\{\mathbf{D}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 是非边界顶点, 在 $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_{m-1}$ 上定义中间顶点:

$$\mathbf{M}_i = \frac{1}{2}[(1 + \beta_i)\mathbf{M}_0 + (1 - \beta_i)\mathbf{M}_{m-1}], (i = 1, \dots, m-2)$$

其中 $\beta_i = \frac{\cos(\frac{(2i+1)\pi}{2m})}{\cos(\frac{\pi}{2m})}$, ($i = 1, \dots, m-2$)。对顶点 $\{\mathbf{D}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 关于 $\{\mathbf{M}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 做对称变换, 得到顶点 $\{\mathbf{D}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$, 则有 $\mathbf{D}'_i = (1 + \beta_i)\mathbf{M}_0 + (1 - \beta_i)\mathbf{M}_{m-1} - \mathbf{D}_i$, ($i = 1, \dots, m-1$);

(4) 对 n 边的角点, 如图 (f) 所示, 设 $\{\mathbf{D}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 是非边界顶点 ($m = n - 3$), \mathbf{M}_{2m-1} 和 \mathbf{N}_{2m-1} 是 \mathbf{M}_0 与 \mathbf{N}_0 关于 \mathbf{G} 的对称点, 下面定义中间顶点:

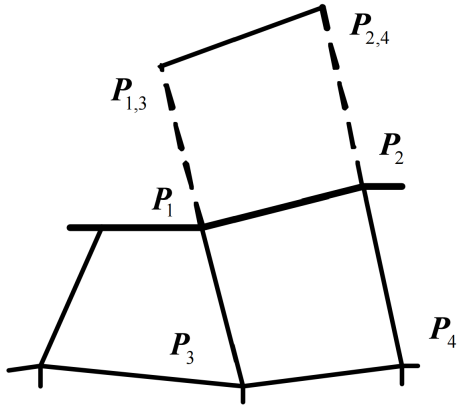
$$\begin{cases} \mathbf{M}_i = \frac{1}{2}[(1 + \beta_i)\mathbf{M}_0 + (1 - \beta_i)\mathbf{M}_{m-1}] \\ \mathbf{N}_i = \frac{1}{2}[(1 + \beta_i)\mathbf{N}_0 + (1 - \beta_i)\mathbf{N}_{m-1}] \end{cases}$$

其中 $\beta_i = \frac{\cos(\frac{(2i+1)\pi}{4m})}{\cos(\frac{\pi}{4m})}$, ($i = 1, \dots, 2m-2$)。对顶点 $\{\mathbf{D}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 关于 $\{\mathbf{M}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 对称得到 $\{\mathbf{D}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$, 对顶点 $\{\mathbf{D}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 关于 $\{\mathbf{N}_{m-i-1}\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 对称得到 $\{\mathbf{P}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$, 对顶点 $\{\mathbf{D}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 关于 $\{\mathbf{N}_{m+i}\}_{0 \leq i \leq m-1}$ 对称得到 $\{\mathbf{P}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$, 则有

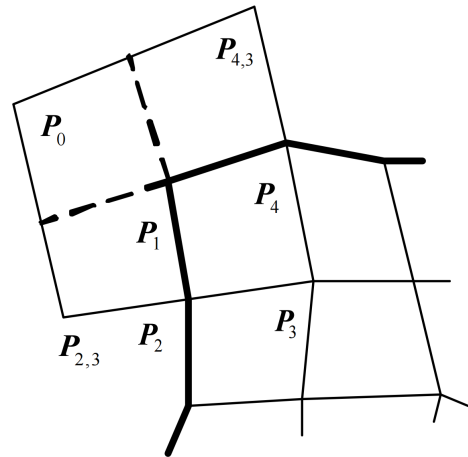
$$\begin{cases} \{\mathbf{D}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1} = (1 + \beta_i)\mathbf{M}_0 + (1 - \beta_i)\mathbf{M}_{m-1} - \mathbf{D}_i \\ \{\mathbf{P}_i\}_{0 \leq i \leq m-1} = (1 + \beta_{m-i-1})\mathbf{N}_0 + (1 - \beta_{m-i-1})\mathbf{N}_{2m-1} - \mathbf{D}_i \\ \{\mathbf{P}'_i\}_{0 \leq i \leq m-1} = (1 + \beta_{m+i})\mathbf{N}_0 + (1 - \beta_{m+i})\mathbf{N}_{2m-1} - \mathbf{D}'_i \end{cases}$$

, 其中 $i = 0, 1, \dots, m-1$, β_i 的定义同上

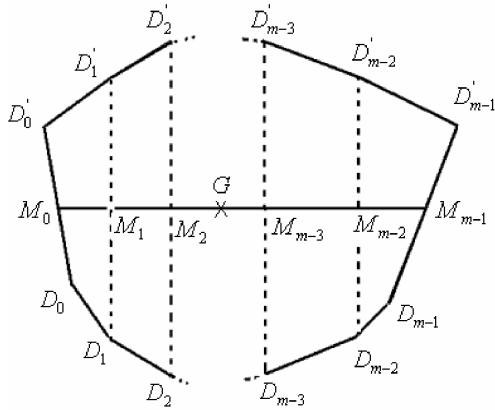
将延拓后的曲面按照原来的 Doo-Sabin 细分规则计算, 只是新的边界点和边界边均不产生相应的新 E-面和新 V-面。



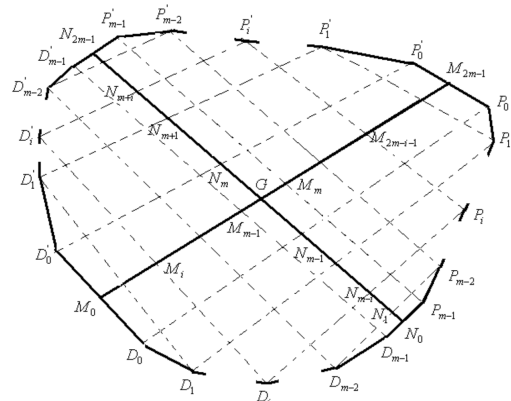
(c) 四边形边界面的延拓



(d) 四边形角点的延拓



(e) n 边形边界面的延拓



(f) n 边形角点的延拓

不过，这种方法的缺点也是明显的，即不能精确表示原曲面的边界并且不能构造曲面内部的折痕特征，这个问题在本文下一小节将会给出 Doo-Sabin 细分模式的改进方案。

2.2.2 细分矩阵的参数化

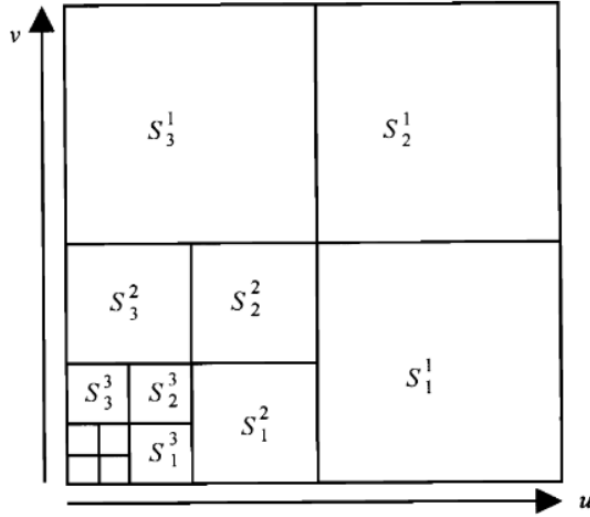
在正则网格面上，Doo-Sabin 细分曲面是二次均匀曲面。这里推导 Doo-Sabin 二次型的细分矩阵及参数化。

Doo-Sabin 细分是对偶细分模式，即细分过程中每个网格点被一个网格面所代替，且网格面不断收缩。这样，每个网格面都对应一个极限点。在细分后，一个子面片被一分为四，其中三块为双二次 B 样条，产生了 9 个双二次 B 样条的基函数。设奇异面 f_i 的顶点 $\mathbf{v}_{i,j}$ 细分 k 次后的新顶点为 $\mathbf{v}_{i,j}^k, j = 0, 1, \dots, N-1, k = 1, 2, \dots$ 。令 $\tilde{\mathbf{C}}_0^T = (\mathbf{v}_{i,0}, \mathbf{v}_{i,1}, \dots, \mathbf{v}_{i,N-1})$, $\tilde{\mathbf{C}}_k^T = (\mathbf{v}_{i,0}^k, \mathbf{v}_{i,1}^k, \dots, \mathbf{v}_{i,N-1}^k)$ 。令 $\mathbf{B}(u, v)$ 为包含这 9 个双二次 B 样条基函数的向量，则那三个小的双二次 B 样条面片可以表示为

$$s_{k,m}(u, v) = \mathbf{B}_{k,m}^T \mathbf{B}(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega, m \geq 1, k = 1, 2, 3$ 。我们可以先计算 3 个小面片再递归处理剩下的子面片，从而确定全部子面片。由于 \mathbf{S}_k^m 定义在 Ω_k^m 上, $k = 1, 2, 3$., 其中 $\Omega_1^m = [2^{-m}, 2^{-m+1}] \times [0, 2^{-m}]$, $\Omega_2^m = [2^{-m}, 2^{-m+1}] \times [2^{-m}, 2^{-m+1}]$, $\Omega_3^m = [0, 2^{-m}] \times [2^{-m}, 2^{-m+1}]$, $m = 1, 2, \dots$

如图一所示:



图一:B 样条子面片

整个子面片可表示为

$$s(u, v)|_{\Omega_k^m} = s_{k,m}(t_{k,m}(u, v))$$

其中变换同文献 [1] 中的定义, 将区域 Ω_k^m 映射到 Ω .

下面进行子面片的参数化. 分块矩阵

$$\mathbf{S} = \text{circ}(\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,N-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{0,N-1} & \alpha_{0,0} & \dots & \alpha_{0,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \dots & \alpha_{0,0} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

是一个循环矩阵。其中 $\alpha_{i,j} = \begin{cases} \frac{3+2\cos(\frac{2(i-j)\pi}{N})}{4N} & \text{if } j \neq i \\ \frac{N+5}{4N} & \text{if } j = i \end{cases} j = 0, 1, \dots, N-1,$

下面引入 Fourier 变换矩阵 $\mathbf{T} = (\omega^{ik})_{N \times N}$, 其中 $\omega = e^{2\pi i/N}$, 得到

$$\Sigma = \mathbf{TST}^{-1} = \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

于是矩阵 \mathbf{S} 的特征向量矩阵为 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I} = (\omega^{ik})_{N \times N}/N$, 其中 \mathbf{I} 为单位阵。为了得到实数的特征向量, 构造特征矩阵 \mathbf{U}_0 的列如下:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos l\theta \\ \vdots \\ \cos(N-1)l\theta \end{pmatrix}, l = 1, 2, \dots, N/2,$$

$$\mathbf{u}_{N-l} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin l\theta \\ \vdots \\ \sin(N-1)l\theta \end{pmatrix}, l = 1, 2, \dots, (N-1)/2.$$

矩阵 \mathbf{S} 的其他子块为

$$\mathbf{S}_{11} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_{12} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}$$

其中 $a = 9/16, b = 3/16, c = 1/16$. \mathbf{S}_{12} 的特征向量和特征矩阵可直接求出:

$$\Delta = \text{diag}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right),$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

基于细分矩阵 \mathbf{A} 的分块结构, 我们可以类似于文献 [1] 求出其特征结构 $(\Lambda, \mathbf{V}), \mathbf{S}$ 的特征结构 (Σ, \mathbf{U}_0) ,

由上述步骤可知 $N \leq 4$ 时的细分矩阵才有此特征结构, 在 $N > 4$ 时此过程无法继续, 这是因为此时 \mathbf{A} 是退化的. 于是此时可以考虑使用 Jordan 标准型.

假设矩阵 \mathbf{W} 和 \mathbf{F} 满足

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \Delta \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{N-1}), \mathbf{F} = (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{N-1})$, 并且 $\mathbf{f}_j = (0, a_j, 0, b_j, 0)^T, j = 0, 1, \dots, N-1$. 则有

$$(\mathbf{S}_{12} - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{w}_j = \mathbf{U}_1 \mathbf{f}_j - \mathbf{S}_{11} \mathbf{u}_j,$$

其中 λ_j 为 Σ 的第 j 个对角元. 下面分三种情况求解此方程:

(1) 如果 $j \in 0, 1, N-1$, 则 $\lambda_j > 1/4$, 此时 $(\mathbf{S}_{12} - \lambda_j \mathbf{I})$ 可逆, 令 $\mathbf{f}_j = 0$ 即可解.

(2) 如果 $2 \leq j \leq N/2$, 则 $\lambda_j = 1/4$, 可令 $a_j = b_j = (a+b)(1 + \cos j\theta)/2$, 并且选取

$$\mathbf{w}_j = (3\cos j\theta, 3, 5 - 4\cos j\theta, 3, 3\cos j\theta)^T.$$

(3) 如果 $N/2 < j < N-1$, 则 $\lambda_j = 1/4$. 同理可得

$$a_j = -b_j = (a+b)(\sin j\theta)/2, \mathbf{w}_j = (3\sin j\theta, 0, 0, 0, -3\sin j\theta)$$

在此基础上, 只需要将矩阵 $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \Delta \end{pmatrix}$ 分解为 Jordan 标准型, 即找到可逆矩阵 \mathbf{H} 使得 $\mathbf{GH} = \mathbf{HJ}$, 其中 Jordan 标准型 \mathbf{J} 可以确定为

$$\mathbf{J} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}, \mathbf{J}_2\left(\frac{1}{4}\right), \mathbf{J}_2\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\mathbf{J}_2\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N+4})$, 则我们可以令 $\mathbf{h}_0 = \mathbf{e}_0, \mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_N, \mathbf{h}_4 = \mathbf{e}_{N+2}, \mathbf{h}_5 = \mathbf{e}_{N+4}$, 其中 \mathbf{e}_i 是第 i 个元素为 1 的单位向量。

继续计算 \mathbf{G} 对应 $\frac{1}{4}$ 的特征向量, 取 $\mathbf{h}_{N+2} = \mathbf{e}_{N+1}, \mathbf{h}_{N+4} = \mathbf{e}_{N+3}$, 并且有 $\mathbf{h}_6 \mathbf{h}_N$ 依次为:

$$\textcircled{1} x_2 = \frac{1+\cos j\theta}{1+\cos 2\theta}, x_j = 1, x_k = 0, \forall k \notin \{2, j\}, \text{ 其中 } j = 3, 4, \dots, N/2;$$

$$\textcircled{2} x_{N-l} = 1, x_{N-2} = -\frac{\sin l\theta}{\sin 2\theta}, x_k = 0, \forall k \notin \{N-l, N-2\}, \text{ 其中 } j = 3, 4, \dots, (N-1)/2.$$

求解 $(\mathbf{G} - \frac{1}{4}\mathbf{I})\mathbf{h}_{N+1} = \mathbf{h}_{N+2}$ 和 $(\mathbf{G} - \frac{1}{4}\mathbf{I})\mathbf{h}_{N+3} = \mathbf{h}_{N+4}$, 得到 \mathbf{h}_{N+1} 和 \mathbf{h}_{N+3} 依次为:

$$\textcircled{1} x_2 = \frac{4}{3+3\cos 2\theta}, x_{N-2} = -\frac{4}{3\sin 2\theta}, x_k = 0, \forall k \notin \{2, N-2\};$$

$$\textcircled{2} x_2 = \frac{4}{3+3\cos 2\theta}, x_{N-2} = \frac{4}{3\sin 2\theta}, x_k = 0, \forall k \notin \{2, N-2\}.$$

最后, 令 $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} \mathbf{H}$, 则 \mathbf{V} 和 \mathbf{J} 满足 $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$.

至此, 我们已经求得可逆方阵 \mathbf{V} 与 Jordan 标准型 \mathbf{J} 满足 $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$. 从而 $\bar{\mathbf{C}}_m = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{J}^{m-1}\tilde{\mathbf{C}}_0$, 其中 $\tilde{\mathbf{C}}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}_0$. 令 $\Lambda = \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4})$, $\mathbf{U} = (u_{j,k})$ 是一个只有 $u_{N+2, N+1} = u_{N+4, N+3} = 1$ 而其他元素都是 0 的常矩阵, 不难验证 $\mathbf{J}^m = \Lambda^m + m4^{-m+1}\mathbf{U}$. 于是有

$$s_{k,m}(u, v) = \tilde{\mathbf{C}}_0^T \Lambda^{m-1} (\mathbf{P}_k \bar{\mathbf{A}} \mathbf{V})^T \mathbf{B}(u, v) + \frac{m-1}{4^{m-2}} \tilde{\mathbf{C}}_0^T \mathbf{U}^T (\mathbf{P}_k \bar{\mathbf{A}} \mathbf{V})^T \mathbf{B}(u, v).$$

令 $\mathbf{x}(u, v, k) = (\mathbf{P}_k \bar{\mathbf{A}} \mathbf{V})^T \mathbf{B}(u, v)$, \mathbf{p}_j^T 表示 $\tilde{\mathbf{C}}_0$ 的一行, 于是子面片可以表示为

$$\mathbf{s}(u, v)|_{\Omega_k^m} = \sum_{j=0}^{N+4} (\lambda_j)^{m-1} x_j(t_{k,m}(u, v), k) \mathbf{p}_j + \frac{m-1}{4^{m-2}} [x_{N+2}(t_{k,m}(u, v), k) \mathbf{p}_{N+1} + x_{N+4}(t_{k,m}(u, v), k) \mathbf{p}_{N+3}],$$

其中 λ_j 是对角阵 Λ 的第 j 个对角元.

类似地, 可以为每一个特征值 λ_j 定义一个特征基函数 ψ_j :

$$\psi_j(u, v)|_{\Omega_k^m} = \begin{cases} \phi_j(u, v) + 4(m-1)\phi_{j+1}(u, v) & j = N+1, N+3; \\ \phi_j(u, v) & \text{other} \end{cases}$$

于是整个子面片的参数化格式也可以改写为

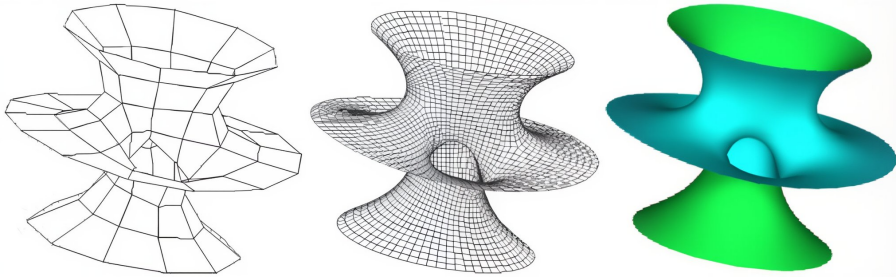
$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{j=0}^{N+4} \psi_j(u, v) \mathbf{p}_j$$

这个格式也便于我们求取曲面在除原点外的任意点的任意阶导数。

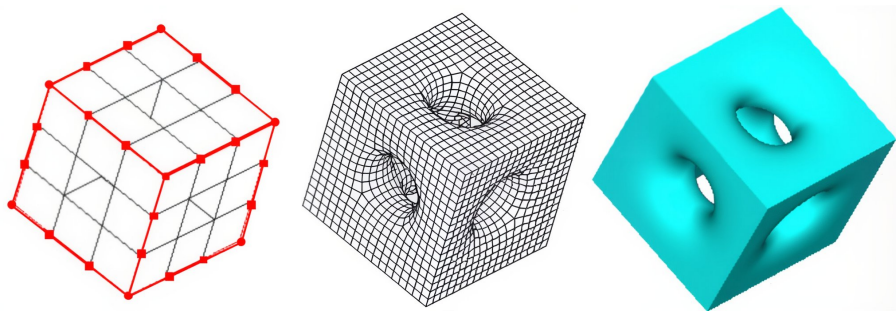
2.2.3 两个实例

注：以下示例在软件环境为 ACIS6.0 几何平台，使用了 OpenGL 图形库。

下面是使用此方法的两个例子，其中第一张图片是初始网格，第二张是细分三次的网格，第三张图片是对应的光照图：



表面光滑时的一个例子



表面有棱角时的一个例子

这两张图片表明此细分模式在表面光滑时细分的效果十分优秀，但是在处理有棱角的实例时并不能有效地将棱角映射为棱角，这是此细分模式的一个缺陷，仍然有待解决。

参考文献：

- [1] Stam J. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arComputer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH'98), 1998:395
- [2] Boehm W. Inserting new knots into B-spline curve. Computer-Aided Design, 1980, 12(4): 199-201